ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

Մեխանիկա 44, № 3, 1991 Механика

УДК 539.3

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВОЛН ЛЯВА С НЕОДНОРОДНЫМ СЛОЕМ

БЕЛУБЕКЯН М. В.

Исследована задача распространения сдвиговой волны в однородном полупространстве контактирующим с неоднородным слоем (обобщение задачи Лява). Установлены условия существования поверхностной волны для произвольной неоднородности в предположении малости толщины слоя. Рассмотрены частные случаи неоднородности.

Впервые вопросы существования поверхностной сдвиговой волны для неоднородного упругого полупространства исследовались в [1]. Обзор дальнейших исследований приводится в [2]. Здесь рассматривается задача Лява в случае, когда полупространство однородное, а слой над полупространством является неоднородным по толщине. В предположении малости толщины слоя, получены условия существования поверхностной волны для произвольной неоднородности.

1. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) полуплоскость занимает область $x_2 \geqslant 0$, а слой над полуплоскостью —область $-h \leqslant x_2 \leqslant 0$. Предполагается, что компоненты упругого перемещения в направлениях x_1 и x_2 тождественно равны нулю, а компонент в направлении x_3 является функцией координат x_1, x_2 и времени t.

Уравнение движения в области $x_2 > 0$ приводится к виду

$$\mu_2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=\rho_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

где u—перемещение в направлении x_3, $\mu_2=\mathrm{const}$—модуль сдвига, $\rho_2=\mathrm{const}$—плотность материала среды.

Для области $-h < x_2 < 0$ уравнения движения берутся в виде

$$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}=\rho(x_2)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\quad \rho(x_2)>0 \tag{1.2}$$

где v—упругое перемещение в направлении x_3, $\rho(x_2)$—функция плотности материала слоя, σ_{31} и σ_{32}—касательные напряжения, которые согласно закону Гука определяются посредством деформации следующим образом:

$$\sigma_{31}=\mu(x_2)\frac{\partial v}{\partial x_1},\quad \sigma_{32}=\mu(x_2)\frac{\partial v}{\partial x_2},\quad \mu(x_2)>0 \tag{1.3}$$

В дальнейшем, не нарушая общности, для функций неоднородности принимаются представления

$$\rho(x_2)=\rho_1[1+\gamma\varphi(x_2)], \quad \mu(x_2)=\mu_1[1+\varepsilon f(x_2)], \quad \varphi(0)=f(0)=0 \tag{1.4}$$

Условия контакта на границе слоя и полупространства следующие:

$$u=v, \quad \mu_1\frac{\partial v}{\partial x_2}=\mu_2\frac{\partial u}{\partial x_2} \quad \text{при} \quad x_2=0 \tag{1.5}$$

Кроме того, необходимо удовлетворить условию на свободной поверхности и условию затухания

$$\sigma_{32}=0 \quad \text{при} \quad x_2=-h, \quad \lim_{x_2\to\infty} u=0 \tag{1.6}$$

С использованием (1.3), уравнение (1.2) переписывается в виде

$$\mu(x_2)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}=\rho(x_2)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) интегрируется в пределах от $-h$ до 0 в предположении, что функция v вследствие малости толщины, не изменяется по координате x_2. Тогда, с учетом (1.5) и условия на свободной поверхности (1.6), получим следующее граничное условие:

$$\mu_1(h+\varepsilon a)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\mu_2\frac{\partial u}{\partial x_2}=\rho_1(h+\gamma b)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{пуи} \quad x_2=0 \tag{1.8}$$

где

$$a=\int_{-h}^{0} f(x_2)dx_2, \qquad b=\int_{-h}^{0}\varphi(x_2)dx_2$$

Таким образом, задача приводится к нахождению решения уравнения (1.1), удовлетворяющего граничному условию (1.8) и условию затухания при $x_2\to\infty$.

2. Приведенная выше задача имеет решение вида

$$u=A\exp(-k\sqrt{1-\eta}\,x_2)\exp i(\omega t-kx_1) \tag{2.1}$$

где

$$\eta=\omega^2k^{-2}\rho_2\mu_2^{-1} \tag{2.2}$$

—искомый безразмерный параметр, характеризующий квадрат скорости распространения поверхностной волны, который определяется из следующего дисперсионного уравнения:

$$L(\eta)=\beta kh(\alpha\eta-1)-\sqrt{1-\eta}=0 \tag{2.3}$$

Здесь приняты обозначения

$$\beta=\frac{\mu_1}{\mu_2}\left(1+\frac{\varepsilon a}{h}\right), \quad \alpha=\frac{\rho_1\mu_2}{\rho_2\mu_1}\,\frac{h+\gamma b}{h+\varepsilon a} \tag{2.4}$$

Необходимо найти решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условию затухания при $x_2 \to \infty$, то есть удовлетворяющего следующему неравенству:

$$0 < \eta < 1 \tag{2.5}$$

Аналогичная идея осреднения уравнения движения для тонкого однородного слоя ($\varepsilon = \gamma = 0$) была использована в [3, 4]. В этом случае показано, что уравнение (2.3) получается из точного дисперсионного уравнения задачи Лява при пренебрежении k^2h^2 по сравнению с единицей. Естественно предполагать, что и в случае неоднородного слоя уравнение (2.3) применимо для достаточно длинных (по сравнению с толщиной слоя) волн.

Легко показать, что функция $L(\eta)$ (2.3) в интервале $[0,1]$ имеет следующие свойства:

$$L(0) < 0, \quad L(1) = \beta kh(\alpha - 1), \quad L'(\eta) > 0 \tag{2.6}$$

Отсюда следует, что для существования решения уравнения (2.3), удовлетворяющего условию (2.5), необходимо и достаточно выполнение условия

$$\alpha > 1 \tag{2.7}$$

Для задачи однородного слоя ($\varepsilon = \gamma = 0$), согласно (2.4) и (2.7), получается известное условие существования поверхностной волны Лява, независимо от толщины слоя.

3. В случае $\mu_1 = \mu_2$, $\varrho_1 = \varrho_2$ выполняются условия теоремы Алексеева А. А. [5], согласно которой для того, чтобы существовала поверхностная волна, необходимо и достаточно, чтобы существовало $-h < x_2^* < 0$, такое, что

$$\gamma\varphi(x_2^*) > \varepsilon f(x_2^*) \tag{3.1}$$

В рассматриваемой здесь приближенной постановке аналогичное условие имеет вид

$$\gamma b > \varepsilon a \tag{3.2}$$

В работе [5] доказательство указанной теоремы приводится при условии, что функция модуля сдвига имеет непрерывную производную второго порядка при $-h < x_2 < \infty$. Однако указывается, что это ограничение не должно быть существенным. Отметим, что условие (3.2) получено при условии интегрируемости функций $f(x_2)$, $\varphi(x_2)$.

Из сравнения (3.1) и (3.2) следует, что условие (3.2) является в общем случае лишь достаточным условием существования. Однако условие (3.2) может быть и необходимым для широкого класса функций с учетом малости толщины h.

Например, в случае степенной неоднородности [6,7]

$$f(x_2) = \varphi(x_2) = x_2^n h^{-n}$$

условия (3.1) и (3.2) эквиваленты и приводят к одному и тому же условию существования поверхностной волны

$$(-1)^{n}\gamma > (-1)^{n}\varepsilon$$

В случае $f(x_2)=x_2 h^{-1}$, $\gamma=0$ условие существования (2.7) принимает вид

$$\frac{\rho_1\mu_2}{\rho_2\mu_1} > 1-\frac{\varepsilon}{2}$$

Отсюда при $\mu_1=\mu_2$, $\varrho_1=\varrho_2$ поверхностная волна существует, если $\varepsilon>0$. Такой же результат следует из теоремы Алексеева, если считать ограничение на гладкость функции модуля сдвига несущественным.

ON THE LOVE WAVES EXISTENCE CONDITION IN THE CASE OF NONHOMOGENEOUS LAYER

M. V. BELUBEKIAN

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՇԵՐՏՈՎ ԼՅԱՎԻ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

Ամփոփում

Հետազոտված է անհամասեռ շերտով կցված համասեռ կիսատարածությունում սահքի ալիքների տարածման խնդիրը: Շերտի բարակության պայմանի դեպքում ստացված է մակերևութային ալիքի գոյության պայման: Դիտարկված են անհամասեռության մասնավոր դեպքեր:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах.—М.: Наука, 1981, 288 с.
2. *Maugin G. A.* Elastic Surface Waves with Transverse Horizontal Polarization. —In Advances in Applied Mechanics, ed. I. W. Hutchinson, vol. 23. Acad. Press, New York, 1983, p. 373—434.
3. *Mardoch A.* I. The Propagation of Surface Wave in Bodies with Material Boundaries.—*J.* Mech. and Phys. Solids. 1976, 24, №1, p. 137—146.
4. *Белубекян М. В., Геворкян А. В.* О магнитоупругих волнах Лява.—Матем. методы и физ.—мех. поля. 1983, 18, с. 55—57.
5. *Алексеев А. А.* О критерии существования волн Лява.—Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных.—М.: Наука, 1986, с. 137—141 (Вычисл. сейсмология; вып. 22).
6. *Kielczynski P.* Propagation of Surface SH Waves in Nonhomogentours Media.—J. Tech. Phys. 22, 1, 1981, p. 73—78.
7. *Maugin G. A.* Shear Horizontal Surface Acoustic Waves on Solids.—Recent. Dev. Surface Acoust. Waves. Proc. Eur. Mech. Colloq. № 226, Nottinghem Sept. 2—5, 1987 Berlin ets. 1988.

Институт механики АН Армении
МПО «Ани»

Поступила в редакцию
25.II.1990