ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 44, № 2, 1991 Механика

УДК 532.517.3

РАЗВИТИЕ ЛАМИНАРНОГО НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ВХОДНОМ УЧАСТКЕ КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

САРУХАНЯН А. М.

Сформулирована задача начального участка нестационарного ламинарного движения в круглой цилиндрической трубе. Получены формулы распределения скоростей как по длине и по поперечному сечению нестационарного потока в начальном участке, так и по поперечному сечению в стабилизированном нестационарном потоке.

Исследование неустановившегося ламинарного течения вязкой жидкости на входном участке круглой цилиндрической трубы имеет практическое и теоретическое значения. Соответствующая стационарная задача рассмотрена во многих работах. Нестационарное течение рассматривалось лишь в некоторых работах. Используя линейную аппроксимацию и приближение, предложенное С. М. Таргом в работе [1], рассмотрено пульсирующее течение на входном участке, правомерность которого подтверждается экспериментально [2]. Рассматривая влияние периодического возмущения на пограничный слой плоской пластины, в работе [3] дается аппроксимирующее решение для входного участка цилиндрической трубы.

Воспользовавшись гипотезой автомодельности профилей скорости в пограничном слое и уравнения импульсов в [4], дается решение задачи при произвольном распределении скоростей на входе трубы. Аналогичная задача решена также в работе [5] методом численного интегрирования уравнения Навье-Стокса. Используя линейную аппроксимацию, предложенную С. М. Таргом, и приближение для малых времен в работе [6], решена задача о развитии течения на входном участке круглой трубы при разгонном движении жидкости.

В настоящей работе сделана попытка получить решение задачи в общем виде. Система аппроксимирующих дифференциальных уравнений, описывающая нестационарную задачу осесимметричного движения несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе, имеет вид

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+U_0\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)=0 \qquad (3)$$

$$U_0=\frac{2}{R^2\Delta T}\int_0^R\int_0^{\Delta T} r v_z dr dt \tag{4}$$

где ось oz направлена вдоль оси трубы и начало отсчета совмещено с центром начала трубы.

v_z, v_r —составляющие вектора скорости в направлении координаты z, r;

$$v_z=v_z(z, r, t), \quad v_r=v_r(z, r, t) \tag{5}$$

p—давление, зависящее от z и t, которое следует из уравнения (2), то есть

$$p=p(z, t) \tag{6}$$

ρ—плотность жидкости; ν—кинематический коэффициент вязкости; U_0 —осредненная по времени средняя скорость живого сечения; R—радиус трубы; t —время.

Уравнения (1), (2), (3) на начальном участке имеют следующие граничные и начальные условия:

$$v_z=0, \quad \text{при} \quad r=R \tag{7}$$

$$v_z=\psi(r), \quad v_r=0, \quad \text{при} \quad z=0, \quad 0\leqslant r<R, \ t=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z}\to 0, \quad v_r=0, \quad v_z\to v' \quad \text{при} \ z\to\infty \tag{9}$$

Здесь $v'=v'(r,t)$ является решением уравнения нестационарного осесимметричного одномерного течения вязкой жидкости

$$\frac{\partial v'}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v'}{\partial r}\right) \tag{10}$$

при краевых условиях (7) и (8)

Общее решение уравнения (1) при краевых условиях (7), (8), (9) ищем в виде суммы

$$v_z(z,r,t)=U(z,r,t)+\varphi(z,t) \tag{11}$$

где $U(z,r,t)$ —общее решение однородного уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U_0\frac{\partial U}{\partial z}=\nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) \tag{12}$$

$\varphi(z,t)$—частное решение неоднородного уравнения (1).

Общее решение уравнения (12) ищем в виде

$$U(z,r,t)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k(z,t) J_0\left(\lambda_k\frac{r}{R}\right) \tag{13}$$

Здесь $J_0\left(\lambda_k\frac{r}{R}\right)$—бесселевы функции первого рода нулевого порядка; $C_k(z,t)$—неизвестные коэффициенты.

Подставим значение $U(z, r, t)$ из (13) в уравнение (12) и приравнивая соответствующие коэффициенты для определения неизвестных коэффициентов $C_k(z, t)$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} C_k(z, t) + U_0 \frac{\partial}{\partial z} C_k(z, t) = -\frac{\nu \lambda_k^2}{R^2} C_k(z, t) \tag{14}$$

Решение этого уравнения представим в виде

$$C_k(z, t) = C_k(t) \exp\left(-\frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_e} z\right) \tag{15}$$

где $R_e = \frac{U_0 R}{\nu}$, тогда для определения $C_k(t)$ получим уравнение

$$\frac{dC_k(t)}{dt} = 0 \tag{16}$$

то есть $C_k(t) = C_k = \text{Const}$. Следовательно

$$C_k(z, t) = C_k \exp\left(-\frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_e} z\right) \tag{17}$$

Имея ввиду соотношение (17), общее решение задачи примет вид

$$v_z(z, r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_e} z\right) + \varphi(z, t) \tag{18}$$

Чтобы определить неизвестную функцию $\varphi(z, t)$, умножим обе части уравнения (3) на rdr и проинтегрируем по r в пределах от 0 до R. Тогда, принимая во внимание условия прилипания жидкости к стенке трубы, получим

$$\int_0^R r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr = 0 \tag{19}$$

Подставляя из (18) значение v_z в уравнение (19), получим соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} - \int_0^R r \frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_e} C_k J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_e} z\right) dr + \int_0^R r \frac{\partial}{\partial z} \varphi(z, t) dr = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi(z, t) = +2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_e} C_k J_1(\lambda_k) \exp\left(-\frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_e} z\right) \tag{20}$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\varphi(z, t) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\lambda_k} J_1(\lambda_k) \exp\left(-\frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_e} z\right) + C_0(r, t) \tag{21}$$

Здесь $C_0(r, t)$ — постоянная интегрирования. Имея ввиду значение

$\varphi(z, t)$ из (21), окончательно для $v_z(z, r, t)$ получим формулу

$$v_z(z,r,t)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp\left(-\frac{\lambda_k^2}{R \cdot R_e} z\right)\left[J_0\left(\lambda_k \frac{r}{R}\right)-\frac{2J_1(\lambda_k)}{\lambda_k}\right]+C_0(r,t) \qquad (22)$$

Значение $C_0(r, t)$ определяется из условия (10). Подставляя в (22) $z \to \infty$, для $C_0(r, t)$ получим

$$C_0(r,t) \to v'(r,t) \qquad (23)$$

$v'(r, t)$ является решением уравнения (10) при краевых условиях (7) и (8), которое ищется в виде суммы

$$v'(r,t)=U_1(r,t)+U_2(r,t) \qquad (24)$$

где $U_1(r, t)$ — решение задачи, учитывающее действие перепада давления при нулевых начальных и граничных условиях; $U_2(r, t)$ — то же влияние стенок трубы и начальное распределение скоростей.

Для нестационарного осесимметричного течения $\frac{\partial p}{\partial r}=0$, откуда следует, что давление в каждый момент времени во всех живых сечениях имеет одну и ту же величину. Это возможно, если

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=f(t) \qquad (25)$$

Из определения функции U_1 следует, что она является решением неоднородного уравнения

$$\frac{\partial U_1}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r}\right)+f(t) \qquad (26)$$

при нулевых начальных и граничных условиях

$$U_1(r,t)=0, \quad \text{при} \quad r=R, \quad t>0 \qquad (27)$$

$$U_1(r,t)=0, \quad \text{при} \quad t=0, \quad 0\leqslant r<R \qquad (28)$$

а U_2 — решением однородного уравнения

$$\frac{\partial U_2}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial U_2^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_2}{\partial r}\right) \qquad (29)$$

при условиях

$$U_2(r,t)=0, \quad \text{при} \quad r=R, \quad t>0 \qquad (30)$$

$$U_2(r,t)=\psi(r), \quad \text{при} \quad t=0, \quad 0\leqslant r<R \qquad (31)$$

Общее решение уравнения (29) ищем в виде:

$$U_2(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp\left(-q_k^2\frac{\nu}{R^2}t\right)J_0\left(\frac{q_k}{R}r\right) \qquad (32)$$

где q_k — корни функции Бесселя нулевого порядка; b_k — постоянный коэффициент, значение которого определяется по формуле

$$b_k=\frac{2}{R^2J_1^2(q_k)}\int\limits_0^R rJ_0\left(q_k\frac{r}{R}\right)\varphi(r)dr \tag{33}$$

Решение неоднородного уравнения (26) ищем в виде ряда Фурье-Бесселя по собственным функциям задачи

$$U_1(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(t)J_0\left(q_k\frac{r}{R}\right)\exp\left(-q_k^2\frac{\nu}{R^2}t\right) \tag{34}$$

при этом t является параметром.

Для определения значения коэффициентов $A_k(t)$ функцию $f(t)$ разложим в ряд Фурье-Бесселя

$$f(t)=\sum_{k=1}\frac{2f(t)J_0\left(q_k\frac{r}{R}\right)}{q_kJ_1(q_k)} \tag{35}$$

Тогда уравнение (26) с учетом (34) и (35) примет вид

$$\sum_{k=1}A_k'(t)J_0\left(q_k\frac{r}{R}\right)\exp\left(-q_k^2\frac{\nu}{R^2}t\right)=\sum_{k=1}\frac{2f(t)J_0\left(q_k\frac{r}{R}\right)}{q_kJ_1(q_k)} \tag{36}$$

Уравнение (36) существует при условии

$$A_k'(t)\exp\left(-q_k^2\frac{\nu}{R^2}t\right)=\frac{2f(t)}{q_kJ_1(q_k)}$$

откуда

$$A_k(t)=\frac{2}{q_kJ_1(q_k)}\int\limits_0^t f(t)\exp\left(q_k^2\frac{\nu}{R^2}t\right)dt=\frac{2[F(t)-F(0)]}{q_kJ_1(q_k)} \tag{37}$$

где

$$F(t)=\int f(t)\exp\left(q_k^2\frac{\nu}{R^2}t\right)dt$$

Таким образом, общее решение $v'(r,t)$, после подстановки значений U_1 и U_2, имеет вид

$$v'(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}J_0\left(q_k\frac{r}{R}\right)\left[b_k+\frac{2[F(t)-f(0)]}{q_kJ_1(q_k)}\right]\exp\left(-q_k^2\frac{\nu}{R^2}t\right) \tag{38}$$

Подставляя значение постоянного интегрирования из (38) в (22), окончательно для $v_2(z,r,t)$ получим выражение

$$v_2(z,r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\exp\left(-\frac{\gamma_k^2}{R\cdot R_e}z\right)\left[J_0\left(\gamma_k\frac{r}{R}\right)-\frac{2J_1(\gamma_k)}{\gamma_k}\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}J_0\left(q_k\frac{r}{R}\right)\left[b_k+\frac{2[F(t)-F(0)]}{q_kJ_1(q_k)}\right]\exp\left(-q_k^2\frac{\nu}{R^2}t\right) \tag{39}$$

Значение собственного числа задачи определяется из граничного условия при $R=r$, $v_2(z,r,t)=0$, тогда

$$J_0(\lambda_k)-\frac{2J_1(\lambda_k)}{\lambda_k}=0$$

или

$$J_2(\lambda_k)=0 \tag{40}$$

Следовательно, собственные числа задачи λ_k есть корни функции Бесселя первого рода второго порядка. Из краевого условия (8) и уравнения (39) имеем

$$\psi_1(r)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\left[J_0\left(\lambda_k\frac{r}{R}\right)-\frac{2J_1(\lambda_k)}{\lambda_k}\right] \tag{41}$$

где

$$\psi_1(r)=\psi(r)-\sum_{k=1}^{\infty}J_0\left(q_k\frac{r}{R}\right)\left[b_k-\frac{2F(0)}{q_kJ_1(q_k)}\right] \tag{42}$$

Из последнего равенства видно, что постоянные числа C_k являются коэффициентами разложения функции $\psi_1(r)$ в ряд Фурье-Бесселя.

Система нормализованных ортогональных функций, соответствующих собственным функциям с весом r, имеет вид

$$\Phi_k\left(\lambda_k\frac{r}{R}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\lambda_k}\left[1-\frac{J_0\left(\lambda_k\frac{r}{R}\right)}{J_0(\lambda_k)}\right] \tag{43}$$

Для определения значения коэффициентов C_k, обе части равенства (41) умножим на $\lambda_k\frac{r}{R}\Phi_k\left(\lambda_k\frac{r}{R}\right)$ и проинтегрируем по r, от 0 до R получим

$$C_k=\int_0^R\frac{\lambda_k}{R}2\sqrt{2}\left[1-\frac{J_0\left(\lambda_k\frac{r}{R}\right)}{J_0(\lambda_k)}\right]\psi_1(r)dr \tag{44}$$

Закон распределения давления вдоль оси трубы можно определить из уравнения (1), подставляя в нем значение $v_2(z,r,t)$.

Начальные и граничные условия при этом будут: $p=p_0$ при $z=0$, $t\geqslant 0$, $p=p$ при $z=z$, $t>0$.

Таким образом, получена расчетная формула распределения скоростей при нестационарном ламинарном движении на входном участке круглой цилиндрической трубы для общего случая, когда начальные и граничные условия имеют общий вид. Исходя из общего решения для заданного начального и граничного условия, можно получить решения частных задач, вычислив при этом соответствующие коэффициенты.

DEVELOPMENT OF LAMINAR NON-STEADY FLOWING OF UISCO US FLUID ON THE CIRCULAR CYLINDRICAL PIPE INLET PART

A. A. SARUKHANIAN

ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՀԵՂՈՒԿԻ ՉՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ԼԱՄԻՆԱՐ ՇԱՐԺՄԱՆ ԶԱՐԳԱՑՈՒՄԸ ԿԼՈՐ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ՄՈՒՏՔԱՄԱՍՈՒՄ

Ա. Ա. ՍԱՐՈՒԽԱՆՅԱՆ

Ամփոփում

Ձևակերպված է կլոր գլանային խողովակի մուտքի տեղամասում չհաստատված լամինար շարժման զարգացման խնդիրը։

Խնդրի լուծումը փնտրվում է երկու գումարի տեսքով։ Գումարելիներից մեկը հանդիսանում է համասեռ հավասարման լուծումը անհամասեռ եզրային պայմանների դեպքում, իսկ մյուսը՝ անհամասեռ հավասարման լուծումը համասեռ եզրային պայմանների դեպքում։

Ստացված են արագության փոփոխման օրինաչափությունները ինչպես մուտքի տեղամասի այնպես էլ շարժման կայունացված տեղամասերի համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Atabek H. B., Chang C. C.* Oscillatory flow near the entry of a circular tube — ZAMP, 1961, v. 12, № 3, p. 185—201.
2. *Atabek H. B., Chang C. C.* Measurement of laminar oscillatory flow in the inlet length of a circular tube. —Phys. Med. Biol., 1964, v. 9, № 2, p. 219—227.
3. *Акоста А.* Влияние нестационарности течения на измерение расхода на входе в трубу.—Тр. американского общ. инж. мех.—теоретические основы инж. расч. М., «Мир», 1976, №3, с. 341—342.
4. *Avula X. J. R.* Analysis of suddenly started laminar flow in the entrance region of a circular tube. —Appl. Sci. Res., 1969, v. 21, p. 248—259.
5. Ноблесс, Фарелл. Нестационарное неравномерное течение на начальном участке трубы.—Прикладная механика, 1973, №3, с. 30—36.
6. *Айнола Л. Я., Руустал Э. Л.* Развитие течения на входном участке круглой трубы при разгонном движении жидкости.—Тр. Таллинского политех. института.—Таллин, 1985, № 593, с. 95—107.

Ереванский политехнический институт

Поступила в редакцию 19.III.1990