

УДК 539.4

МОДЕЛЬ ДЕФОРМАТИВНОСТИ И ПРОЧНОСТИ
ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА С УЧЕТОМ
НЕПРЯМОЛИНЕЙНОСТИ ВОЛОКОН

СИМОНЯН А. М.

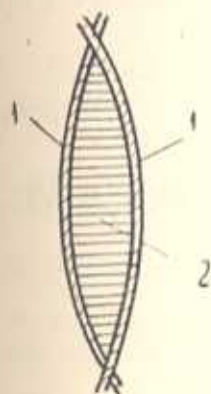
Строится модель деформирования и разрушения волокнистого композита. Принимается, что наполнитель представляет собой систему первоначально искривленных волокон, воспринимающих всю внешнюю нагрузку, при этом связующее препятствует выпрямлению волокон, содействуя вовлечению их в работу. Принимая, что количество волокон неограниченно велико, строятся детерминированные соотношения для описания деформативных и прочностных свойств композита на основе упругих и прочностных свойств волокон с учетом их разброса по стохастически заданной криволинейности, а также на основе упругих свойств связующего и его прочности из сдвиг.

Как известно, прочность однонаправленно-армированного композита вдоль волокон, зачастую, существенно ниже прочности наполнителя, и, следовательно, вопрос о повышении реализации прочности наполнителя в композите актуален. Согласно простейшему расчету, основанному на «законе смесей» у композита лишь 1—2,5% [1], от внешней растягивающей нагрузки воспринимается связующим, то есть вид связующего и технология отверждения или термообработки композита практически не влияют на долю нагрузки, воспринимаемой волокнами. Однако, как показывают эксперименты, технология изготовления композита существенно влияет на его упругие и прочностные свойства, причем влияние это имеет место не только за счет изменения пористости связующего и, следовательно, изменения фактического коэффициента армирования по объему.

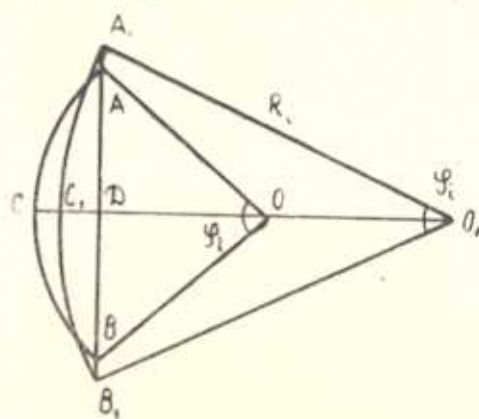
В настоящей работе природа сопротивления композита растяжению вдоль волокон представляется следующим образом. Принимается, что наполнитель представляет собой систему первоначально искривленных волокон [2], воспринимающих всю внешнюю нагрузку, при этом связующее препятствует выпрямлению волокон, содействуя вовлечению их в работу. После разрушения какого-либо волокна оно выключается из работы по некоторой длине, определяемой свойствами компонентов композита и их сцеплением. Принимая, что количество волокон в композите неограниченно велико, строятся детерминированные соотношения для описания деформативных и прочностных свойств композита на основе упругих и прочностных свойств волокон с учетом их разброса и стохастически заданной криволинейности, а также на основе упругих свойств связующего и его прочности на сдвиг.

1. Рассмотрим растягиваемый элемент (фиг. 1), состоящий из симметрично искривленных по дуге волокон наполнителя (1.1) с заполнением (2) из связующего. На фиг. 2 половина этого элемента показана до (ACBD) и после ($A_1 C_1 B_1 D_1$) деформации.

Для продольной деформации элемента ϵ имеет место следующее выражение:



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$\epsilon = \frac{AA_1 + BB_1}{AB} = \frac{R_i \sin \frac{\varphi_i}{2}}{R_i \sin \frac{\varphi_i}{2}} - 1 \quad (1.1)$$

Для деформации волокна ϵ_1 и деформации связующего ϵ_c очевидны следующие выражения:

$$\epsilon_1 = \frac{\widetilde{A_1 B_1} - \widetilde{AB}}{\widetilde{AB}} = \frac{R_i \varphi_i}{R_i \varphi_i} - 1$$

$$\epsilon_c = \frac{\widetilde{CD} - \widetilde{C_1 D_1}}{\widetilde{CD}} = \frac{R_i \sin^2 \frac{\varphi_i}{4}}{R_i \sin^2 \frac{\varphi_i}{4}} - 1 \quad (1.2)$$

Используя приближения для малых углов

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}; \quad \sin^2 x \approx x^2 - \frac{x^4}{3}$$

в применении к $\frac{\varphi_i}{2}$ и $\frac{\varphi_i}{4}$, получим следующее соотношение:

$$\epsilon_c = -\frac{12}{\varphi_i^2} (\epsilon - \epsilon_1) \quad (1.3)$$

Используя условие равновесия для волокна с диаметром

$$P_i = -\delta_i R_i \varepsilon_c \quad (1.4)$$

и принимая, что волокна и связующее деформируются упруго, получим

$$\varepsilon_i = \frac{4P_i}{\pi E_i \delta_i^2}; \quad \varepsilon_c = \frac{\varepsilon_c (1 - \nu_c^2)}{E_c} \quad (1.5)$$

где E_i , E_c и ν_c — модули упругости i -го волокна и связующего и коэффициент Пуассона связующего, соответственно.

Уравнение (3) переписывается так:

$$P_i \left(\frac{1 - \nu_c^2}{\delta_i R_i E_c} + \frac{48}{\pi \delta_i^2 E_i} \right) = \frac{12}{\pi \delta_i^2} \delta_i \quad (1.6)$$

Отметим, что φ_i однозначно определяется отношением разницы длин волокна l_i и элемента l к длине элемента, независимо от R_i .

$$\frac{h_i}{l} = \frac{l_i - l}{l} = \frac{R_i \varphi_i - 2R_i \sin \frac{\varphi_i}{2}}{2R_i \sin \frac{\varphi_i}{2}} \approx \frac{\varphi_i^2}{24}$$

что позволяет формулу (6) переписать так

$$P_i = \varepsilon \left(\frac{4}{\pi E_i \delta_i^2} + \frac{2h_i(1 - \nu_c^2)}{\delta_i R_i E_c} \right)^{-1} \quad (1.7)$$

Ясно, что формула (1.7) сохраняется и для случая элементов с несколькими волокнами.

2. Рассмотрим систему из параллельно соединенных элементов с некоторой длиной l при условии, что все эти элементы имеют одну и ту же кривизну ($R_i \equiv R$), при этом, как показано выше, могут быть моделированы элементы с произвольным $\frac{h_i}{l}$ с помощью подбора φ_i и длины полуволокна l_i . Естественно принять, что для деформационного поведения такой системы не важно, в каком соседстве друг с другом находятся волокна с тем или иным искривлением и они могут рассматриваться расположенными хаотически (фиг. 3).

Из условия равновесия такой системы имеем

$$\sum_N P_i = \sigma F_0 \quad (2.1)$$

где F_0 и σ — площадь поперечного сечения и среднее напряжение системы элементов, N — количество элементов. Положим, что можем пренебречь разбросом упругих свойств и сечений волокон ($E_i \equiv E_0$, $\delta_i \equiv \delta$). При подстановке в уравнение (2.1) соотношения (1.7) и при использовании очевидного $N F_0 = \psi F_0$, где ψ — коэффициент армирования по объему, получим

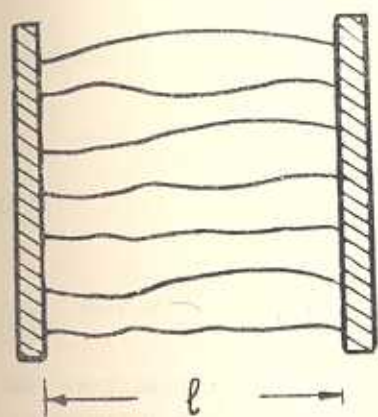
$$\sigma = \varepsilon \frac{\psi E_0}{N} \sum_N \left(1 + \frac{\pi \delta h_i (1 - \nu_c^2)}{2Rl} \frac{E_0}{E_c} \right)^{-1} \quad (2.2)$$

В предположении, что число элементов N неограниченно велико, из соотношения (2.2) получим

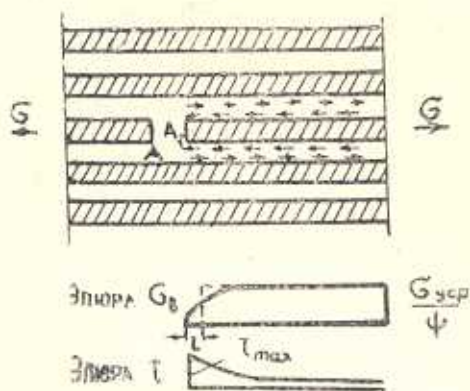
$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{2\psi RE_c}{\pi \delta} \int_0^{\infty} \rho \left(\frac{2RE_c x}{\pi \delta E_b (1 - \nu_c^2)} \right) \frac{dx}{1+x} \quad (2.3)$$

где ρ — плотность распределения $\frac{h_i}{l}$. Очевидно $\rho(y) \equiv 0$ при $y < 0$.

Соотношение (2.3) сохраняется для любой системы элементов по длине образца и, следовательно, описывает деформационные свойства однонаправленно-армированного композита вдоль волокна до начала разрушения волокон. Правая часть соотношения (2.3) представляет собой эффективное значение модуля упругости композита, зависящее от распределения $\frac{h_i}{l}$, определяющего криволинейность волокон, а также и от модуля упругости связующего, сопротивляющегося выпрямлению волокон.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

3. Как известно, после разрыва волокна в композите при удалении от точки разрыва волокно это оказывается нагруженным благодаря сопротивлению сдвигу связующего. Ниже, аналогично [3], приведем простейший расчет напряжений в волокне и в связующем в области разрыва. На фиг. 4 схематически показано волокно, разорванное в точке A_1 , причем до разрыва точки A и A_1 находились на одной вертикали. Перемещение точки A_1 вправо тормозится касательными напряжениями, передающимися через связующее. Принимая, что неразорванные волокна деформируются одинаково независимо от расстояния их от разорванного волокна, получим соотношение

$$u_n - u_{ср} = \Delta \gamma \quad (3.1)$$

где Δ — толщина прослойки связующего, u_n и $u_{ср}$ — перемещения точек разорванного волокна и неразорванных волокон, соответственно.

Дифференцируя уравнение (3.1) по z и используя очевидные соотношения

$$\frac{du_{\text{уср}}}{dz} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{E_k}, \quad \frac{du_n}{dz} = \frac{\sigma_n}{E_n}, \quad \gamma = \frac{\tau}{G_c}$$

получим

$$\frac{\sigma_n}{E_n} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{E_k} = \frac{\Delta}{G_c} \frac{d\tau}{dz} \quad (3.2)$$

Используя условие равновесия элемента волокна

$$\tau = \delta \frac{d\sigma_n}{dz} \quad (3.3)$$

а также очевидное условие $\frac{d\sigma_{\text{уср}}}{dz} = 0$, получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2\tau}{dz^2} - \gamma^2\tau = 0, \quad \gamma = \sqrt{\frac{G_c}{\Delta E_n \delta}} \quad (3.4)$$

Решая уравнения (3.4) и (3.3) при краевых условиях $\tau|_{z=0} = 0$,

$\sigma_n|_{z=0} = 0$, $\sigma_n|_{z=L} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi}$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} \left(1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{G_c}{\Delta E_n \delta}} z\right) \right) \\ \tau &= \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} \sqrt{\frac{G_c \delta}{\Delta E_n}} \exp\left(-\sqrt{\frac{G_c}{\Delta \delta E_n}} z\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

при этом

$$\tau_{\text{max}} = \tau|_{z=0} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} \sqrt{\frac{G_c \delta}{\Delta E_n}} \approx \sigma_{\text{уср}} \sqrt{\frac{G_c}{E_n}} \sqrt{\frac{1}{\phi(1-\phi)}} \quad (3.6)$$

формулы (3.5) и (3.6) имеют место в случае упругого поведения связующего. В случае же проявления пластических свойств значения напряжений τ будут меньшими, то есть если адгезионная прочность и прочность связующего на сдвиг превышает значение (3.6), то опасность распространения продольной трещины и ступенчатого выключения всего волокна из работы не имеет места. Заменим напряженное состояние волокна ступенчато-изменяющимся (на фиг. 4 показано штриховыми линиями) путем смещения напряжений вдоль волокна так, чтобы площадь эпюры напряжений была бы той же, что обеспечило бы адекватность вклада волокна в восприятие композитом внешней нагрузки. При этом длина условно ненагруженной части волокна L , которую будем считать длиной неэффективной части волокна, определится по формуле

$$L = \frac{\int_0^L \left(\frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} - \sigma_n(z) \right) dz}{\frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi}} = \sqrt{\frac{\delta \Delta E_n}{G_c}} \quad (3.7)$$

Дифференцируя уравнение (3.1) по z и используя очевидные соотношения

$$\frac{du_{\text{уср}}}{dz} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{E_k}, \quad \frac{du_n}{dz} = \frac{\sigma_n}{E_n}, \quad \gamma = \frac{\tau}{G_c}$$

получим

$$\frac{\sigma_n}{E_n} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{E_k} = \frac{\Delta}{G_c} \frac{d\tau}{dz} \quad (3.2)$$

Используя условие равновесия элемента волокна

$$\tau = \delta \frac{d\sigma_n}{dz} \quad (3.3)$$

а также очевидное условие $\frac{d\sigma_{\text{уср}}}{dz} = 0$, получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2\tau}{dz^2} - \eta^2\tau = 0, \quad \eta = \sqrt{\frac{G_c}{\Delta E_n \delta}} \quad (3.4)$$

Решая уравнения (3.4) и (3.3) при краевых условиях $\tau|_{z=0} = 0$,

$\sigma_n|_{z=0} = 0$, $\sigma_n|_{z=L} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi}$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} \left(1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{G_c}{\Delta E_n \delta}} z\right) \right) \\ \tau &= \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} \sqrt{\frac{G_c \delta}{\Delta E_n}} \exp\left(-\sqrt{\frac{G_c}{\Delta \delta E_n}} z\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

при этом

$$\tau_{\text{max}} = \tau|_{z=0} = \frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} \sqrt{\frac{G_c \delta}{\Delta E_n}} = \sigma_{\text{уср}} \sqrt{\frac{G_c}{E_n}} \sqrt{\frac{1}{\phi(1-\phi)}} \quad (3.6)$$

формулы (3.5) и (3.6) имеют место в случае упругого поведения связующего. В случае же проявления пластических свойств значения напряжений τ будут меньшими, то есть если адгезионная прочность и прочность связующего на сдвиг превышает значение (3.6), то опасность распространения продольной трещины и постепенного выключения всего волокна из работы не имеет места. Заменим напряженное состояние волокна ступенчато-изменяющимся (на фиг. 4 показано штриховыми линиями) путем смещения напряжений вдоль волокна так, чтобы площадь эпюры напряжений была бы той же, что обеспечило бы адекватность вклада волокна в восприятии композитом внешней нагрузки. При этом длина условно ненагруженной части волокна L , которую будем считать длиной неэффективной части волокна, определится по формуле

$$L = \frac{\int_0^L \left(\frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi} - \sigma_n(z) \right) dz}{\frac{\sigma_{\text{уср}}}{\phi}} = \sqrt{\frac{\delta \Delta E_n}{G_c}} \quad (3.7)$$

4. Рассмотрим теперь процесс разрушения композита. Образец из композита представим составленным из звеньев с длиной $2L$, каждое из которых представляет собой систему параллельно соединенных изогнутых волокон, находящихся в матрице связующего; при этом будем полагать, что разрыв волокна приводит к выключению его из работы в пределах звена, не влияя на его напряженное состояние вне пределов звена.

При этом для любого из звеньев соотношение (2.2) заменится следующим:

$$\sigma = \frac{\psi F_n}{N} \sum_i \left(1 + \frac{\pi \delta h_i (1 - \mu_c^2) E_n}{2Rl E_c} \right)^{-1} \quad (4.1)$$

где суммирование проводится по n элементам i , для которых выполняется условие

$$P_i \leq [\sigma_n] F_n$$

где $[\sigma_n]$ — прочность волокон, или, что то же,

$$\frac{h_i}{l} \geq 2 \left(\varepsilon - \frac{[\sigma_n]}{E_n} \right) \frac{RE_c}{\pi \delta [\sigma_n] (1 - \mu_c^2)} \quad (4.2)$$

Устремляя число N волокон к бесконечности, получим

$$\sigma = \varepsilon \frac{2RE_c \psi}{\pi \delta (1 - \mu_c^2)} \int_0^{\varepsilon} \rho \left(\frac{2RE_c x}{\pi \delta E_n (1 - \mu_c^2)} \right) \frac{dx}{1+x}, \quad \varepsilon < \frac{[\sigma_n]}{E_n} \quad (4.3)$$

$$\sigma = \varepsilon \frac{2RE_c \psi}{\pi \delta (1 - \mu_c^2)} \int_{\frac{E_n \varepsilon}{[\sigma_n]}}^{\varepsilon} \rho \left(\frac{2RE_c x}{\pi \delta E_n (1 - \mu_c^2)} \right) \frac{dx}{1+x}, \quad \varepsilon > \frac{[\sigma_n]}{E_n}$$

Эти соотношения описывают деформационное поведение композита для любого слоя, а следовательно, и для всего образца в целом, если прочность волокна $[\sigma_n]$ детерминирована, то есть можно пренебречь разбросом его экспериментальных значений или, что то же, прочность волокна не зависит от его длины. Разрушение композита будет иметь место при достижении деформации $\varepsilon_{\text{пред.}}$, при которой соблюдается условие $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0$, что соответствует условию

$$\int_{\frac{E_n \varepsilon_{\text{пред.}}}{[\sigma_n]}}^{\varepsilon_{\text{пред.}}} \rho \left(\frac{2RE_c x}{(1 - \mu_c^2) \pi \delta E_n} \right) \frac{dx}{1+x} = \rho \left[\frac{2RE_c}{\pi \delta E_n (1 - \mu_c^2)} \left(\frac{E_n \varepsilon_{\text{пред.}}}{[\sigma_n]} - 1 \right) \right] \quad (4.4)$$

Значение прочности композита σ_k определяется по формуле

$$\sigma_k = \varepsilon_{\text{пред.}} \frac{2RE_c \psi}{\pi \delta (1 - \mu_c^2)} \rho \left[\frac{2RE_c}{\pi \delta E_n (1 - \mu_c^2)} \left(\frac{E_n \varepsilon_{\text{пред.}}}{[\sigma_n]} - 1 \right) \right] \quad (4.5)$$

где $\varepsilon_{\text{сред.}}$ удовлетворяет условию (4.4).

Положим, что прочность волокна имеет разброс. Пусть $g_l(|z|)$ — плотность распределения прочности волокна, имеющего некоторую длину l . Аналогично [3], можно сказать, что плотность распределения прочности волокна с длиной $2L$ определится по формуле

$$g_{2L}(|z|) = \frac{2L}{l} g_l(|z|) \int_{|z|}^{\infty} g_l(x) dx \frac{2L}{l}^{-1} \quad (4.6)$$

Условие (4.2) теперь может рассматриваться лишь в вероятностном аспекте. Можно сказать, что плотность распределения правой части

(4.2) $y = \frac{2RE_c}{\pi^2 \sigma_n [(1-\nu_c^2)]} \left(z - \frac{|z_n|}{E_n} \right)$ определится по формуле

$$f_{2L}(y, z) = \frac{2RE_c z}{\pi^2 \left(\frac{2RE_c}{\pi^2 E_n (1-\nu_c^2)} + y \right)^2 (1-\nu_c^2)} g_{2L} \left(\frac{E_n z}{1 + y(1-\nu_c^2) \frac{\pi^2 E_n}{2RE_c}} \right) \quad (4.7)$$

Основное соотношение (4.1) запишется так:

$$\sigma = \psi E_n \varepsilon \int_0^{\infty} \frac{\rho(x)}{1 + \frac{\pi^2 E_n (1-\nu_c^2) x}{2RE_c}} \int_0^x f_{2L}(y, z) dy dx \quad (4.8)$$

Формула (4.8) описывает деформационные свойства при растяжении вдоль волокон однонаправленно-армированного композита вплоть до разрушения в зависимости от упругих свойств наполнителя и связующего, разброса в прочности волокна, определяемой плотностью распределения $g_{2L}(|z|)$, от криволинейности волокон, определяемой плотностью распределения $\rho\left(\frac{h}{l}\right)$ и от длины L неэффективной части волокна. Прочность композита может быть определена по формуле (4.8), где вместо ε подставляется значение его, соответствующее выполнению условия $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0$. При этом, естественно, адгезионная прочность

соединения волокна со связующим должна превосходить значение (3.6).

5. Полученные результаты позволяют сделать некоторые рекомендации по изготовлению композита. Использование связующего с высоким модулем упругости на сжатие приводит к более равномерному вовлечению волокон в работу при растяжении и, как это вытекает из формулы (2.2), к повышению модуля упругости и прочности композита. С другой стороны, у высокомодульного связующего обычно велик и модуль сдвига, что приводит к увеличению касательного напряжения (3.6) в окрестности разорванного волокна, что угрожает распространению трещины параллельной армированию. Таким образом, использование более жесткого связующего имеет смысл при обеспечении достаточно высокой адгезионной прочности и прочности связующего на

сдвиг. Как вытекает из формулы (3.6), уменьшение касательных напряжений τ_{\max} может быть достигнуто также увеличением модуля упругости наполнителя E_2 или приближением коэффициента армирования ψ к 0,5. При этом, однако, согласно формуле (3.7), увеличивается длина неэффективной части L , что, как это видно из формулы (4.6), приводит к смещению $g_{21}(\{z\})$, а следовательно, и $\tau_{22}(y, z)$, согласно (4.7), влево. Чем меньше разброс данных о прочности волокон, тем меньше влияние L на деформационные и прочностные свойства композита.

Если модули упругости y связующего относительно невелики, то, вследствие относительно высоких значений L важно иметь наполнитель по возможности однородный по длине, например, в виде волокон большого диаметра, при этом опасность возникновения трещины вдоль волокна незначительна.

Плотность распределения непрямолинейности $\rho\left(\frac{h}{l}\right)$ может регулироваться шириной натягиваемой ленты; на него влияет также и усилие натяга при намотке или укладке. Прессование, естественно, на функцию $\rho\left(\frac{h}{l}\right)$ не влияет. Практическое определение $\rho\left(\frac{h}{l}\right)$ соответственно тому или иному технологическому режиму, вообще говоря, затруднительно, но может быть осуществлено с помощью местного выжигания композита и определения свободных поперечных перемещений волокон на выжженной длине. Определение $g_{21}(\{z\})$ может быть осуществлено на основе гистограммы прочности, построенной на образцах волокон или групп волокон с длиной l .

STRAIN AND STRENGTH MODEL OF FIBROUS COMPOSITS TAKING ACCOUNT CURVATURE OF FILAMENTS

A. M. SIMONIAN

ԹԵԼԻԿԱՅԻՆ ԿՈՄՊՈԶԻՏԻ ԳԵՅՈՐԿԱՅՄԱՆ ԵՎ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ՄՈԴԵԼԸ
ԹԵԼԻԿՆԵՐԻ ՈՉ ՈՒՂՂԱԳԾԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆԻԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Կառուցվում է թելիկային կոմպոզիտի ղեֆորմացման և բալրայման մոդելը: Ընդունվում է, որ լցանյութը սկզբնապես ծոված թելիկների համակարգ է, որն ընդունում է ամբողջ արտաքին բեռը, ընդ որում կապակցողի արդելակում է թելիկների ուղղմանը՝ օժանդակելով նրանց ներգրավմանը աշխատանքի մեջ: Ընդունելով, որ թելիկների քանակն անսահմանափակ մեծ է, կոմպոզիտի ղեֆորմատիվ և ամրային հատկությունների նկարագրման

Համար կառուցվում են որոշող անընթացություններ՝ թելիկների առաձգական և ամրային հատկությունների հիման վրա, հաշվի առնելով ստոխաստիկորեն արված կորագծով նրանց ցրվածությունը, ինչպես նաև կադակցողի առաձգական և սահքի ամրության հատկությունները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скудра А. М., Булавс Ф. Я.* Прочность армированных пластиков.—М.: Химия, 1982. 213 с.
2. *Гузв А. Н.* О континуальной теории композиционных материалов с мелкомасштабными искривлениями в структуре.—Докл. АН СССР. 1983, 268, №2, с. 307—313.
3. *Розен Б.* Механика упрочнения композиций. ст. Волокнистые композиционные материалы.—М.: Мир, 1967, с. 54—97.

СКТБ КМ АН Армени

Поступила в редакцию
6.IX.1989