ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 44, № 2, 1991 Механика

УДК 539.376

О ФИЗИКО-ВЕРОЯТНОСТНОМ ПОДХОДЕ К ПРОБЛЕМЕ ВЯЗКО-ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

АРУТЮНЯН Р. А., РОДИОНОВ А. Ф.

Предложен параметр повреждаемости, который определяется разрыхлением материала. Вероятностная трактовка последнего позволяет связать его с функцией надежности образца как системы. На основе этого параметра сформулирован общий критерий вязко-хрупкого разрушения. Дано сравнение с результатами длительных испытаний на разрушение образцов из полиметилметакрилата в условиях ползучести. В рамках модели обсуждаются также статистические аспекты проблемы длительного разрушения.

Параметр повреждаемости $0 \leqslant \omega \leqslant 1$ (или сплошности $\psi = 1-\omega$) Качанова—Работнова [1, 2] был введен в теорию ползучести для описания хрупких разрушений. При этом авторы не приписывали этому параметру явного физического содержания и рассматривали его как некоторую меру накопления различного рода дефектов. Другие авторы связывают параметр ω с разрыхлением (необратимым изменением плотности ρ) материала. Развивая это направление, будем считать $\omega = \omega(\rho)$, где $\rho = \rho(t)$.

С другой стороны, рассматривая процесс разрушения с позиций теории надежности, время до разрушения образца t_p, как системы, определяется следующей формулой [3]:

$$t_p = \int_0^\infty R(t)dt \tag{1}$$

где $R(t)$ — функция надежности, представляющая собой вероятность того, что к моменту времени t система не потеряет свою работоспособность. Учитывая и здесь физику явления, придем к зависимости $R = R(\rho)$, где $\rho = \rho(t)$. Таким образом, величина $R(\rho)$ — это вероятность того, что образец, как система, не разрушится при заданном уровне ρ. Аналогично этому можно предположить, что ω — это вероятность того, что образец разрушится при заданном уровне ρ. Поэтому R и ω являются вероятностями обратных событий, что означает

$$\omega(\rho) = 1 - R(\rho) \tag{2}$$

Чтобы получить конкретное аналитическое выражение для параметра ω, воспользуемся некоторыми свойствами функции $R(\rho)$. С этой целью примем предположения, согласующиеся с самим понятием вероятности как меры, определенной на некоторой системе подмножеств. Во-первых, предположим, что $R(\rho_0)=1$ (где ρ_0 — начальная плотность материала образца), то есть считается, что в начально-естественном состоянии материал надежен с вероятностью равной „единице". Во-вторых, примем, что выполняется свойство аддитивности: если $\rho=\rho_1+\rho_2$, то $R(\rho)=R(\rho_1+\rho_2)=R(\rho_1)+R(\rho_2)$. Из этих двух предположений сразу вытекает, что функция $R(\rho)$ является линейной и имеет вид:

$$R(\rho)=\frac{\rho}{\rho_0} \tag{3}$$

Из формулы (3) следует и другой естественный результат: $R=0$ при $\rho=0$, то есть при нулевой плотности образец разрушается с вероятностью „единица".

Рассматривая ползучесть цилиндрического стержня, растягиваемого заданной нагрузкой P, и вводя текущий коэффициент поперечной деформации $\nu=-\varepsilon_y/\varepsilon_x=-\varepsilon_z/\varepsilon_x$ ($\varepsilon_x=\ln l/l_0$ — продольная, ε_y, ε_z — поперечная деформация стержня, l_0 — начальная, l — текущая длина стержня), закон сохранения массы можно записать в виде [4], $\rho/\rho_0=\exp(-(1-2\nu)\varepsilon)$ (здесь и далее введено обозначение $\varepsilon=\varepsilon_x$). С учетом этой формулы имеем

$$R(t)=\exp[-(1-2\nu)\varepsilon] \tag{4}$$

Внося (4) в (2), получим

$$\omega=1-\exp[-(1-2\nu)\varepsilon] \tag{5}$$

Из (5) следует, что $\omega=0$ при $\varepsilon=0$. Формально из (5) следует также и другой результат: $\omega\to1$ при $\varepsilon\to\infty$. Хотя этот результат и согласуется с предположением Хоффа, однако достижение этого предела практически невозможно, так как образец разрушится значительно быстрее, не достигая нулевой плотности для поперечного сечения, и при ограниченной величине поперечной деформации.

Для функции надежности (4) интенсивность отказов $\lambda(t)$ вычисляется по формуле

$$\lambda(t)=-\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}=-\frac{d}{dt}\ln R(t)=\frac{d}{dt}[(1-2\nu)\varepsilon] \tag{6}$$

При $\nu=\mathrm{const}$ из (6) следует $\lambda(t)=(1-2\nu)\dot{\varepsilon}$, то есть интенсивность отказов пропорциональна скорости ползучести. Это положение согласуется с принятым в работах [5, 6] предположением $\lambda=a\dot{\varepsilon}$ ($a=\mathrm{const}$). В то же время, являясь более общей, формула (6) точнее описывает кинетику процесса разрушения.

Рассмотрим закон ползучести, описывающий все участки кривых ползучести. Согласно [2, 6] имеем

$$\varepsilon^n\dot{\varepsilon}=B\sigma^m(1-\omega)^{-k}=B\sigma_0^m e^{2m\nu\varepsilon}(1-\omega)^{-k}=B\sigma_0^m e^{[2m\nu+k(1-2\nu)]\varepsilon} \tag{7}$$

где B, m, n, k — постоянные (для упрощения расчетов далее считаем

n натуральным числом), $\sigma_0 = P/F_0$, F_0 — начальная площадь поперечного сечения образца.

Интегрируя уравнение (7) при условии $t=0$, $\varepsilon=0$, будем иметь приближенно:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2m\nu + (1-2\nu)k}\left\{-(n+1)!\ln\left[1 - \frac{(2m\nu + (1-2\nu)k)^{n+1} B\sigma_0^m t}{n!}\right]\right\}^{\frac{1}{n+1}} \tag{8}$$

Внося (8) в (4), получим выражение для функции надежности

$$R(t) = \begin{cases} \exp\left(-\alpha\left\{-(n+1)!\ln\left(1 - \frac{t}{t_*}\right)\right\}^{\frac{1}{n+1}}\right), & t < t_* \\ 0, & t > t_*, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$\alpha = \frac{1-2\nu}{2m\nu + (1-2\nu)k}, \quad t_* = \frac{n!}{B\sigma_0^m[2m\nu + (1-2\nu)k]^{n+1}}$$

Математическое ожидание срока службы или время до разрушения образца, как системы, определяется по формуле [3] и равно [6]

$$t_p = \int_0^{t_*} R(t)dt = \frac{n!}{B\sigma_0^m[2m\nu + (1-2\nu)(k+1)]^{n+1}} \tag{10}$$

Соотношение (10) следует рассматривать как критерий длительной прочности, связывающий напряжение с математическим ожиданием срока службы материала. Можно показать, что этот критерий описывает всю кривую длительной прочности, охватывая, как предельные, области вязкого и хрупкого разрушений. Чтобы иметь возможность сравнивать с известными критериями, примем далее $n=0$. Тогда при $\nu=1/2$ из (10) следует критерий вязкого разрушения Хоффа

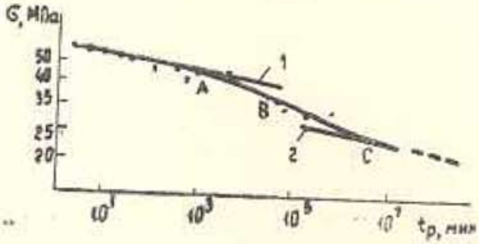
$$t_p = \frac{1}{mB\sigma_0^m} \tag{11}$$

Другой предельный случай—чисто хрупкое разрушение [4]—получим из (10) при $\nu=0$

$$t_p = \frac{1}{(k+1)B\sigma_0^m} \tag{12}$$

На практике критерий Хоффа хорошо работает в области относительно больших напряжений. На фиг. 1 в координатах $\ln\sigma_0 - \ln t_p$ этот критерий отмечен прямой линией 1. Критерий хрупкого разрушения (12) изображен на этой фигуре прямой 2, параллельной 1.

Общий критерий (10) представлен на фиг. 1 кривой ABC, расположенной между прямыми 1 и 2. При больших напряжениях эта кривая асимптотически приближается к критерию Хоффа, при малых напряжениях асимптотой служит критерий (12). Пунктирной линией указана область возможного прогнозирования работоспособности материала. Точками на фигуре отмечены результаты опытов продолжительностью от нескольких минут до пяти лет образцов из полиметилметакрилата в условиях ползучести. При построении теоретической кривой длительной прочности были использованы следующие значения коэффициентов [7]: $m=17{,}2$, $B=3{,}6\cdot 10^{-32}$ $[\text{МПа}]^{-17{,}2}$ $[\text{мин}]^{-1}$, $k=160$, $n=0$, на участке ABC кривой длительной прочности принято $\nu=0{,}35$.



Фиг. 1.

В заключение обратим внимание на следующее обстоятельство. Нетрудно показать, что дисперсия времени до разрушения определяется следующей приближенной формулой:

$$Dt_p=2\int_0^\infty tR(t)dt-t_p^2=2t_*^2J-t_p^2 \qquad (13)$$

где

$$J=\int_0^\infty e^{-x}(1-e^{-x})\exp(-\nu[(n+1)!x]^{1/(n+1)})dx$$

Из (13) вытекают два важных следствия, касающихся статистических вопросов разрушения. В опытах наблюдается незначительный разброс значений времени до разрушения (а также других характеристик) в области вязких разрушений. Однако этот разброс становится значительным с переходом в область хрупких разрушений. Физическая картина здесь вполне ясна. В случае вязких разрушений определяющими являются процессы вязкого течения, которые локализуются в определенных плоскостях скольжения и придают процессу разрушения детерминированный характер. Этот вывод подтверждается теоретически. Действительно, при $\nu=1/2$ из (13) следует $Dt_p=0$.

В области хрупких разрушений статистика процесса определяется дефектной структурой, которая наводится в материал в процессе длительного нагружения. Наблюдаемый при этом значительный разброс величины времени до разрушения является следствием случайного характера распределения этих дефектов. Соответствующая величина дисперсии времени до разрушения следует из (13) при $\nu=0$, $\kappa\neq0$. При этом дисперсия определяется коэффициентом k, который был введен в уравнение теории ползучести вместе с параметром повреждаемости и поэтому является также характеристикой меры «охрупчивания» материала.

ABOUT PHYSICAL—PROBALICTIC APPROACH TO THE PROBLEM OF VISCOUS—BRITTLE DESTRUCTION

R. A. ARUTUNIAN, A. F. RODIONOV

ՄԱԾՈՒՑԻԿ-ՓԽՐՈՒՆ ՔԱՅՔԱՅՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՖԻԶԻԿԱ-ՀԱՎԱՆԱԿԱՆԱՅԻՆ ՄՈՏԵՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ռ. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ա. Ֆ. ՌՈԴԻՈՆՈՎ

Ամփոփում

Առաջարկված է վնասվածության պարամետր, որը որոշվում է նյութի փխրունացումով: Վերջինս հավանականային մեկնաբանությունը թույլ է տալիս նրան կապել նմուշի հուսալիության ֆունկցիայի հետ՝ որպես համակարգ: Այդ պարամետրի հիման վրա ձևակերպված է մածուցիկ-փխրուն քայքայման ընդհանուր հայտանիշ: Մոդելի շրջանակներում քննարկված են նաև երկարատև քայքայման խնդիրը՝ վիճակագրական տեսանկյունից:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения.—М.: Наука, 1974. 311 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций.—М.: Наука, 1966. 752 с.
3. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности.—М.: Наука, 1965. 524 с.
4. *Арутюнян Р. А.* О закономерностях разрыхления и разрушения в условиях ползучести// Теоретична и приложна механика.—София.—1986. XVII.—№3.—с. 76—79.
5. *Арутюнян Р. А.* Оценка надежности конструкционных сплавов в условиях высокотемпературной ползучести // Пробл. прочности.—1988. №3, с. 19—21.
6. *Арутюнян Р. А., Родионов А. Ф.* О вязком разрушении в условиях ползучести // Сб. Проблемы механики разрушения.—Калинин: Калин. гос. ун-тет.—1987. с. 9—13.
7. *Арутюнян Р. А.* О хрупком разрушении в условиях ползучести // Пробл. прочности.—1986. №11, с. 30—32.

Математико-механический факультет
Ленгосуниверситета

Поступила в редакцию
18.IV.1990