ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

Մեխանիկա 44, № 2, 1991 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЯМ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

ДАВТЯН А. Т.

Рассматривается устойчивость и колебания многослойной прямоугольной пластинки. Причем, в одном случае слои пластинки повернуты симметрично относительно срединной плоскости пластинки, а в другом—антисимметрично. В обоих случаях получена критическая сжимающая нагрузка и исследуется зависимость критической нагрузки от расположения слоев пластинки относительно друг друга.

Исследуются устойчивость и свободные колебания многослойной прямоугольной пластинки. Материал слоев один и тот же, ортотропный, слои повернуты друг относительно друга на некоторый угол. Причем, в одном случае они повернуты симметрично относительно срединной плоскости пластинки, а в другом—антисимметрично. Оба эти случая изучаются в отдельности.

1. В случае симметричного расположения слоев уравнение устойчивости пластинки при одностороннем сжатии будет

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}-P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{1.1}$$

где для моментов и изменений кривизны имеем

$$\begin{aligned} M_1&=D_{11}\varkappa_1+D_{12}\varkappa_2+D_{16}\varkappa_{12}\\ M_2&=D_{12}\varkappa_1+D_{22}\varkappa_2+D_{26}\varkappa_{12}\\ H&=D_{16}\varkappa_1+D_{26}\varkappa_2+D_{66}\varkappa_{12}\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\varkappa_1=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varkappa_2=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \varkappa_{12}=-2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{1.3}$$

Приведенные цилиндрические жесткости определяются, как [1]

$$\begin{aligned} D_{ij}&=\frac{2h^3}{3}\sum_{k=1}^{n}[k^3-(k-1)^3]B_{ij}^{(k)}\\ K_{ij}&=0\end{aligned} \tag{1.4}$$

где упругие коэффициенты каждого слоя выражаются через начальные характеристики материала следующим образом [2; 3]:

$$B_{11}^{(k)}=B_{11}\cos^4\varphi_k+2(B_{12}+2B_{66})\sin^2\varphi_k\cos^2\varphi_k+B_{22}\sin^4\varphi_k$$

$$B_{22}^{(k)}=B_{11}\sin^4\varphi_k+2(B_{12}+2B_{66})\sin^2\varphi_k\cos^2\varphi_k+B_{22}\cos^4\varphi_k$$

$$B_{12}^{(k)}=B_{12}+[B_{11}+B_{22}-2(B_{12}+2B_{66})]\sin^2\varphi_k\cos^2\varphi_k$$

$$B_{66}^{(k)} = B_{66} + [B_{11} + B_{22} - 2(B_{12} + 2B_{66})] \sin^2\varphi_k \cos^2\varphi_k$$

$$B_{16}^{(k)} = \frac{1}{2} [B_{22}\sin^2\varphi_k - B_{11}\cos^2\varphi_k + (B_{12}+2B_{66}) \cos 2\varphi_k] \sin 2\varphi_k \tag{1.5}$$

$$B_{26}^{(k)} = \frac{1}{2} [B_{22}\cos^2\varphi_k - B_{11}\sin^2\varphi_k - (B_{12} + 2B_{66}) \cos 2\varphi_k] \sin 2\varphi_k$$

Рассмотрим пластинку, все стороны которой свободно оперты

$$w=0 \quad M_1=0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad x=a \tag{1.6}$$

$$w=0 \quad M_2=0 \quad \text{при} \quad y=0 \quad y=b \tag{1.7}$$

Решение (1.1) ищем в виде следующих тригонометрических рядов, удовлетворяющих граничным условиям (1.6) и (1.7):

$$w=\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\lambda_m x \sin\mu_n y \tag{1.8}$$

$$M_1= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin\lambda_m x \sin\mu_n y$$

$$M_2= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin\lambda_m x \sin\mu_n y \tag{1.9}$$

$$H=\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn}\cos\lambda_m x \cos\mu_n y, \quad \lambda_m=\frac{m\pi}{a}; \quad \mu_n=\frac{n\pi}{b}$$

В [4] подобная задача решена другим методом—методом малого параметра.

При (1.8) и (1.9) все граничные условия удовлетворяются точно, однако, если исходить из (1.2) и (1.8), то соотношения (1.2) будет верны везде кроме границы.

Подставляя (1.8), (1.9) в (1.1)—(1.3), при этом учитывая, что

$$\sin\lambda_m x=\sum_{p=1}^{\infty} \gamma_{pm}\cos\lambda_p x$$

$$\cos\lambda_m x=\sum_{p=1}^{\infty} \delta_{pm}\sin\lambda_p x \tag{1.10}$$

$$\gamma_{pm}=\frac{2m[1-(-1)^{p+m}]}{\pi(m^2-p^2)}; \quad \delta_{pm}=\frac{2p[1-(-1)^{p+m}]}{\pi(p^2-m^2)}$$

в окончательном виде для a_{mn} получим

$$a_{pq}[(D_{11}\lambda_p^2+D_{12}\mu_q^2)\lambda_p^2 + (D_{12}\lambda_p^2 + D_{22}\mu_q^2)\mu_q^2 + 4D_{66}\lambda_p^2\mu_q^2 - P\lambda_p^2] =$$

$$= \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq p}}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq q}}^{\infty} 2a_{mn}\delta_{pm}\delta_{qn}\lambda_m\mu_q [D_{16}(\lambda_p^2+\lambda_m^2)+D_{26}(\mu_q^2+\mu_n^2)] \tag{1.11}$$

Критическую нагрузку получим, приравнивая определитель этой бесконечной системы нулю. Беря конечный определитель, относительно P получим алгебраическое уравнение. Значение критической нагрузки можно уточнить, повышая порядок определителя.

Рассмотрим четырехслойную пластинку из стеклотекстолита КАСТ-В, которая имеет следующие упругие постоянные:

$$E_1=21{,}5\ \text{ГПа};\quad E_2=12{,}3\ \text{ГПа}$$

$$G=2{,}07\ \text{ГПа};\quad \nu_1=0{,}19;\quad \nu_2=0{,}11 \tag{1.12}$$

Так как упругие свойства материала пластинки в ее плоскости в различных направлениях разные, то значение критической нагрузки будет различным в зависимости от расположения слоев.

Поэтому можно найти те положения слоев пластинки, при которых критическая нагрузка будет наибольшей.

Таблица 1

$$\overline{P}=\frac{Pb^2}{\pi^2 D_{11}^0}$$

	0	15	30	45	60	75	90
0	2,918 2,918	2,938 2,937	2,975 2,976	2,980 2,981	2,934 2,935	2,868 2,866	2,835 2,835
15	3,027 3,063	3,033 3,084	3,064 3,112	3,073 3,127	3,035 3,080	2,970 3,012	2,939 2,980
30	3,254 3,327	3,260 3,349	3,250 3,348	3,298 3,391	3,262 3,344	3,195 3,276	3,167 3,245
45	3,314 3,364	3,324 3,385	3,352 3,423	3,361 3,429	3,325 3,382	3,259 3,313	3,228 3,282
60	2,995 3,012	3,036 3,058	3,259 3,289	3,072 3,101	3,035 3,055	2,943 2,987	2,936 2,954
75	2,556 2,560	2,574 2,581	2,610 2,691	2,617 2,624	2,581 2,584	2,505 2,509	2,475 2,477
90	2,337 2,337	2,354 2,357	2,391 2,392	2,399 2,401	2,351 2,354	2,286 2,286	2,254 2,254

В табл. 1 приведены значения безразмерной критической нагрузки $\overline{P}=\frac{Pb^2}{\pi^2 D_{11}^0}$ в зависимости от углов поворота слоев. Вычисления проводились во втором приближении для пластинки $\frac{a}{b}=0{,}7$. D_{11}^0 — жесткость пластинки при совпадении координатных систем, относительно которых рассчитываем жесткости.

В каждой клетке таблицы во вторых строках помещены $\overline{P}$, если формально принять $D_{16}D_{26}=0$.

Из таблицы видно, что:

а) наибольшая критическая нагрузка получается при $\varphi_1=\varphi_2=45°$, то есть фактический многослой превращается в один слой;

б) ортотропное решение (пренебрежение D_{16}) приводит к увеличению критической нагрузки.

2. В случае антисимметричного расположения слоев пластинки, помимо моментов, в срединной плоскости появляются также тангенциальные усилия [1], то есть пластинка претерпевает изгиб и плоскую деформацию. Поэтому, здесь уравнение устойчивости (1.1) должно быть дополнено еще системой

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial T_2}{\partial y}+\frac{\partial S}{\partial x}=0 \tag{2.1}$$

Усилия и моменты выражаются формулами:

$$T_1=C_{11}\varepsilon_1+C_{12}\varepsilon_2+K_{16}\chi_{12}, \quad T_2=C_{12}\varepsilon_1+C_{22}\varepsilon_2+K_{26}\chi_{12}$$
$$S=C_{66}\omega+K_{16}\chi_1+K_{26}\chi_2 \tag{2.2}$$

$$M_1=D_{11}\chi_1+D_{12}\chi_2+K_{16}\omega, \quad M_2=D_{12}\chi_1+D_{22}\chi_2+K_{26}\omega$$
$$H=D_{66}\chi_{12}+K_{16}\varepsilon_1+K_{26}\varepsilon_2 \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2=\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \omega=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.4}$$

$$K_{ij}=h^2\sum_{k=1}^{n}[k^2-(k-1)^2]B_{ij}^{(k)}, \quad C_{ij}=2h\sum_{k=1}^{n}B_{ij}^{(k)} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.2)—(2.5) в (1.1) и (2.1), получим

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(C_{12}+C_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+C_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3K_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-K_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}=0$$

$$C_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(C_{12}+C_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-3K_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-K_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+K_{16}\left(3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)-$$
$$-K_{26}\left(3\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{2.6}$$

Решение системы (2.6) ищем в виде

$$u=f\sin\lambda_m\cos\mu_n y, \quad v=\varphi\cos\lambda_m\sin\mu_n y, \quad w=\psi\sin\lambda_m\sin\mu_n y \tag{2.7}$$

удовлетворяющем граничным условиям

$$u=S=0 \quad \text{при} \quad x=0; \quad x=a$$
$$v=S=0 \quad \text{при} \quad y=0; \quad y=b \tag{2.8}$$

После подстановки (2.7) в (2.6), получим систему алгебраических уравнений относительно $f; \varphi; \psi$. Приравнивая определитель этой ситемы нулю, для сжимающего усилия получим следующее выражение:

$$\frac{Pb^2}{\pi^2 D_{11}^0}=\frac{1}{D_{11}^0}\left[\frac{m^2}{c^2}D_{11}+2(D_{12}+2D_{66})+D_{22}\frac{c^2}{m^2}-\right.$$

$$-\frac{\left(C_{11}\frac{m^2}{c^2}C_{66}\right)\left(3K_{26}+K_{16}\frac{m^2}{c^2}\right)^2+\left(C_{66}\frac{m^2}{c^2}+C_{22}\right)\left(3K_{16}\frac{m^2}{c^2}+K_{26}\right)^2\frac{c^2}{m^2}}{\left(C_{11}\frac{m^2}{c^2}+C_{66}\right)\left(C_{66}\frac{m^2}{c^2}+C_{22}\right)-(C_{12}+C_{66})^2\frac{m^2}{c^2}}-$$

$$\left.-\frac{2(C_{12}+C_{66})\left(3K_{16}\frac{m^2}{c^2}+K_{26}\right)\left(3K_{26}+K_{16}\frac{m^2}{c^2}\right)}{\left(C_{11}\frac{m^2}{c^2}+C_{66}\right)\left(C_{66}\frac{m^2}{c^2}+C_{22}\right)-(C_{12}+C_{66})^2\frac{m^2}{c^2}}\right] \tag{2.9}$$

По формуле (2.9) критическая нагрузка определяется обычным образом: устанавливается число m для данного $c=\frac{a}{b}$, которое сообщает (2.9) минимальное значение ($n=1$).

Числовой пример для четырехслойной пластинки здесь рассмотрен для материала (1.12); $c=0,7$.

Таблица 2

$$\bar{P}=\frac{Pb^2}{\pi^2 D_{11}^0}$$

2 \ 1	0	15	30	45	60	75	90
0	2,918 2,918	2,923 2,938	2,958 2,976	2,966 2,981	2,918 2,935	2,859 2,866	2,835 2,835
15	2,703 3,063	2,929 3,084	2,926 3,122	2,939 3,127	2,968 3,080	2,910 3,012	2,859 2,980
30	3,164 3,327	3,181 3,349	3,041 3,348	3,064 3,391	3,129 3,344	3,002 3,276	3,043 3,245
45	3,231 3,364	3,201 3,385	3,220 3,423	2,850 3,429	3,284 3,382	3,156 3,313	3,155 3,282
60	2,862 3,012	2,853 3,058	3,111 3,289	2,868 3,301	2,789 3,055	2,783 2,987	2,832 2,954
75	2,501 2,560	2,504 2,581	2,525 2,619	2,489 2,624	2,417 2,584	2,380 2,509	2,439 2,477
90	2,337 2,337	2,345 2,357	2,370 2,392	2,386 2,401	2,340 2,354	2,281 2,286	2,254 2,254

В табл. 2 приведены значения критической нагрузки $\bar{P}=\frac{Pb^2}{\pi^2 D_{11}^0}$ и как в табл. 1, во вторых строках каждой клетки помещены $\bar{P}$ без учета плоской задачи на изгиб ($K_{16}=K_{26}=0$).

Как и в предыдущем пункте, ортотропное решение (пренебрежение K_{i6}) дает завышенное значение критической нагрузки. Аналогичный результат получен и в [5], но там пакет ортотропный—углы поворота слоев 0° или 90°.

3. Рассмотрим свободные колебания свободно опертой пластинки при симметричном расположении слоев. Уравнение колебаний будет:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}=\frac{\rho h}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

где моменты и изменения кривизны определяются из (1.2) и (1.3). Решение (3.1) ищем в виде

$$w=\sin\omega t\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\sin\lambda_m\sin\mu_n y \tag{3.2}$$

$$M_1=\sin\omega t\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\sin\lambda_m\sin\mu_n y$$

$$M_2=\sin\omega t\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{mn}\sin\lambda_m\sin\mu_n y \tag{3.3}$$

$$H=\sin\omega t\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}d_{mn}\cos\lambda_m\cos\mu_n y$$

удовлетворяющих условиям (1.6) и (1.7).

Подставляя (3.2), (3.3) в (1.2), (1.3) и (3.1), для a_{mn} аналогично 1-ому пункту получим:

$$a_{pq}\left[(D_{11}\lambda_p^2+D_{12}\mu_q^2)\lambda_p^2+(D_{12}\lambda_p^2+D_{22}\mu_q^2)\mu_q^2+4D_{66}\lambda_p^2\mu_q^2-\frac{\rho h}{g}\omega^2\right]=$$

$$=\sum_{\substack{m=1\\ m\neq p}}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq q}}^{\infty}2a_{mn}\delta_{pm}\delta_{qn}\lambda_m\mu_n\left[D_{16}(\lambda_p^2+\lambda_m^2)+D_{26}(\mu_q^2+\mu_n^2)\right] \tag{3.4}$$

Значение собственных частот получим, приравнивая определитель этой бесконечной системы нулю. Оно также будет зависеть от ориентаций слоев пластинки.

В табл. 3 приведено изменение безразмерной частоты основного тона $\left(\overline{\omega}^2=\frac{2\omega^2 b^4\rho h}{\pi^4 g D_{11}^0}\right)$ в зависимости от углов поворота слоев. Вычисления проводились во втором приближении для четырехслойной пластинки материала (1.12), $c=0.7$.

Во вторых строках табл. 3 помещены значения $(\overline{\omega}^2)$ при $D_{16}=D_{26}=0$.

Из таблицы видно, что как и при задаче устойчивости:

а) наибольшая частота собственных колебаний получается при $(\varphi_1=\varphi_2=45°)$;

б) ортотропное решение приводит к увеличению частот.

Таблица 3

$$\overline{\omega}^2 = \frac{2\omega^2 b^4 \rho h}{\pi^4 g D_{11}^0}$$

	0	15	30	45	60	75	90
0	11,908 11,908	11,990 11,993	12,147 12,152	12,168 12,172	11,978 11,979	11,693 11,694	11,564 11,564
15	12,388 12,517	13,517 13,698	12,552 12,735	12,583 12,755	12,423 12,575	11,638 11,782	12,027 12,159
30	13,340 13,584	13,370 13,672	13,342 13,658	13,534 13,[illegible]33	13,381 13,655	13,106 13,367	12,988 13,238
45	13,573 13,738	13,619 13,827	13,736 13,960	13,773 13,983	13,617 13,807	13,345 13,523	13,218 13,389
60	12,237 12,727	12,413 12,489	13,325 13,408	12,561 12,642	12,253 12,470	12,046 12,180	11,843 12,049
75	10,435 10,441	10,510 10,528	10,661 10,685	10,686 10,706	10,357 10,549	10,232 10,240	10,104 10,110
90	9,531 9,531	9,612 9,616	9,759 9,763	9,791 9,796	9,598 9,599	9,330 9,331	9,201 9,201

ON BUCKLING AND VIBRATION OF RESTANGULAR MULTILAYER ANISOTROPIC PLATES

A. T. DAVTIAN

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Թ. ԴԱՎԹՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում են բազմաշերտ ուղղանկյուն սալի կայունությունն ու տատանումները։ Ընդ որում, սալի շերտերը շրջված են սալի միջին հարթության նկատմամբ մի դեպքում սիմետրիկ, մյուս դեպքում՝ հակասիմետրիկ։ Երկու դեպքում էլ ստացվել է կրիտիկական սեղմող բեռը և ուսումնասիրվել է կրիտիկական ուժի կախումը սալի շերտերի՝ միմյանց նկատմամբ դասավորությունից։ Սալի ազատ տատանումները դիտարկվում են շերտերի սիմետրիկ դասավորության դեպքում։ Ստացված է տատանումների սեփական հաճախականության կախումը սալի շերտերի՝ միմյանց նկատմամբ պտույտի անկյունից։ Բերված են թվային օրինակներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мовсисян Л. А.* Некоторые задачи вязкоупругих анизотропных слоистых пластин и оболочек.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1989, т. 42, №3, с. 37—44.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек.—М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
3. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки.—М.: Гостехтеориздат, 1957. 464 с.
4. *Мовсисян Л. А., Саркисян В. С.* Об одном способе определения критических нагрузок анизотропных пластинок.—Изв. АН СССР. Инженерный журнал, 1965, т. 5, вып. 4.
5. *Джонс Р. М.* Устойчивость и колебания прямоугольных несимметричных слоистых пластинок с перекрестным армированием.—Ракетная техника и космонавтика, 1973, т. 11, №12, с. 32—40.

Кафанский учебно-консультационный пункт ЕрПИ

Поступила в редакцию
1.XII.1989