

УДК 539.6

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗРЯДНЫХ ТОКОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦАХ

АРЕШЯН Г.Л., ВАНЦЯН А.А., ПИЛИПОСЯН Г.Т.

Получены аналитические выражения для плотности и полного тока в зависимости от времени разряда конденсатора через металлический цилиндр. Аналитические решения выявляют затухающий характер колебательного процесса и позволяют с большой точностью рассчитывать скин-слой, а также вычислить силу Лоренца. Теоретические результаты подтверждены экспериментально.

Результаты теоретических и экспериментальных исследований позволяют определить поля напряжений в цилиндрических телах, находящихся под импульсным воздействием электрического разрядного тока. Появляется также возможность рассчитывать температурные поля.

Изучению влияния разрядных токов на разные физические явления, в том числе и на процесс проникания тонких твердых тел в металлические среды, посвящен ряд работ [1-6 и др.].

В этих работах показано, что разрядный ток по направлению проникания приводит к значительному увеличению силы сопротивления, действующей на проникающее тело. В [1] показано, что лоренцова сила, сжимающая среду вокруг оси проникания, значительна и надо ее учитывать.

Для теоретической оценки пинч-эффекта разрядного тока необходимо знать распределение тока внутри образца как по радиальной координате, так и по времени.

**1. Теоретическая модель.** Используются цилиндрические координаты. Ось  $z$  совмещена с геометрической осью цилиндрического проводника. Начало координат совмещено с центром одного торцевого сечения цилиндрического проводника радиуса  $r_0$  и длины  $l$ .

Ввиду симметрии вектор плотности тока  $\vec{\delta}(r, t)$  имеет только  $z$  составляющую ( $\delta_r = 0$ ,  $\delta_\varphi = 0$ ,  $\delta_z = \delta$ ). Причем,  $\partial\delta/\partial\varphi = 0$ . Пренебрегая торцевыми эффектами и рассматривая одномерную задачу, принимается, что  $\partial\delta/\partial z = 0$ .

На основе уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}, \vec{E} = \rho \vec{\delta}, \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \gamma = \rho^{-1} \quad (1.1)$$

пренебрегая токами смещения, в одномерном случае исключая из (1.1)  $\vec{H}$ , получим уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} - \mu \mu_0 \gamma \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

При получении уравнения (1.2) принято, что  $\mu, \epsilon, \gamma$ —постоянные.

Уравнение (1.2) с учетом (1.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta}{\partial r} - \mu \mu_0 \gamma \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

Переходя к переменным в комплексной плоскости Лапласа

$$\delta(r, p) = \int_0^{\infty} \delta(r, t) e^{-pt} dt$$

с учетом того, что  $\delta(r, 0) = 0$ , из (1.3) можно получить

$$\frac{\partial^2 \delta(r, p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta(r, p)}{\partial r} - p \mu \mu_0 \gamma \delta(r, p) = 0 \quad (1.4)$$

где  $p = \alpha + i\beta$ —комплексный параметр.

Введя обозначение

$$a^2 = -p \mu \mu_0 \gamma$$

решение (1.4) можно представить в виде

$$\delta(r, p) = C_1 J_0(ar) + C_2 Y_0(ar)$$

где  $J_0(a, r)$  и  $Y_0(a, r)$ —функции Бесселя первого и второго родов.

Так как при  $r = 0$  плотность тока должна быть конечной, то  $C_2 = 0$  и решение (1.4) примет вид

$$\delta(r, p) = C_1 J_0(ar), E(r, p) = C_1 \rho J_0(ar) \quad (1.5)$$

С учетом того, что  $H(r, t) = 0$  при  $t = 0$ , из системы (1.1) следует

$$\frac{\partial E(r, p)}{\partial r} = p \mu \mu_0 H(r, p), H(r, p) = \frac{C_1 \rho}{p \mu \mu_0} \frac{\partial J_0(ar)}{\partial r}$$

или с учетом свойств бесселевых функций для напряженности магнитного поля можно записать

$$H(r, p) = \frac{C_1}{a} J_1(ar) \quad (1.6)$$

Полный ток через проводник радиусом  $r_0$  можно записать в виде

$$I(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \delta(r, t) r dr d\varphi = 2\pi C_1 \int_0^{r_0} \delta(r, t) r dr$$

или в операторной форме

$$I(p) = 2\pi \int_0^{r_0} \delta(r, p) r dr = 2\pi C_1 \int_0^{r_0} J_0(ar) r dr$$

Интегрируя, получим

$$I(p) = \frac{2\pi r_0 C_1}{a} J_1(ar_0) \quad (1.7)$$

Операторное сопротивление проводника длиной  $l$  с учетом (1.5) и (1.7) следует записать в виде  $[u(r_0, p) = lE(r_0, p)]$

$$z(p) = \frac{u(r_0, p)}{I(p)} = \frac{l\rho a J_0(ar_0)}{2\pi r_0 J_1(ar_0)} \quad (1.8)$$

или

$$z(p) = R \frac{\lambda J_0(\lambda)}{2J_1(\lambda)}, \quad R = \frac{\rho l}{\pi r_0^2}, \quad \lambda = i\sqrt{\mu\mu_0\gamma p} r_0 \quad (1.9)$$

где  $R$ —активное сопротивление цилиндрического проводника постоянному току.

Если конденсатор емкостью  $C$  и начальным напряжением  $u_0$  разряжается на сопротивление  $z(p)$ , то можно записать соотношение

$$u(p) = \frac{u_0}{p} - \frac{1}{pC} I(p)$$

или, с учетом (1.8)

$$\left[ \frac{1}{pC} + z(p) \right] I(p) = \frac{u_0}{p}$$

откуда, учитывая (1.9), следует

$$I(p) = \frac{C u_0}{1 + pRC \frac{\lambda J_0(\lambda)}{2J_1(\lambda)}} \quad (1.10)$$

Для полного тока можно записать

$$I(t) = \frac{u_0}{R} L^{-1} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{RC} + p \frac{\lambda J_0(\lambda)}{2J_1(\lambda)}} \right\} \quad (1.11)$$

где  $L^{-1}$ —обратное преобразование Лапласа.

Используя (1.5), (1.7) и исключив постоянную  $C_1$ , после введения обозначения  $\tilde{r} = r/r_0$  с учетом (1.9) и (1.10) для плотности тока будем иметь

$$\delta(r, p) = \frac{C u_0}{\pi r_0^2} \frac{\lambda J_0(\lambda \tilde{r}) / 2J_1(\lambda)}{1 + pRC \lambda J_0(\lambda) / 2J_1(\lambda)}$$

Переходя к переменной  $t$ , для полного тока и плотности тока получим соответственно

$$I(t) = \frac{u_0}{2\pi Ri} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{pt}}{\frac{1}{RC} + p \frac{\lambda J_0(\lambda)}{2J_1(\lambda)}} dp \quad (1.12)$$



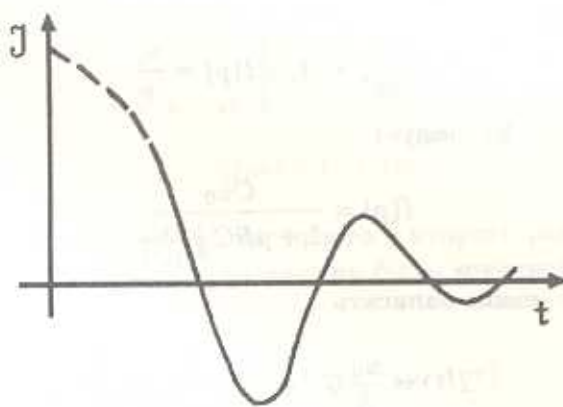
$$\delta(r, t) = \frac{u_0}{2\pi R r_0^2} \frac{1}{\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\frac{\lambda J_0(\lambda \tilde{r})}{2J_1(\lambda)} e^{pt}}{\frac{1}{RC} + p \frac{\lambda J_0(\lambda)}{2J_1(\lambda)}} dp \quad (1.13)$$

Анализ подынтегрального выражения (1.13) в случае  $\tilde{r} \rightarrow 0$  крайне затруднителен, так как аргумент бesselевых функций  $\lambda = i\sqrt{\mu\mu_0\gamma p} r_0$  включает комплексную переменную  $p$ , которая в процессе интегрирования пробегает значения  $-i\infty \leq p \leq +i\infty$ . Это обстоятельство не дает возможности разложить в асимптотические ряды функции  $J_1(\lambda)$  и  $J_0(\lambda)$  для любых значений  $\lambda$ . Для малых аргументов можно показать, что подынтегральное выражение приводится к виду

$$\frac{Ae^{pt}}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

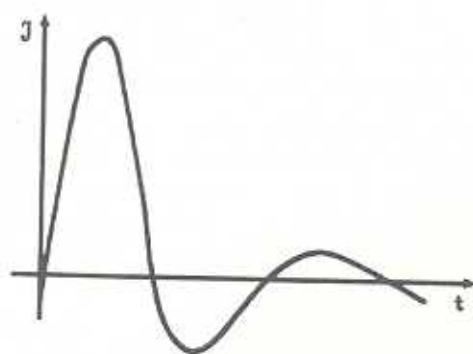
где  $\omega_0^2 = \frac{16}{5} \frac{1}{RC\mu\mu_0\gamma r_0}$ ,  $\xi = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{16} \frac{1}{RC\mu\mu_0\gamma r_0^2}}}$ . В этом случае зависимость  $\delta(t)$  для  $\tilde{r} \Rightarrow 0$  представлена на фиг.2, что подтверждается численными расчетами.

Интегралы (1.12) и (1.13) вычислены численно. Результаты численных расчетов для интеграла (1.12) приведены на фиг.1, рядом, на фиг.2 приведена осциллограмма для полного тока.

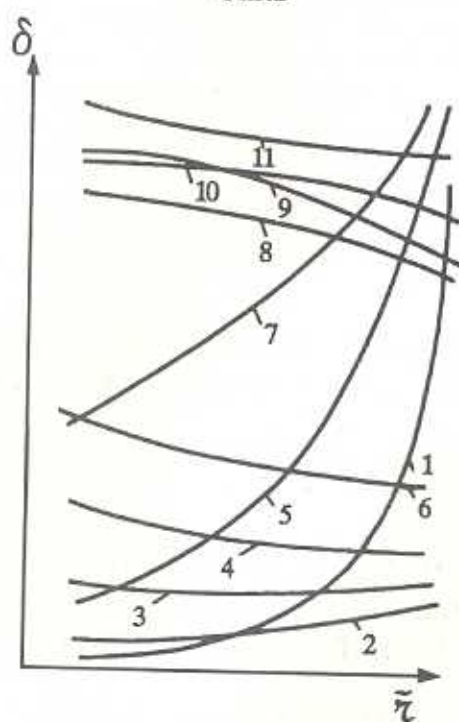


Фиг. 1.

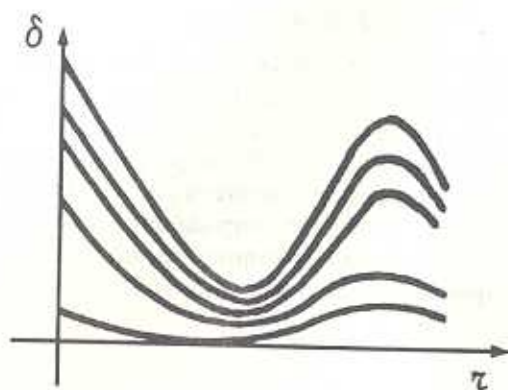
**2. Экспериментальные исследования.** Как видно из фиг.1 и 2, численные результаты отличаются от экспериментальных данных лишь в начальной стадии. Численные значения интеграла (1.13) приведены на фиг.3. При малых сопротивлениях цепи  $R \sim 10^{-9} \div 10^{-7}$  ом (кривые 1,5,7, фиг.3) преобладают поверхностные токи, при этом  $C = 6 \cdot 10^{-2}$  Ф. С увеличением сопротивления цепи до  $\sim 6 \cdot 10^{-6}$  ом со временем токи стремятся к оси цилиндра (кривые 4,9,11). При  $t \sim 2 \cdot 10^{-3} \div 4 \cdot 10^{-2}$  осевые токи становятся преобладающими



Фиг.2



Фиг.3



Фиг.4

(кривые 6,10). В [3] были проведены эксперименты по определению распределения плотности тока внутри цилиндрического металлического образца. Замеры разностей потенциалов между двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра, проводились методом зондирования на разном расстоянии от оси. На фиг.4 показаны результаты замеров для плотности тока в зависимости от  $r$ . Измерения проводились на двухлучевых запоминающих осциллографах С8-17. Одновременное наличие приосевых и приповерхностных токов на осциллограмме объясняется тем, что каналы у осциллографа работают независимо друг от друга и зафиксировали значения напряжения в разных точках для разных времен.

Таким образом, подробное изучение результатов численных расчетов (которые из-за громоздкости не приводятся) и экспериментальных данных показывают, что при разряде конденсатора по цилиндрическому короткому проводнику для плотности тока имеет место колебательный процесс как по координате  $r$ , так и по времени. Если учесть, что при прохождении тока на заряд действует лоренцова сила, то можно сказать, что для времен  $\sim 10^{-9} \div 10^{-7}$  сек в приповерхностном слое образуется ударная волна, сходящаяся к оси. Для времен  $\sim 10^{-6} \div 10^{-4}$  амплитуда волны имеет максимальное значение на оси цилиндра. Таким образом, имеет место обратный скин-эффект.

Авторы выражают благодарность Г.Е.Багдасаряну.

## THEORETICAL AND EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF DISCHARGE CURRENTS DISTRIBUTION IN CYLINDRICAL SPACEMENS

ARESHIAN G.L., VANTSIAN A.A., PILIPOSIAN G.T.

### ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՆՄՈՒՇՆԵՐՈՒՄ ՊԱՐՊՄԱՆ ՀՈՍԱՆՔՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՏԵՍԱԿԱՆ ԵՎ ՓՈՐՉՆԱԿԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Գ.Լ. ԱՐԵՇՅԱՆ, Ա.Ա. ՎԱՆՅՅԱՆ, Գ.Տ. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ

#### Ա մ փ ո փ ու մ

Ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ խտության եւ լրիվ հոսանքի համար, կախված մետաղական գլանով կոնդենսատորի պարպման ժամանակից: Անալիտիկ լուծումները բացահայտում են տատանողական պրոցեսի մարող բնույթը եւ թույլ են տալիս մեծ ճշտությամբ հաշվել սկին-շերտը, ինչպես նաեւ Լորենցի ուժը: Տեսական արդյունքները հաստատված են փորձով:

Տեսական եւ փորձնական հետազոտությունների արդյունքները թույլ են տալիս էլեկտրական պարպման հոսանքի ազդեցության տակ գտնելով գլանային մարմիններում որոշել լարումների դաշտը: Հնարավոր է դառնում նաեւ հաշվել ջերմաստիճանային դաշտերը:

## ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Ванцян А.А. Влияние разрядных токов на динамические процессы в металлических образцах.—В сб. Проблемы динамики взаимодействия деформированных сред. Ереван, 1984.
2. Багдоев А.Г., Ванцян А.А. Проникание тонких тел в металлы.—Изв.АН СССР, МТТ, 1982, но.2.
3. Багдоев А.Г., Ванцян А.А., Пахалов В.В. Определение распределения токов и упругих полей при импульсном разряде в металлах.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1986, т.39, но.1.
4. Багдоев А.Г., Ванцян А.А. Влияние разрядных токов на механические явления в металлических образцах.—Изв. АН СССР, МТТ, 1988, но.3.
5. Сагомонян А.Я. Динамика пробивания преград.— М.: Изд. МГУ, 1988.
6. В сб. Врывающиеся проволочки, Москва, 1963.

*Институт механики АН Армении*

*Поступила в редакцию*

*17. V.1990*