ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ
Մեխանիկա 44, № 1, 1991 Механика

УДК 534.222

ОТРАЖЕНИЕ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНЫ ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ СРЕДЫ

БАГДОЕВ А.Г., ШЕКОЯН А.В.

Изучено отражение пучка с гауссовским профилем от свободной поверхности среды. Предполагается, что среда изотропная, однородная, предварительно деформированная, нелинейная. В отношении, связывающем тензоры напряжений и деформации, учитываются временные производные первого порядка тензора напряжений и временные производные третьего порядка включительно тензора деформации. Для замороженных и равновесных случаев выведены несвязанные уравнения для квазипродольных падающих и отраженных волн. В приближении узких пучков получены аналитические решения.

1. Постановка задачи. Пусть имеется предварительно деформированная нелинейная реологическая полубесконечная изотропная однородная среда, которая имеет вязкость с внутренними осцилляциями. На достаточно большой глубине генерируется возмущение, которое направлено снизу вверх. Цель данной статьи— выяснить как это возмущение распространяется и отражается от свободной поверхности.

Уравнение движения среды и связи между тензорами напряжений, деформаций и компонентами вектора смещения имеют следующий вид:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k},\ u_i^*=u_i^0+u_i \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ik}+a_1\delta_{ik}\dot\sigma_{ll}+a_2\dot\sigma_{ik}+a_2\dot\sigma_{ki}=\lambda\delta_{ik}\varepsilon_{ll}+2\mu\varepsilon_{ik}+\frac{A}{4}\Big[e_{li}(e_{lk}+e_{kl})+e_{kl}(e_{li}+e_{il})\Big]+$$
$$+\frac{B}{2}\Big[e_{lm}(e_{lm}+e_{ml})\delta_{ik}+2e_{ll}(e_{ki}+e_{ik})\Big]+Ce_{ll}^2\delta_{ik}+b_1\dot\varepsilon_{ll}\delta_{ik}+2b_2\dot\varepsilon_{ik}+d_1\delta_{ik}\ddot\varepsilon_{ll}+$$
$$+2d_2\ddot\varepsilon_{ik}+n_1\delta_{ik}\dddot\varepsilon_{ll}+2n_2\dddot\varepsilon_{ik} \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_{ik}=\frac{1}{2}(e_{ik}+e_{ki}+e_{li}e_{lk}),\ e_{ik}=\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_i^0}{\partial x_k} \tag{1.3}$$

где ρ—начальная плотность среды, u_i^*, u_i^0 и u_i—соответственно компоненты полного, начального и возмущенного вектора смещения, ε_{ik}—тензор деформации, x_k—лангранжевые координаты, σ_{ik}—лангранжевый антисимметричный тензор напряжений, a_1 и a_2—времена релаксации, λ и μ—коэффициенты

Ламе, A, B, C—нелинейные модули третьего порядка, b_1, b_2, d_1, d_2, n_1 и n_2—параметры внутренних осцилляторов, δ_{ik}—тензор Кронекера, u_i^0 считаем известным, $\partial u_i^0/\partial x_k = \mathrm{const}$, уравнения (1.1) в нулевом порядке удовлетворяются.

Координатная система выбирается следующим образом: оси ox_1 и ox_2 находятся в плоскости границы среды, а ось ox_3 направлена в глубь среды. Вдоль оси ox_3 распространяется возмущение. Предполагается, что в плоскости $x_3 = 0$ истинные напряжения $\sigma'_{ik} = 0$. Предполагается также, что на некоторой глубине образованное возмущение имеет гауссовский профиль. В плоскости, где образовывается предварительное возмущение, $u_3 \neq 0$, а $u_1 = u_2 = 0$, то есть в среде образовывается квазипродольное возмущение.

В настоящее время опубликовано достаточно много работ о распространении нелинейных упругих волн в бесконечной среде [1–5]. Связь (1.2) для случая, когда не учитываются физическая нелинейность и предварительная деформированность среды, предложена в качестве модели грунтов в статье [2]. В различных областях исследований представляет интерес рассмотреть граничную задачу с нелинейными уравнениями движения среды. Число публикаций по данной теме незначительно.

В выбранной среде существуют "замороженные" и "равновесные" волны. Рассмотрим их отдельно.

2. "Равновесные" волны. За достаточно большое время волновое поле приходит в равновесное состояние. Главными членами в уравнении (1.2) следует считать σ_{ik} и ε_{ik}, которые берутся за основу при упрощениях. Пользуясь известным методом в теории дифракции волн [6], принимаются следующие порядки:

$$u_3 \sim \delta^2, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \sim \delta^{-1/2}, a_1, a_2, b_1, b_2 \sim \delta^2$$

$$d_1, d_2 \sim \delta^3, \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \sim \delta, n_1, n_2 \sim \delta^4.$$

Уравнение (1.1) записывается в перемещениях, для чего исключаются σ_{ik} и ε_{ik}, пользуясь выражениями (1.2) и (1.3). Вышепринятые порядки для коэффициентов означают, что вязкость, дисперсия и диссипация считаются малыми.

Величины $\dot{\sigma}_{ik}$ исключаются с помощью главных членов уравнения (1.2).

Уравнения для u_1 и u_2 упрощаются до членов $\delta^{1/2}$, а уравнение для u_3—до δ, тогда они примут следующий вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_3^2}, \ (j = 1, 2) \tag{2.1}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + 2a_2 \rho \frac{\partial^3 u_3}{\partial t^3} + F_1 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2 \partial t} + N_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + P_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) +$$
$$+ G_1 \Delta_1 u_3 + M_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - (d_1 + d_2) \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_3^2 \partial t^2} - (n_1 - n_2) \frac{\partial^5 u_3}{\partial x_3^2 \partial t^2} = 0 \tag{2.2}$$

где $F_1 = a_1(2\mu + 3\lambda) - b_1 - 2b_2$, $N_1 = -\lambda - 2\mu - (2A + 6B + 2C)\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$,
$P_1 = -\lambda - \mu - (\frac{3}{4}A + 2B + 2C)\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$, $G_1 = -\mu - (\frac{1}{2}A + 3B + 2C)\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$,

$M = -\lambda - 2\mu - 2A - 6B - 2C$, $\Delta_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

В линейном одномерном случае из уравнений (2.2) следует, что в среде распространяется продольная волна со скоростью

$$v^2 = -N_1\rho^{-1}$$

Решение системы (2.1)–(2.2) следует искать в виде суммы двух величин падающей и отраженной волны. В работах [7,8] показано, что уравнения для падающей и отраженной в первом порядке волны расщепляются.

Вводя новую переменную $\tau_1 = \tau - t$, $\tau = x_3 v^{-1}$, исключая из системы (2.1)–(2.2) функции u_1 и u_2, для падающей продольной волны получится следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial\tau_1} - \frac{1}{2}L(\psi) = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial\tau_1}\left[\Gamma\psi\frac{\partial\psi}{\partial\tau_1} + D\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau_1^2} + d\frac{\partial^3\psi}{\partial\tau_1^3} + n\frac{\partial^4\psi}{\partial\tau_1^4}\right] \qquad (2.3)$$

где $\psi = \frac{\partial u_3}{\partial\tau_1}$, $L = -Q_n v^2 N_1^{-1}\Delta_1\psi$, $\Gamma = 1/2M_1 N_1^{-1}$, $D = -\frac{\mathcal{P}v^2}{2}N_1^{-1}$,
$d = -(d_1 + +d_2)v(2N_1)^{-1}$, $n = (n_1 + n_2)v(2N_1)^{-1}$, $\mathcal{P} = 2a_2\rho + F_1 v^{-2}$,
$Q_n = P_1(\lambda + \mu)v^{-2}(\rho - \mu v^{-2})^{-1}$.

Для уравнения отраженной волны вводится переменная $\tau_2 = -\tau - t$. Аналогично, как это было сделано при выводе уравнения (2.3), можно получить следующее уравнение для $\psi_2 = u_3/\tau_2$:

$$-\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\tau_2\partial t} - \frac{1}{2}L(\psi_2) = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial\tau_2}\left[-\Gamma\psi_2\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau_2} + D\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\tau_2^2} + d\frac{\partial^3\psi_2}{\partial\tau_2^3} + n\frac{\partial^4\psi_2}{\partial\tau_2^4}\right] \qquad (2.4)$$

Решение уравнения (2.3), ввиду наличия дисперсии и диссипации, ищется в следующем виде:

$$\psi = \frac{1}{2}\Big\{A_1(\tau,t)\exp[(-\nu + \mathrm{i}\alpha)\tau_1 - (\nu + \mathrm{i}\omega)t] +$$

$$+ A_2(\tau,t)\exp[2(-\nu + \mathrm{i}\alpha)\tau_1 + 2(\nu + \mathrm{i}\omega)t] + \text{к.с.}\Big\} \qquad (2.5)$$

где A_1 и A_2—медленно меняющиеся амплитуды, соответственно первой и второй гармоники, ν—коэффициент поглощения, а ω—приращение к основной частоте α.

Подставляя (2.5) в уравнение (2.3) и приравнивая к нулю коэффициенты у соответствующих экспонент, можно получить уравнения для амплитуд A_1 и A_2 . Приравнивая к нулю наиболее по порядку недифференцируемые члены в уравнении для первой гармоники, получим уравнения линейной дисперсии и затухания

$$\omega = -\frac{d}{v}\alpha^3, \; \nu = \alpha^4 n v^{-1} - D\alpha^2 v^{-1}$$

Здесь и далее будет рассмотрен стационарный случай. При выполнении неравенства $\omega\tau \gg 1$ и $\omega \ll \alpha$, в уравнении для амплитуды A_2 можно пренебречь дифференцируемыми членами. Тогда для величины A_2 получится алгебраическое уравнение. Исключая функцию A_2, для амплитуды первой гармоники получится следующее уравнение:

$$\left(3i\omega + i\alpha + \nu + 2n\alpha^4 v^{-1}\right)\frac{\partial A_1}{\partial \tau} + Q_n v^2 N_1^{-1}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}\right) =$$

$$= \alpha^4(2v^2)^{-1}(1 + 8i\nu\alpha)(-12\omega\alpha + 24ni\alpha^5 v^{-1} + 4i\nu\alpha)^{-1}\Gamma^2 e^{-2\nu\tau} \mid A_1 \mid^2 A_1 \quad (2.6)$$

Выражение (2.6)—это известное уравнение модуляций аксиально-симметричного пучка в цилиндрических координатах. Для нахождения его асимптотического решения в приближении узких пучков, следует делать преобразование, как в статье [9]. Подстановкой в уравнение (2.6) $A_1 = a\exp(i\varphi)$, разделяя мнимые и действительные части, получаются два уравнения для величин a и φ, решение которых ищется при пренебрежении линейной диссипацией в следующем виде:

$$a = a_0 f_1^{-1}\exp\left[-\frac{1}{2}r^2(r_1 f_1)^{-2}\right], \varphi = \sigma_1(\tau) + \frac{1}{2}r^2 R_1^{-1}(\tau) \quad (2.7)$$

где f_1—безразмерная ширина пучка падающей волны, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f_1}{d\tau^2} = M f_1^{-3} \quad (2.8)$$

где

$$M = 4Q_n v^2 N_1^{-1}\alpha^{-1}(1-3\xi)^{-2}\left[-Q_n v^2 N_1^{-1}\alpha^{-1}r_1^{-4} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4}\chi_2^2 a_0^4 \alpha^{-2} - \frac{1}{2}\chi_1 a_0^0 \alpha^{-1} r_1^{-2}\right)\right], \ \xi = -\omega\alpha^{-1}$$

$$\chi_1 = \zeta(3\xi\alpha^2 + 8\nu^2\alpha^2 + 48n\alpha^5\nu v^{-1})$$

$$\chi_2 = -\zeta(\nu\alpha + 6n\alpha^5 v^{-1} + 24\nu\alpha^3\xi)$$

$$\zeta = \frac{1}{8}\Gamma^2 v^{-2}\left[9\xi^2 + (6n\alpha^3 v^{-1} + \nu\alpha^{-1})^2\right]^{-1}$$

Неизвестные функции σ_1 и R_1 можно легко найти по известной функции f_1.

Уравнение (2.8) следует решать с граничными условиями:

$$f_1(q) = 1, \ \frac{df_1(q)}{d\tau} = \frac{A_3}{R_1(q)} - \frac{\chi_2 a_0^2}{2\alpha(1-3\xi)}, \ A_3 = \frac{2Q_n v^2}{N_1\alpha(1-3\xi)} \quad (2.9)$$

$x_3 = qv$—плоскость, где образовывается гауссовский пучок, a_0 и r_1—амплитуда и радиус в этой плоскости.

Решение уравнения (2.8), с учетом граничных условий (2.9), имеет следующий вид:

$$f_1^2(\tau) = [f_1'(q) + M] + \left[\tau - q + \frac{f_1'(q)}{f_1'^2(q) + M}\right]^2 + \frac{M}{f_1'^2(q) + M} \quad (2.10)$$

Решение уравнения (2.4) ищется в следующем виде:

$$\psi_2 = \frac{1}{2}\Big\{ B_1(\tau_1, t)\exp[(\nu + \mathrm{i}\alpha)\tau_2 - (-\nu + \mathrm{i}\omega)t] +$$

$$+ B_2(\tau_1 t)\exp[2(\nu + \mathrm{i}\alpha)\tau_2 - 2(\nu + \mathrm{i}\omega)t] + \text{к.с.}\Big\} \tag{2.11}$$

где B_1 и B_2—медленно меняющиеся амплитуды отраженной волны, соответственно первой и второй гармоники.

Подставляя выражение (2.11) в уравнение (2.4) и делая аналогичные вычисления, как в случае падающей волны, получаются следующие уравнения модуляции и дисперсионные соотношения:

$$\left(+\mathrm{i}\alpha - 3\mathrm{i}\omega + \nu + 2n\alpha^4 v^{-1}\right)\frac{\partial B_1}{\partial \tau} - \frac{1}{2}L(B_1) = \frac{\Gamma^2\alpha^4(1 + 8\mathrm{i}\alpha\nu) \mid B_1 \mid^2 B_1 \mathrm{e}^{-2\nu\tau}}{8v^2[3\omega\alpha + \mathrm{i}\nu\alpha + 6\mathrm{i}n\alpha^5 v^{-1}]} \tag{2.12}$$

$$\omega = \frac{d}{v}\alpha^3, \nu = \frac{n}{v}\alpha^4 - \frac{D}{v}\alpha^2 \tag{2.13}$$

Уравнение (2.12) с точностью до коэффициентов совпадает с уравнением (2.6). Поэтому решение уравнения можно найти аналогичным образом. Разделяя мнимые и действительные части, решение для b и φ можно искать в виде (2.7), где следует заменить a_0 на b_0, f_1 на f_2, τ_1 на τ_0, σ_1 на σ_2 и R_1 на R_2. Уравнение для f_2, имеющий вид (2.8), следует решать со следующими граничными условиями:

$$R_2(0) = -R_1(0),\ f_2(0) = f_1(0),\ f_2'(0) = -A_3' R_2^{-1} -$$

$$-\frac{1}{2}\chi_2 b_0^2\alpha^{-1}(3\xi + 1).\ A_3' = 2Q_n v^2(N_1\alpha)^{-1}(1 + 3\xi)^{-1} \tag{2.14}$$

Тогда функцию f_2 можно представить в следующем виде:

$$f_2^2(\tau) = \left\{\tau + \frac{[c_1 f_1(0) - M]^{1/2}}{f_2'^2(0) + M}\right\}^2 + \frac{M}{f_2'^2(0) + M} \tag{2.15}$$

В решении (2.15) неопределенной остается амплитуда b_0. Так как заданной считается амплитуда a_0, то необходимо найти связь между амплитудами a_0 и b_0. Эту связь можно найти из граничного условия: напряжения на поверхности—нули. Для решения граничной задачи следует пользоваться методом возмущений граничных условий. Ограничиваясь в качестве первого приближения самыми большими членами, граничные условия примут следующий вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} = 0 \ (i = 1, 2) \text{ при } x_3 = 0$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = 0 \tag{2.16}$$

Решения системы уравнений (2.16) следует искать в виде падающей и отраженной волны для смещения u_3 и в виде только отраженной волны для поперечных смещений. Эти решения имеют вид квазимонохроматической волны типа первого слагаемого выражений (2.5). Подставляя эти решения в уравнения (2.16), получим новую систему уравнений относительно амплитуд. Если пренебрегать дифференцированными членами в этой системе уравнений, получится $A_1 = B_1$. Это соответствует известному результату, который получается если распространяется монохроматическая волна [10]. Для учета вклада медленно меняющихся амплитуд, следует подставить $B_1 = A_1 + \varepsilon$, где ε—некоторая неизвестная функция. Тогда связь между амплитудами падающей и отраженной волн примет следующий вид:

$$B_1 = A_1 - \frac{2i}{k}\frac{\partial A_1}{\partial x_3} + \frac{2\lambda}{(\lambda+2\mu)k_1 k}\Delta_1 A_1$$

где k и k_1—волновые числа. Из последнего выражения, после разделения мнимых и действительных частей, легко найти связь между a_0 и b_0.

3. "Замороженные" волны. Исходные уравнения (1.1) и (1.2) допускают также динамические процессы, где изменения быстры, поэтому основными членами уравнения (1.2) следует считать $\dot{\sigma}_{ik}$ и $\dot{\varepsilon}_{ik}$. Тогда, следуя статье [6], принимаются следующие порядки:

$$u_3 \sim \delta^2,\ \frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2} \sim \delta^{-1/2},\ \frac{\partial}{\partial x_3},\ \frac{\partial}{\partial t} \sim \delta^{-1},\ d_1,\ d_2 \sim \delta^2,\ n_1, n_2 \sim \delta^3.$$

Вышепринятые порядки для коэффициентов означают, что вязкость, дисперсия и диссипация считаются малыми.

Уравнения (1.1) записываются в перемещениях и упрощаются, используя вышеуказанные порядки. В уравнениях для u_1 и u_2 сохраняются члены, имеющие порядок до $\delta^{1/2}$, а в уравнении для u_3—до δ^0, тогда получатся следующие уравнения:

$$G\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i \partial x_3} + T\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} + a_2\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0,\ \ (i = 1,2) \tag{3.1}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + F\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2 \partial t} + N\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + P\frac{\partial}{\partial t}\Delta_\perp u_3 +$$

$$+a_2\rho\frac{\partial^3 u_3}{\partial t^3} - (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - (d_1+d_2)\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_3^2 \partial t^2} - (n_1+n_2)\frac{\partial^5 u_3}{\partial x_3^2 \partial t^3} +$$

$$+M_2\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2 \partial t}\right) = 0 \tag{3.2}$$

где

$G = a_1(2\mu+3\lambda) + a_2(\lambda+\mu) - b_1 - b_2 + \Big[3B(2a_1+a_2) + A(2a_1+\frac{3}{2}a_2) + 2C(3a_1+a_2)\Big]\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$, $T = 2a_2\mu - b_2$, $F = a_2(\lambda+2\mu) + a_1(2\mu+3\lambda) + 2a_1\Big(A + 5B + 3C\Big)\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} + 2\Big(A+3B+C\Big)\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} - b_1 - 2b_2$, $N = a_2(\lambda+\mu) + a_1(2\mu+3\lambda) + 2a_1(2B+3C) + a_2\Big(\frac{3}{4}A+B+2C\Big)\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} - b_1 - b_2$, $p = a_2\mu + a_2\Big(B+\frac{3}{4}A\Big)\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} - b_2$,
$M_2 = 2a_1(A+5B+3C) + 2a_2(A+C+2B) - b_1 - 2b_2$

В линейном однородном случае из уравнений (3.1) и (3.2) следует, что в среде распространяется продольная волна со скоростью $v_1^2 = F(a_2\rho)^{-1}$.

Аналогично равновесному случаю, уравнения (3.1)–(3.2) расщепляются на уравнения для падающих и отраженных волн. Для падающей и отраженной волн эти уравнения имеют соответственно следующий вид:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t\partial\tau_1}-\frac{1}{2}L_2(\psi_1)=-v_1^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau_1}\left[H\psi_1+d\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tau_1^2}+n\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\tau_1^3}+\Gamma_2\psi_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau_1}\right] \qquad (3.3)$$

$$-\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t\partial\tau_2}-\frac{1}{2}L_2(\psi_2)=-v_1^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau_2}\left[H\psi_1+d\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\tau_2^2}+n\frac{\partial^3\psi_2}{\partial\tau_2^3}+\Gamma_2\psi_2\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau_2}\right] \qquad (3.4)$$

где $L_2=v_1^2Q_pF^{-1}\Delta_\perp\psi_i(i=1,2)$, $H=-\frac{1}{2}N_2v_1^3F^{-1}$, $d=\frac{1}{2}(d_1+d_2)v_1F^{-1}$, $n=-\frac{1}{2}(n_1+n_2)v_1F^{-1}$.

Решение уравнения (3.3) ищется в виде (2.5). Выполняя аналогичные вычисления, как при выводе уравнения (2.6), получатся следующие уравнения для линейной дисперсии, затухания и амплитуды первой гармоники:

$$\omega_1=-\frac{n}{v_1}\alpha_1^3,\ \nu_1=Hv_1^{-1}-dv_1^{-1}\alpha_1^2$$

$$\left(\mathrm{i}\alpha_1-\nu_1+3\mathrm{i}\omega_1-2d\alpha_1^2v_1^{-1}\right)\frac{\partial A_3}{\partial\tau}-\frac{1}{2}L_2(A_1)=$$

$$=\frac{\Gamma_2^2}{2v_1}\alpha^4\left(1+8\mathrm{i}\alpha_1\nu_1\right)\left(-12\mathrm{i}\alpha\nu_1-12\omega_1\alpha_1-\mathrm{i}6d\alpha_1v_1^{-1}\right)^{-1}\mathrm{e}^{-2\nu_1\tau}\mid A_1\mid^2A \qquad (3.5)$$

Поступая аналогичным образом, как в пункте 2 в случае "равновесной" волны, можно получить уравнение типа (2.8), где коэффициенты χ_1 и χ_2 будут иметь следующий вид:

$$\chi_1=\frac{1}{2}\xi_1\left[6\xi_1\alpha^2-8\alpha^2\nu_1(\nu_1+3d\alpha^3v_1^{-1})\right],\ \xi_1=-\frac{\omega_1}{\alpha}$$

$$\chi_2=\xi_1\left[48\alpha^3\xi_1+(\nu_1+3d\alpha^2v_1^{-1})\alpha\right]$$

$$\xi_1=\frac{\Gamma_2^2}{2v_1}\left[36\xi_1^2+(\nu_1\alpha^{-1}+3d\alpha v_1^{-1})^2\right]^{-1}$$

Это уравнение следует решать с учетом граничных условий (2.9), тогда оно примет вид (2.10).

Решение уравнения (3.4) следует искать в виде (2.11) и аналогичным образом получим уравнение типа (2.12) и (2.13). В данном случае они будут иметь следующий вид:

$$\left(+\mathrm{i}\alpha-\nu_1-3\mathrm{i}\omega_1-2d\alpha^2v_1^{-1}\right)\frac{\partial B_1}{\partial\tau}-\frac{1}{2}L_2(B_2)=\frac{\Gamma_2^2}{16}\alpha^4\left(1+8\mathrm{i}\alpha\nu_1\right)\times \qquad (3.6)$$

$$\times\left(5\omega_1\alpha--3\mathrm{i}\alpha\nu_1-3\mathrm{i}d\alpha^3v_1^{-1}\right)^{-1}v_1^{-2}\mathrm{e}^{-2\nu_1\tau}\mid B_1\mid^2B_1,\ \omega_1=\frac{n}{v_1}\alpha^3,\ \nu_1=-\frac{H}{v_1}+\frac{d\alpha^2}{v_1}$$

Аналогично можно получить решение типа (2.15) с учетом граничных условий (2.14), где однако величины χ_1 и χ_2 имеют следующий вид:

$$\chi_1=\xi_2\left[-5\xi_1-24\alpha\nu_1\left(\frac{\nu_1}{\alpha}+\frac{d\alpha}{v_1}\right)\right],\ \chi_2=\xi_2\left[-40\alpha\nu_1\xi_1+\right.$$

$$+3\left(\frac{\nu_1}{\alpha}+\frac{d\alpha}{v_1}\right)\Big], \ \xi_2=\frac{\Gamma_1\alpha^2}{16v_1^2}\left[25\xi_1^2+9\left(\frac{\nu_1}{\alpha}+\frac{d\alpha}{v_1^2}\right)^2\right]^{-1}$$

Связь между амплитудами падающей и отраженной волны такая же, как в "равновесном" случае.

Таким образом, в двух возможных вариантах—"равновесном" и "замороженном", удалось найти аналитические решения в рамках теории узких пучков для системы нелинейных уравнений с линейными граничными условиями.

QUASIMONOCHROMATIC NON-LINEAR WAVE REFLECTION FROM FREE SURFACE OF MEDIUM

BAGDOEV A.G, SHEKOYAN A.V.

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՔՎԱԶԻՄՈՆՈՔՐՈՄԱՏԻԿ ԱԼԻՔԻ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁՈՒՄԸ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ԱԶԱՏ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆԻՑ

Ա.Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա.Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է նախապես դեֆորմացված, համասեռ,իզոտրոպ, մածուցիկ միջավայրում ազատ հարթությունից ոչ գծային առաձգական ալիքի գաուսյան փնջի անդրադարձման խնդիրը եւ գտնված են նրա ասիմպտոտիկական լուծումները՝ գծային եզրային պայմանի դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новожилов В.В.** Основы линейной теории упругости.—Л.-М.: Гостехтеориздат, 1948. 212с.
2. **Николаевский В.Н.** К изучению волн в сейсмоактивных средах.—В сб.: Проблемы нелинейной сейсмики. М.:Наука, 1987, с.170-202.
3. **Зволинский Н.Б.** Волновые процессы в неупругих средах.— В кн.:Колебания грунта и сейсмический эффект при землетрясениях.(Вопросы инженерной сейсмологии, вып.23). М.:Наука, 1982, с.4-19.
4. **Энгельбрехт Ю.К., Нигул У.К.** Нелинейные волны деформаций.— М.:Наука, 1981. 256 с.
5. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны.—М.:Мир, 1977. 622 с.
6. **Bagdoev A.G., Shekoyan A.B.** Focusing on nonlinear ultrasonic waves in viscous thermoelastic materials with spherical inclusions.—Phys.stat.sol(a), 1985, v.89, pp.499-507.
7. **Hunter J.K., Keller J.B.** Weakly nonlinear high frequency waves.—Communications on pure and applied mathem., 1983, v.36, no.5, pp.547-558.
8. **Carbonaro P.** High frequency waves in quasilinear invisid gasodinamics.—ZAMP, 1986, v.37, no.1, p.43-52.

9. **Багдоев А.Г., Шекоян А.В.** Нелинейные стационарные волны модуляции в пьезодиэлектриках с шаровыми включениями.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1987, т.40, но.5, с.14-23.

10. **Новацкий В.** Теория упругости.—М.:Мир. 1987. 871 с.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
15. IX.1989