ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

Մեխանիկա 44, № 1, 1991 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ЩЕЛЬЮ

ДОБОРДЖГИНИДЗЕ Л.Г.

Исследована контактная задача для бесконечной плоскости из нелинейного упругого материала гармонического типа с одной прямолинейной щелью. Заданное на бесконечности поле напряжений считается однородным. Вращение на бесконечности отсутствует. Трением и смятием на участке соприкасания пренебрегаем и считаем ширину щели малой. С использованием комплексных представлений полей упругости элементов через две аналитические в рассматриваемой физической области функции комплексного аргумента, задача приведена к характеристическому сингулярному уравнению первого рода. Получено точное решение задачи.

Исследуется контактная задача для бесконечной плоскости из нелинейно-упругого материала гармонического типа [1] с одной прямолинейной щелью. Заданное на бесконечности поле напряжений считается однородным. Вращение там отсутствует. Трением и смятием на участке соприкасания пренебрегаем и ширину щели считаем малой [2].

1. Пусть рассматриваемая физическая область S представляет собой плоскость переменной $z = x + iy$, разрезанную вдоль прямолинейного отрезка $L_1 = [-b; b]$ действительной оси L. На бесконечности реализуется однородное поле напряжений: $X_x^{(\infty)} = N_1$, $Y_y^{(\infty)} = N_2$, $X_y^{(\infty)} = 0$. Под действием этих нагрузок средние участки берегов щели придут в соприкосновение вдоль некоторого наперед неизвестного отрезка $L_2 = [-a; a]$ $(a < b)$. Оставшуюся вне линии контакта часть L_1 обозначим через $L_3 = [-b; -a[\cup]a; b]$.

Граничные условия задачи будут иметь вид [3]

$$Y_y^+ = Y_y^-,\ X_y^+ = X_y^- = 0,\ v^+ - v^- = \delta \text{ на } L_2 \tag{1.1}$$

$$Y_y^+ = Y_y^-,\ X_y^+ = X_y^- = 0 \text{ на } L_3 \tag{1.2}$$

где Y_y, X_x, X_y—компоненты тензора напряжений Коши, u, v—упругие смещения, δ—ширина щели до деформации.

Для решения задачи используем комплексные представления [4]

$$X_x + Y_y + 4\mu = \frac{\lambda + 2\mu}{\sqrt{J}} q\Omega(q), Y_y - X_x - 2iX_y = -\frac{4(\lambda+2\mu)}{\sqrt{J}}\frac{\Omega(q)}{q}\frac{\partial z^*}{\partial z}\frac{\partial z^*}{\partial \bar{z}} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial z} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\varphi'^2(z) + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\varphi'(z)}{\overline{\varphi'(z)}}, \frac{\partial z^*}{\partial \bar z} = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)\overline{\varphi''(z)}}{\overline{\varphi'^2(z)}} - \overline{\psi'(z)}\right] \quad (1.4)$$

$$u + \mathrm{i}v = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\int \varphi'^2(z)dz + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\varphi(z)}{\overline{\varphi'(z)}} + \overline{\psi(z)}\right] - z \quad (1.5)$$

где

$$\sqrt{J} = \frac{\partial z^*}{\partial z}\frac{\overline{\partial z^*}}{\partial z} - \frac{\partial z^*}{\partial \bar z}\frac{\overline{\partial z^*}}{\partial z}, q = 2\left|\frac{\partial z^*}{\partial z}\right|, \Omega(q) = q - \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \quad (1.6)$$

$\varphi(z)$, $\psi(z)$– аналитические в рассматриваемой области S функции комплексного аргумента $z = x + \mathrm{i}y$, λ, μ— упругие постоянные Ламе, $z^* = z + u + \mathrm{i}v$.

Согласно формулам (1.5) работы [4] следует, что при больших $|z|$ и условиях задачи имеют место представления

$$\varphi(z) = a_0 z + O(z^{-1}), \psi(z) = b_0 z + O(z^{-1}) \quad (1.7)$$

где a_0 и b_0 – известные постоянные

$$a_0 = \left[\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{2\mu(N_1+N_2) + N_1N_2 + 4\mu^2}{\lambda(N_1+N_2) - N_1N_2 + 4\mu(\lambda+\mu)}\right]^{1/2}$$

$$b_0 = \frac{(\lambda+2\mu)(N_1-N_2)}{\lambda(N_1+N_2) - N_1N_2 + 4\mu(\lambda+\mu)} \quad (1.8)$$

Кроме того,

$$\varphi'(z) \neq 0 \text{ в } S + L \quad (1.9)$$

Согласно (1.1), (1.2) и условиям задачи, из (1.3), (1.4) следует на L равенство

$$\overline{\varphi(x)}\varphi''(x) - \varphi'^2(x)\psi'(x) = \frac{(Y_y - X_x)\mid\varphi'^2(x)\mid}{X_x + Y_y + 4\mu}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mid\varphi'^2(x)\mid\right) \quad (1.10)$$

С использованием (1.10) из (1.3), (1.4) получим

$$X_x = Y_y + \gamma \text{ на } L \quad (1.11)$$

где

$$\gamma = \frac{4\mu(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)a_0^2 b_0}{[\mu a_0^2 + (\lambda+\mu)(1-b_0)][\mu a_0^2 + (\lambda+\mu)(1+b_0)]} \quad (1.12)$$

Учитывая (1.11) в (1.3), после некоторых приведений получим

$$\mid\varphi'^2(x)\mid = F(x) \text{ на } L \quad (1.13)$$

где

$$F(x) = \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{(Y_y + 2\mu)(Y_y + 2\mu + \gamma)}{(\lambda+2\mu)(2Y_y + \gamma + 4\mu) - (Y_y + 2\mu + \gamma)} \quad (1.14)$$

Согласно (1.13) и (1.1), (1.2), для определения голоморфной в S функции $\varphi'(z)$ будем иметь следующие граничные условия:

$$\mid\varphi'^2(x)\mid^{\pm} = F_*^{\pm}(x) \text{ на } L \quad (1.15)$$

где

$$F_*(x)=\begin{cases}\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{(N(x)+2\mu)(N(x)+2\mu+\gamma)}{(\lambda+2\mu)(2N(x)+\gamma+4\mu)-(N(x)+2\mu)(N(x)+2\mu+\gamma)}=G_1(x)\text{ на }L_2\\ \frac{2(\lambda+\mu)(2\mu+\gamma)}{\lambda\gamma+4\mu(\lambda+\mu)}=G_2(x)\text{ на }L_3\end{cases}\tag{1.16}$$

Через $F_*^+(x)$, $F_*^-(x)$ обозначены граничные значения функции $F_*(x)$ слева и справа в точке x линии L_1. Мы будем считать, что эти значения удовлетворяют условию Гельдера на L_1, а искомая функция $\varphi'(z)$ является кусочно-голоморфной в области S.

Решение класса h_0 этой задачи (решение неограниченное в точках $-b, b$), удовлетворяющее при достаточно больших $| z |$ условию (1.7), имеет вид [5]

$$\varphi'(z)=\exp\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi\mathrm{i}\sqrt{z^2-b^2}}\int_{-a}^{a}\frac{F_0(x)\sqrt{x^2-b^2}dx}{x-z}+G(z)\right]\tag{1.17}$$

где $G(z)$—известная функция

$$G(z)=\frac{2F_1z}{\pi\mathrm{i}\sqrt{z^2-b^2}}\int_{a}^{b}\frac{\sqrt{x^2-b^2}dx}{x^2-z^2}+\frac{(\ln a_0^2)z}{\sqrt{z^2-b^2}}\tag{1.18}$$

$F_0(x)$—заданная на L_2 неизвестная, $F_1(x)$—заданная на L_3 известная функции:

$$F_0(x)=\ln G_1(x),\ \ F_1(x)=\ln G_2(x)\tag{1.19}$$

Под $\sqrt{z^2-b^2}$ подразумевается голоморфная ветвь, изменяющаяся на разрезанной вдоль L_1 плюскости. Для отмеченной ветви

$$\sqrt{z^2-b^2}=z+O(1)\tag{1.20}$$

при достаточно больших $| z |$.

Обратимся теперь к формуле (1.5). Продифференцируем ее по x и в полученном равенстве учтем (1.10). Тогда будем иметь на L

$$1+u'_x+\mathrm{i}v'_x=\left[\frac{\mu}{\lambda+2\mu}+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{1}{|\varphi'^2(x)|}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left(1+\frac{\mu\,|\varphi'^2(x)|}{\lambda+\mu}\right)\frac{\gamma}{(2Y_y+\gamma+4\mu)\,|\varphi'^2(x)|}\right]\varphi'^2(x)\tag{1.21}$$

Согласно условиям задачи и последнего равенства (1.1) из (1.21) получим

$$\mathrm{Im}\varphi'^{2+}(x)=\mathrm{Im}\varphi'^{2-}(x)\text{ на }L_2\tag{1.22}$$

Из (1.17), согласно известным соотношениям Сохоцкого-Племеля, определяем предельные значения функции $\varphi'(z)$ на L_2 и полученные выражения внесем в (1.22). Тогда после некоторых рассуждений и приведений получим

$$\int_{-a}^{a}\frac{F_0(x)\sqrt{b^2-x^2}dx}{x-x_0}=-2F_1x_0\int_{a}^{b}\frac{\sqrt{b^2-x^2}dx}{x^2-x_0^2}-(\pi\ln a_0^2)x_0=P(x_0)\tag{1.23}$$

где $F_0(x)$, $F_1(x)$ определяются формулами (1.19).

Вычислим определенный интеграл в правой части (1.23). Тогда будем иметь

$$P(x_0) = Ax_0 + Q(x_0) \tag{1.24}$$

где A—постоянная

$$A = 2F_1\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{a}{b}\right) - \pi \ln a_0^2 \tag{1.25}$$

а

$$Q(x_0) = -2F_1\sqrt{b^2 - x_0^2}\ln\left[\frac{\sqrt{(1-\frac{a^2}{b^2})(b^2-x_0^2)} + (b - \frac{ax_0}{b})}{\sqrt{b^2-a^2}+\sqrt{b^2-x_0^2}} - \frac{\sqrt{a+x_0}}{\sqrt{a-x_0}}\right] \tag{1.26}$$

F_1—постоянная, определяемая согласно (1.16), (1.19).

Введем обозначение

$$F^*(x) = F_0(x)\sqrt{b^2 - x^2} \tag{1.27}$$

Тогда для определения функции $F^*(x)$ на $L_2 = [-a; a]$ получим следующее неоднородное характеристическое сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\int_{-a}^{a} \frac{F^*(x)dx}{x - x_0} = Q(x_0) \tag{1.28}$$

Согласно условиям задачи мы должны искать решение класса $h(-a; a)$ (решение, ограниченное в точках $-a, a$) этого уравнения. Такое решение, как известно, имеет вид [5]

$$F^*(x_0) = \frac{\sqrt{a^2 - x_0^2}}{\pi^2}\int_{-a}^{a}\frac{Q(x)dx}{\sqrt{a^2 - x^2}(x - x_0)} \tag{1.29}$$

при выполнении условия разрешимости

$$\int_{-a}^{a}\frac{Q(x)dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0 \tag{1.30}$$

Согласно (1.26) очевидно, что в нашем случае это условие выполняется автоматически.

Учитывая в правой части (1.29) функцию (1.26), после вычисления полученного определенного интеграла и с учетом (1.27) находим искомую функцию $F_0(x)$ в виде

$$F_0(x) = \alpha\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - x^2}} \tag{1.31}$$

где α—постоянная, определяемая формулой

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\left[2\left(\pi - \arcsin\frac{a}{b} - \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right)\ln\frac{2(\gamma+\mu)(\gamma+2\mu)}{\lambda\gamma + 4\mu(\lambda+\mu)} - \pi\ln a_0^2\right] \tag{1.32}$$

Учитывая это выражение в (1.19), на основании первого равенства (1.16) находим выражение для определения контактного давления $N(x)$ на $L_2 = [-a; a]$ в виде

$$N(x) = \frac{1}{2(1+A_0)}\left[2(\lambda+2\mu)A_0\left(1+\sqrt{1+\frac{\gamma^2(1+A_0)^2}{4(\lambda+2\mu)^2A_0^2}}\right) - (\gamma+4\mu)(1+A_0)\right] \tag{1.33}$$

где

$$A_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\exp(F_0(x)) \tag{1.34}$$

Из (1.33) следует

$$\lim_{x\to\pm a} N(x) = \mu\left(\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4\mu^2}}-1\right) - \frac{\gamma}{2} \tag{1.35}$$

Отметим, что при одноосном однородном сжатии, т.е. когда $Y_y^{(\infty)} = N_0$, $X_x^{(\infty)} = 0$, $X_y^{(\infty)} = 0$, будем иметь: $\gamma = -N_0$.

Достаточно простой вид формула (1.33) имеет при $b_0 = 0$ ($N_1 = N_2 = N_0$). В указанном случае

$$N(x) = \frac{2\mu\left[\exp\left((\ln a_0^2)\sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}}\right)-1\right]}{1+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\exp\left[(\ln a_0^2)\sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}}\right]} \quad \text{при} \quad |x| \le a \tag{1.36}$$

Из этой формулы очевидно, что

$$\lim_{x\to\pm a} N(x) = 0$$

Вернемся теперь к формуле (1.17) и внесем в ее правой части найденное значение (1.31). Тогда после некоторых вычислений и приведений получим при $\forall z \in S$

$$\varphi'(z) = \exp\left\{\frac{(A-\alpha\pi)z + \alpha\pi\sqrt{z^2-a^2}}{2\pi\sqrt{z^2-b^2}} + \right.$$

$$\left. + \ln\left[\frac{\sqrt{(1-\frac{a^2}{b^2})(b^2-z^2)} + (b-\frac{az}{b})}{\sqrt{(1-\frac{a^2}{b^2})(b^2-z^2)} + (b+\frac{az}{b})}\frac{\sqrt{a+z}}{\sqrt{a-z}}\right]\right\} \tag{1.37}$$

Другую искомую функцию $\psi(z)$ определяем после этого из (1.10) известным способом. Поле упругих элементов в области S можно определить из (1.3)–(1.6) операциями вычислительного характера. В частности, значения нормальных напряжений на прямой симметрии трещины можно определить по формуле

$$N(x) = \frac{\mu(\lambda+2\mu)\mid\varphi'^2(x)\mid}{\lambda+\mu+\mu\mid\varphi'^2(x)\mid} - 2\mu - \frac{\gamma}{2} +$$

$$+\sqrt{\frac{\mu^2(\lambda+2\mu)^2\mid\varphi'^2(x)\mid^2}{(\lambda+\mu+\mu\mid\varphi'^2(x)\mid)^2} + \frac{\gamma^2}{4}} \tag{1.38}$$

при $\forall x \in L$.

Из (1.38) согласно (1.37) следует, что нормальные напряжения $Y_y = N(x)$ в окрестности концов разреза $[-b;b]$ (при $|x| \geq b$) принимают конечные значения.

2. Перейдем к задаче определения параметра a, характеризующего полудлину участка контакта. Для этого используем последнее равенство условия (1.1) и представим его в виде

$$\delta = \int_a^x [v'^-(x) - v'^+(x)]dx \tag{2.1}$$

или, согласно (1.21) в виде

$$\delta = \int_a^b \left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \frac{1}{|\varphi'^2(x)|} + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma(\lambda+\mu+\mu\,|\varphi'^2(x)|)(\mathrm{Im}\varphi'^{2-}(x) - \mathrm{Im}\varphi'^{2+}(x))}{(\lambda+2\mu)(2Y_y+\gamma+4\mu)\,|\varphi'^2(x)|} \right] dx \tag{2.2}$$

Подставляя сюда предельные значения функции $\varphi'(z)$, определяемые согласно (1.37) и выполняя указанные операции, получим, наконец,

$$\delta = 2\int_a^b \left[\left(\frac{\mu F(x)}{\lambda+2\mu} + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \right) \sin \frac{(A-\pi\alpha)x + \pi\alpha\sqrt{x^2-a^2}}{2\pi\sqrt{b^2-x^2}} \right] dx \tag{2.3}$$

Это равенство представляет собой трансцендентное уравнение для определения параметра a.

Аналогично исследуется задача в случае конечного числа прямолинейных разрезов.

CONTACT PROBLEM OF NON-LINEAR ELASTIC PLANE WITH A RECTANGULAR SLIT

L.G. DOBORJGINIDZE

ՈՒՂՂԱԳԻԾ ՃԵՂՔՈՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Լ.Գ. ԴՈԲՈՐՋԳԻՆԻՁԵ

Ամփոփում

Ուսումնասիրված է հարմոնիկ տիպի ոչ գծային առաձգական նյութից եւ մեկ ուղղագիծ ճեղք ունեցող անվերջ հարթության համար կոնտակտային խնդիր:

Անվերջությունում տրված լարումների դաշտը համարվում է համասեռ եւ պտույտը բացակայում է: Հպման տեղամասում շփումը եւ տրորումը արհամարված են, իսկ ճեղքի լայնությունը ընդունված է փոքր: Առաձգական էլեմենտների դաշտերի կոմպլեքս ներկայացումների օգնությամբ խնդիրը բերված է առաջին սեռի բնութագրիչ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման: Ստացված է խնդրի ճշգրիտ լուծումը:

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лурье А.И.** Нелинейная теория упругости.—М.:Наука, 1980. 512 с.
2. **Моссаковский В.И., Загубиженко П.А.** Об одной смешанной задаче теории упругости для плоскости, ослабленной прямолинейной щелью.—Докл.АН СССР, 1954, т.94, но.3, с.409–412.
3. **Мусхелишвили Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости.—М.:Наука, 1966. 707с.
4. **Доборджгинидзе Л.Г.** Одна плоская обратная задача нелинейной теории упругости.—Изв. АН СССР. МТТ, 1985, но.3, с.183-185.
5. **Мусхелишвили Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения.—М.:Наука, 1968. 511с.

Грузинский политехнический институт

Поступила в редакцию 18. XII.1989