

УДК 62-50

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

БАГДАСАРЯН Ю.М., ХАЧАТРЯН А.М.

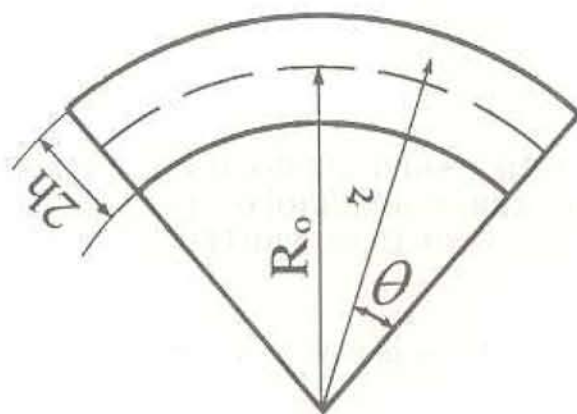
Рассмотрен вопрос точного определения напряженно-деформированного состояния плоского криволинейного стержня с цилиндрической анизотропией. Решение задачи представлено в виде суммы двух решений — незатухающего и типа пограничного слоя. Полученное решение в нулевом приближении сравнивается с классическими уравнениями Кирхгоффа-Клебша.

Асимптотический метод интегрирования широко применялся для решения задач теории упругости как для изотропного, так и для анизотропного тела. Впервые этот метод был разработан применительно к пластинам К. Фридрихсом и Р. Дресслером [1] и А.Л. Гольденвейзером [2]. В последующем, А.Л. Гольденвейзером разработан асимптотический метод определения напряженно-деформированного состояния произвольных изотропных оболочек [3,4]. А.Л. Агаловян распространил асимптотический метод на анизотропные пластинки и оболочки [5-7].

В работе [8] методом асимптотического интегрирования построено решение уравнений теории упругости для кривого стержня из изотропного материала с плоской осевой линией, а в работе [9] рассмотрена задача об изгибе тонкого изотропного бруса. Подробно рассмотрены первые два приближения. Показано, что первое приближение в [8] совпадает с решением, найденным по теории Кирхгоффа-Клебша.

В работах [10,11] решена плоская задача для ортотропного и анизотропного прямоугольников, на продольных сторонах которых заданы значения напряжений, а на торцах — различные комбинации торцевых условий. Проведен анализ влияния отношений главных модулей упругости на применимость гипотезы о недеформируемых нормалях.

1. В настоящей работе, исходя из уравнений теории упругости, рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния плоского криволинейного стержня с цилиндрической анизотропией без принятия каких-либо гипотез и допущений. Предполагается, что стержень имеет постоянную ширину  $2h$ , ограничен в плане двумя дугами концентрических



Фиг.1

окружностей радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_{1,2} = R_0 \mp h$ ). Ось анизотропии проходит нормально к этой плоскости через общий центр окружностей (фиг.1). На криволинейных сторонах стержня заданы значения напряжений, а на торцах — различные комбинации торцевых условий.

$$\sigma_{r\theta} = \pm \sqrt{h/R_0} Y^\pm(\theta), \quad \sigma_r = \pm Z^\pm(\theta) \quad \text{при } r = R_0 \pm h \quad (1.1)$$

Применяется асимптотический метод интегрирования. Решение задачи представляется в виде суммы двух решений: незатухающего и типа пограничного слоя, излагается процедура их сопряжения.

Для решения задачи введем безразмерную координатную систему  $\zeta, \varphi$  по формулам

$$\zeta = (r - R_0)/h, \quad \varphi = \theta/\varepsilon \quad (1.2)$$

где  $\varepsilon = (h/R_0)^{1/2}$  — малый параметр. После этих преобразований соответствующие уравнения теории упругости анизотропного тела в полярных координатах будут содержать малый параметр. Эта система сингулярно возмущенная, следовательно, ее решение складывается из двух типов решений: внутреннего и пограничного слоя.

Решение внутренней задачи будем искать в виде [2-4]

$$Q = \varepsilon^{-q} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(s)} \quad (1.3)$$

$Q$  — любое из напряжений и безразмерных перемещений  $V = v/R_0, W = w/R_0$ , причем  $Q^{(s)} \equiv 0$  при  $s < 0, q$  — целое положительное число и выбирается следующим образом:

$$q = 2 \text{ для } \sigma_\theta, W, \quad q = 1 \text{ для } \sigma_{r\theta}, V$$

$$q = 0 \text{ для } r \quad (1.4)$$

Подставляя (1.3) в вышеуказанные уравнения, с учетом (1.4) получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r^{(s)}}{\partial \zeta} - \sigma_\theta^{(s)} + \zeta \frac{\partial \sigma_r^{(s-2)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(s)}}{\partial \varphi} + \sigma_r^{(s-2)} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_\theta^{(s)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(s)}}{\partial \zeta} + \zeta \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(s-2)}}{\partial \zeta} + 2\sigma_{r\theta}^{(s-2)} &= 0 \\ \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{11}\sigma_r^{(s-4)} + a_{12}\sigma_\theta^{(s-2)} + a_{16}\sigma_{r\theta}^{(s-3)} \\ \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \varphi} + W^{(s)} &= a_{12}\sigma_r^{(s-2)} + a_{22}\sigma_\theta^{(s)} + a_{26}\sigma_{r\theta}^{(s-1)} + \\ &+ \zeta(a_{12}\sigma_r^{(s-4)} + a_{22}\sigma_\theta^{(s-2)} + a_{26}\sigma_{r\theta}^{(s-3)}) \\ \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \zeta \frac{\partial V^{(s-2)}}{\partial \zeta} - V^{(s-2)} + \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \varphi} &= a_{16}\sigma_r^{(s-3)} + a_{26}\sigma_\theta^{(s-1)} + a_{66}\sigma_{r\theta}^{(s-2)} + \\ &+ \zeta(a_{16}\sigma_r^{(s-5)} + a_{26}\sigma_\theta^{(s-3)} + a_{66}\sigma_{r\theta}^{(s-4)}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Проинтегрировав систему (1.5) по  $\zeta$ , получим

$$\begin{aligned} W^{(s)} &= w^{(s)}(\varphi) + w^*(s)(\varphi, \zeta) \\ V^{(s)} &= -\frac{dw^{(s)}}{d\varphi}\zeta + v^{(s)}(\varphi) + v^*(s)(\varphi, \zeta) \\ \sigma_\theta^{(s)} &= -\frac{1}{a_{22}}\frac{d^2w^{(s)}}{d\varphi^2}\zeta + \frac{1}{a_{22}}\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(s)}}{d\varphi}\right) + \sigma_\theta^*(s)(\varphi, \zeta) \\ \sigma_{r\theta}^{(s)} &= \frac{1}{2a_{22}}\frac{d^3w^{(s)}}{d\varphi^3}\zeta^2 - \frac{1}{a_{22}}\left(\frac{dw^{(s)}}{d\varphi} + \frac{d^2v^{(s)}}{d\varphi^2}\right)\zeta + \tau_{r\theta 0}^{(s)} + \sigma_{r\theta}^*(s)(\varphi, \zeta) \\ \sigma_r^{(s)} &= -\frac{1}{6a_{22}}\frac{d^4w^{(s)}}{d\varphi^4}\zeta^3 + \frac{1}{2a_{22}}\frac{d^3v^{(s)}}{d\varphi^3}\zeta^2 + \\ &+ \frac{1}{a_{22}}\left(w^{(s)} + \frac{dv^{(s)}}{d\varphi}\right)\zeta - \frac{d\tau_{r\theta 0}^{(s)}}{d\varphi}\zeta + \tau_{r 0}^{(s)} + \sigma_r^*(s)(\varphi, \zeta) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Величины со звездочками—известные функции и определяются по формулам:

$$\begin{aligned} w^*(s) &= \int_0^\zeta \left( a_{11}\sigma_r^{(s-4)} + a_{12}\sigma_\theta^{(s-2)} + a_{16}\sigma_{r\theta}^{(s-3)} \right) d\zeta \\ v^*(s) &= \int_0^\zeta \left( a_{16}\sigma_r^{(s-3)} + a_{26}\sigma_\theta^{(s-1)} + a_{66}\sigma_{r\theta}^{(s-2)} \right) d\zeta + \int_0^\zeta \zeta \left( a_{16}\sigma_r^{(s-5)} + a_{26}\sigma_\theta^{(s-3)} + \right. \\ &+ \left. a_{66}\sigma_{r\theta}^{(s-4)} \right) d\zeta + \int_0^\zeta \left( -\frac{\partial w^*(s)}{\partial \varphi} - \zeta \frac{\partial V^{(s-2)}}{\partial \zeta} + V^{(s-2)} \right) d\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{*(s)} &= \frac{1}{a_{22}} \left[ w^{*(s)} + \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial \varphi} - \left( a_{12} \sigma_r^{*(s-2)} + a_{26} \sigma_{r\theta}^{*(s-1)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \zeta \left( a_{12} \sigma_r^{*(s-1)} + a_{26} \sigma_{r\theta}^{*(s-3)} + a_{22} \sigma_{\theta}^{*(s-2)} \right) \right] \\ \sigma_{r\theta}^{*(s)} &= - \int_0^{\zeta} \left( \frac{\partial \sigma_{\theta}^{*(s)}}{\partial \varphi} + \zeta \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{*(s-2)}}{\partial \zeta} + 2 \sigma_{r\theta}^{*(s-2)} \right) d\zeta \\ \sigma_r^{*(s)} &= \int_0^{\zeta} \left( \sigma_{\theta}^{*(s)} - \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{*(s)}}{\partial \varphi} - \zeta \frac{\partial \sigma_r^{*(s-2)}}{\partial \zeta} - \sigma_r^{*(s-2)} \right) d\zeta \end{aligned} \quad (1.7)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.1), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения  $w^{(s)}$  и  $v^{(s)}$ :

$$\frac{1}{a_{22}} \left( \frac{d^2 v^{(s)}}{d\varphi^2} + \frac{dw^{(s)}}{d\varphi} \right) = p^{(s)} \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{a_{22}} \left( \frac{1}{3} \frac{d^4 w^{(s)}}{d\varphi^4} + w^{(s)} + \frac{dv^{(s)}}{d\varphi} \right) = q^{(s)}$$

где

$$\begin{aligned} p^{(s)} &= -Y^{(s)} + \frac{1}{2} \left( \sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta=1) - \sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta=-1) \right) \\ q^{(s)} &= Z_2^{(s)} + \frac{dY_2^{(s)}}{d\varphi} - \frac{1}{2} \left[ \sigma_r^{*(s)}(\zeta=1) - \sigma_r^{*(s)}(\zeta=-1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta=1)}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta=-1)}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$Z_{1,2}^{(s)} = 1/2 \left( Z^{+(s)} \mp Z^{-(s)} \right), \quad Y_{1,2}^{(s)} = 1/2 \left( Y^{+(s)} \pm Y^{-(s)} \right)$$

$$Z^{\pm(0)} = Z^{\pm}, \quad Y^{\pm(0)} = Y^{\pm}, \quad Z^{\pm(s)} = Y^{\pm(s)} = 0 \quad \text{при } s > 0$$

а также определим неизвестные функции  $\tau_{r\theta 0}^{(s)}$  и  $\tau_{r0}^{(s)}$

$$\tau_{r\theta 0}^{(s)} = Y_2^{(s)} - 1/2 \left( \sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta=1) + \sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta=-1) \right) - \frac{1}{2a_{22}} \frac{d^3 w^{(s)}}{d\varphi^3} \quad (1.10)$$

$$\tau_{r0}^{(s)} = Z_1^{(s)} - 1/2 \left( \sigma_r^{*(s)}(\zeta=1) + \sigma_r^{*(s)}(\zeta=-1) \right) - \frac{1}{2a_{22}} \frac{d^3 v^{(s)}}{d\varphi^3}$$

Таким образом, все величины будут определены, если будут известны  $v^{(s)}$  и  $w^{(s)}$ .

Если в соотношениях (1.5), (1.6) перейти к усилиям и моментам, то получим уравнения, которые по структуре похожи на уравнения Кирхгоффа-Клебша, но имеют сравнительно простой вид [12]

$$\frac{dQ^{(s)}}{d\varphi} - N^{(s)} = -2Z_1^{(s)} - 2Z_2^{(s-2)}$$

$$\frac{dN^{(s)}}{d\varphi} + Q^{(s-2)} = -2Y_2^{(s)} - Y_1^{(s-2)} \quad (1.11)$$

$$\frac{dM^{(s)}}{d\varphi} - Q^{(s)} = -2Y_1^{(s)} - 2Y_2^{(s-2)}$$

$$N^{(s)} = \frac{2}{a_{22}} \left( w^{(s)} + \frac{dv^{(s)}}{d\varphi} \right) + N^{*(s)}, \quad M^{(s)} = -\frac{2}{3a_{22}} \frac{d^2 w^{(s)}}{d\varphi^2} + M^{*(s)} \quad (1.12)$$

$$Q^{(s)} = -\frac{2}{3a_{22}} \frac{d^3 w^{(s)}}{d\varphi^3} + 2Y_2^{(s)} - \left( \sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_{r\theta}^{*(s)}(\zeta = -1) \right) + Q^{*(s)}$$

где

$$\begin{aligned} N^{(s)} &= \int_{-1}^1 \sigma_{\theta}^{(s)} d\zeta, \quad M^{(s)} = \int_{-1}^1 \sigma_{\theta}^{(s)} \zeta d\zeta, \quad Q^{(s)} = \int_{-1}^1 \sigma_{r\theta}^{(s)} d\zeta \\ N^{*(s)} &= \int_{-1}^1 \sigma_{\theta}^{*(s)} d\zeta, \quad M^{*(s)} = \int_{-1}^1 \sigma_{\theta}^{*(s)} \zeta d\zeta, \quad Q^{*(s)} = \int_{-1}^1 \sigma_{r\theta}^{*(s)} d\zeta \end{aligned} \quad (1.13)$$

Во втором уравнении (1.11), в нулевом приближении, отсутствует слагаемое  $Q$ , которое присутствует в классических уравнениях. Это слагаемое при асимптотическом подходе появляется, начиная с приближения  $s = 2$ . По сравнению с классическими, при  $s = 2$  меняются также виды нагрузок. Следовательно, с асимптотической точки зрения классические уравнения Кирхгоффа-Клебша не являются последовательными. Поэтому, если мы хотим учитывать члены порядка  $O(\varepsilon^2)$ , то необходимо использовать более точные уравнения равновесия (1.11), а в соотношениях упругости (1.12) оставлять члены такого же порядка.

Асимптотический подход имеет то преимущество, что позволяет получить формулы для определения всех величин, в том числе и для определения напряжения  $\sigma_r$ , которое обычно пренебрегается в классической теории.

2. Для построения решения типа пограничного слоя вблизи торца  $\theta = 0$  в уравнениях теории упругости, преобразованных по формулам (1.2), сделаем новую замену переменных по формуле  $l = \theta/\varepsilon^2 = (R_0\theta)/h$ . Решение полученной системы отыщем в виде функций типа пограничного слоя [7]

$$R_p = \varepsilon^{\chi_p} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s R_p^{(s)}(\zeta) \exp(-\lambda l) \quad (2.1)$$

выбирая непротиворечивые значения  $\chi_p$  следующим образом:

$$\chi_{\sigma_i} = \chi, \quad \chi_{u_i} = \chi + 2 \quad (2.2)$$

где  $\sigma_i$  — любое из напряжений,  $u_i$  — любое из безразмерных перемещений,  $\chi$  определяется при рассмотрении вопроса взаимодействия погранслоя с внутренним напряженным состоянием.

Подставляя (2.1) с учетом (2.2) в вышеуказанные уравнения и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим

$$\frac{d\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta} - \lambda \sigma_{r\theta p}^{(s)} + \zeta \frac{d\sigma_{rp}^{(s-2)}}{d\zeta} + \sigma_{rp}^{(s-2)} - \sigma_{\theta p}^{(s-2)} = 0$$

$$-\lambda \sigma_{\theta p}^{(s)} + \frac{d\sigma_{r\theta p}^{(s)}}{d\zeta} + \zeta \frac{d\sigma_{r\theta p}^{(s-2)}}{d\zeta} + 2\sigma_{r\theta p}^{(s-2)} = 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw_p^{(s)}}{d\zeta} &= a_{11}\sigma_{rp}^{(s)} + a_{12}\sigma_{\theta p}^{(s)} + a_{16}\sigma_{r\theta p}^{(s)} \\ -\lambda v_p^{(s)} + w_p^{(s-2)} &= a_{12}\sigma_{rp}^{(s)} + a_{22}\sigma_{\theta p}^{(s)} + a_{26}\sigma_{r\theta p}^{(s)} + \\ &+ \zeta \left( a_{12}\sigma_{rp}^{(s-2)} + a_{22}\sigma_{\theta p}^{(s-2)} + a_{26}\sigma_{r\theta p}^{(s-2)} \right) \\ -\lambda w_p^{(s)} + \frac{dv_p^{(s)}}{d\zeta} + \zeta \frac{dv_p^{(s-2)}}{d\zeta} - v_p^{(s-2)} &= \\ &= a_{16}\sigma_{rp}^{(s)} + a_{26}\sigma_{\theta p}^{(s)} + a_{66}\sigma_{r\theta p}^{(s)} + \zeta \left( a_{16}\sigma_{rp}^{(s-2)} + a_{26}\sigma_{\theta p}^{(s-2)} + a_{66}\sigma_{r\theta p}^{(s-2)} \right) \end{aligned}$$

Из системы (2.3), выразив все величины через напряжение  $\sigma_{rp}^{(s)}$ , получим

$$\sigma_{r\theta p}^{(s)} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta} + \sigma_{r\theta p}^{*(s)}, \quad \sigma_{\theta p}^{(s)} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta^2} + \sigma_{\theta p}^{*(s)} \quad (2.4)$$

$$v_p^{(s)} = - \left( \frac{a_{22}}{\lambda^3} \frac{d^2\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta^2} + \frac{a_{26}}{\lambda^2} \frac{d\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta} + \frac{a_{12}}{\lambda} \sigma_{rp}^{(s)} \right) + v_p^{*(s)}$$

$$\begin{aligned} w_p^{(s)} &= - \left( \frac{a_{22}}{\lambda^4} \frac{d^3\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta^3} + \frac{2a_{26}}{\lambda^3} \frac{d^2\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta^2} + \right. \\ &\left. + \frac{a_{66} + a_{12}}{\lambda^2} \frac{d\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta} + \frac{a_{16}}{\lambda} \sigma_{rp}^{(s)} \right) + w_p^{*(s)} \end{aligned}$$

где

$$\sigma_{r\theta p}^{*(s)} = \frac{1}{\lambda} \left( \zeta \frac{d\sigma_{r\theta p}^{(s-2)}}{d\zeta} + \sigma_{r\theta p}^{(s-2)} - \sigma_{\theta p}^{(s-2)} \right)$$

$$\sigma_{\theta p}^{*(s)} = \frac{1}{\lambda} \left( \zeta \frac{d\sigma_{r\theta p}^{(s-2)}}{d\zeta} + 2\sigma_{r\theta p}^{(s-2)} \right) + \frac{1}{\lambda} \frac{d\sigma_{r\theta p}^{*(s)}}{d\zeta}$$

$$\begin{aligned} v_p^{*(s)} &= \frac{1}{\lambda} \left[ w_p^{(s-2)} - \zeta \left( a_{12}\sigma_{rp}^{(s-2)} + a_{22}\sigma_{\theta p}^{(s-2)} + a_{26}\sigma_{r\theta p}^{(s-2)} \right) - \right. \\ &\left. - \left( a_{22}\sigma_{\theta p}^{*(s)} + a_{26}\sigma_{r\theta p}^{*(s)} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_p^{*(s)} &= \frac{1}{\lambda} \left[ \zeta \frac{dv_p^{(s-2)}}{d\zeta} - v_p^{(s-2)} + \frac{dv_p^{*(s)}}{d\zeta} - a_{26}\sigma_{\theta p}^{*(s)} - a_{66}\sigma_{r\theta p}^{*(s)} - \right. \\ &\left. - \zeta \left( a_{16}\sigma_{rp}^{(s-2)} + a_{26}\sigma_{\theta p}^{(s-2)} + a_{66}\sigma_{r\theta p}^{(s-2)} \right) \right] \quad (2.5) \end{aligned}$$

Для определения  $\sigma_{rp}^{(s)}$  получим следующее дифференциальное уравнение:

$$a_{22} \frac{d^4\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta^4} + 2a_{26}\lambda \frac{d^3\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta^3} + \lambda^2 (a_{66} + 2a_{12}) \frac{d^2\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta^2} + \quad (2.6)$$

$$+2a_{16}\lambda^3 \frac{d\sigma_{rp}^{(s)}}{d\zeta} + a_{11}\lambda^4 \sigma_{rp}^{(s)} = q_p^{(s)}$$

где

$$q_p^{(s)} = \lambda^4 \left( \frac{dw_p^{(s)}}{d\zeta} - a_{12}\sigma_{\theta p}^{(s)} - a_{16}\sigma_{r\theta p}^{(s)} \right) \quad (2.7)$$

Кроме того, напряжения  $\sigma_{rp}^{(s)}$  и  $\sigma_{r\theta p}^{(s)}$  должны удовлетворять условиям отсутствия напряжений на криволинейных сторонах стержня, то есть

$$\sigma_{rp}^{(s)} = \sigma_{r\theta p}^{(s)} = 0 \text{ при } \zeta = \pm 1 \quad (2.8)$$

Решение уравнения (2.6) состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, то есть

$$\sigma_{rp}^{(s)} = \sigma_{r1}^{(s)} + \sigma_{r2}^{(s)} \quad (2.9)$$

В зависимости от вида корней соответствующего (2.6) характеристического уравнения [13]

а)  $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$

б)  $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2$  ( $\beta, \beta_{1,2} > 0$ )

общее решение однородного уравнения будет иметь вид:

а)  $\sigma_{r1}^{(s)} = e^{\alpha\lambda\zeta} [(C_1^{(s)} + \zeta C_2^{(s)}) \cos \beta\lambda\zeta + (C_3^{(s)} + \zeta C_4^{(s)}) \sin \beta\lambda\zeta]$  (2.10)

б)  $\sigma_{r1}^{(s)} = e^{\alpha_1\lambda\zeta} (C_1^{(s)} \cos \beta_1\lambda\zeta + C_2^{(s)} \sin \beta_1\lambda\zeta) +$

$$+ e^{\alpha_2\lambda\zeta} (C_3^{(s)} \cos \beta_2\lambda\zeta + C_4^{(s)} \sin \beta_2\lambda\zeta) \quad (2.11)$$

Используя решение (2.10) или (2.11), удовлетворив условиям (2.8) при  $s = 0$ , получим однородную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных констант  $C_i^{(0)}$ . Из условия существования нетривиального решения получим трансцендентное уравнение для определения  $\lambda$ . Решение  $\sigma_{r1}^{(0)}$ , а также все остальные напряжения и перемещения можно представить по формулам (2.4), в каждом из двух случаев, в виде

$$\sigma_{r1}^{(0)} = A_n^{(0)} F_n(\zeta), \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \lambda_n^{-1} A_n^{(0)} F_n', \dots \quad (2.12)$$

Тогда из условия (2.8), как следствие, получим, что функция и ее производная должны удовлетворять условиям

$$F_n(\pm 1) = F_n'(\pm 1) = 0 \quad (2.13)$$

Функции  $F_n(\zeta)$ , а также трансцендентные уравнения для определения  $\lambda_n$  приведены в работе [11], здесь они не приводятся.

Для последующих приближений, то есть для  $s > 0$  имеем, что  $q_p^{(s)} \neq 0$  и, следовательно, отлично от нуля и частное решение  $\sigma_{r2}^{(s)}$ . Поэтому становится невозможным удовлетворение условиям (2.8) при  $s > 0$ , так как определитель алгебраической системы равен нулю. Чтобы удовлетворить условиям (2.8)

при  $s > 0$ , необходимо привлечь новое решение внутренней задачи, которое взяло бы на себя "добавочные" нагрузки ( $s > 0$ )

$$Z^{\pm(s)} = -\sigma_{r2}^{(s)}(\pm 1), \quad Y^{\pm(s)} = -\left( \frac{1}{\lambda_n} \frac{d\sigma_{r2}^{(s)}}{d\zeta} \right)_{\zeta=\pm 1} + \sigma_{r\theta p}^{(s)}(\pm 1)$$

Аналогичным образом строится решение типа пограничного слоя вблизи торца  $\theta = \Theta$ . Если отсчет вести от торца  $\theta = 0$ , данные этого погранслоя получаются из приведенного формальной заменой  $t$  на  $t_1 = (\Theta - \theta)R_0/h$ .

Найденное в работе решение типа пограничного слоя вместе с решением внутренней задачи позволяют более точно удовлетворять условиям на торцах. Сопряжение этих двух типов решений можно осуществить одним из способов, изложенных в [11].

3. В заключение, в качестве иллюстрации, рассмотрим задачу определения поля напряжений в круговом кольце из изотропного материала, подверженному действию равномерного внутреннего и внешнего давлений. Решение этой полярно-симметричной задачи с помощью функции напряжения можно найти, например, в [14]. С помощью формул (1.6)–(1.10), полагая  $Z^+ = -p_0$ ,  $Z^- = p_1$ , и ограничиваясь первыми несколькими приближениями, будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_r = & [Z_1 + \zeta Z_2]_I - \left[ \frac{h}{R_0} Z_2(\zeta^2 - 1) \right]_{II} + \left[ \frac{h^2}{6R_0^2} Z_2(5 + \nu)(\zeta^3 - \zeta) \right]_{III} + \dots \\ \sigma_\theta = & \left[ \frac{R_0}{h} Z_2 \right]_I + [Z_1 - Z_2\zeta]_{II} + \left[ \frac{h}{6R_0} Z_2((1 - \nu) + \right. \\ & \left. + 3(3 + \nu)\zeta^2) \right]_{III} + \left[ \frac{h^2}{6R_0^2} Z_2((5 + 3\nu - 2\nu^2)\zeta - (11 + 7\nu)\zeta^3) \right]_{IV} + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Таблица 1

$h/R_0$	$\zeta$	$\sigma_r \times p^{-1}$				$\sigma_\theta \times p^{-1}$			
		одно прибл.	два прибл.	три прибл.	точное решение	два прибл.	три прибл.	четыре прибл.	точное решение
0,2	-1	-3	-3	-3	-3	4	4,353	4,402	4,2
	-0,5	-2,5	-2,35	-2,337	-2,24	3,5	3,606	3,598	3,44
	0	-2	-1,8	-1,8	-1,704	3	3,023	3,023	2,904
	0,5	-1,5	-1,35	-1,363	-1,304	2,5	2,606	2,614	2,504
	1	-1	-1	-1	-1	2	2,353	2,303	2,2
0,1	-1	-3	-3	-3	-3	9	9,176	9,188	9,1
	-0,5	-2,5	-2,425	-2,422	-2,38	8,5	8,553	8,551	8,48
	0	-2	-1,9	-1,9	-1,85	8	8,012	8,012	7,95
	0,5	-1,5	-1,425	-1,353	-1,395	7,5	7,553	7,557	7,49
	1	-1	-1	-1	-1	7	7,127	7,114	7,1

Сравнение с точным решением показывает, что первое приближение для  $\sigma_r$  и первые два приближения для  $\sigma_\theta$  совпадают с соответствующими первыми



членами ряда Тейлора точного решения, если в точном решении заранее пренебречь членами порядка  $(h/R_0)^2$ .

В табл.1 приведены результаты численного расчета при  $p_i = 3p$ ,  $p_0 = p$ ,  $h/R_0 = 0,2; 0,1$ .

Из табл.1 видно, что максимальные отклонения значений напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  от точного решения составляют соответственно 5,6% и 4,8% при  $h/R_0 = 0,2$  и 2,7% и 0,97% при  $h/R_0 = 0,1$ .

## INVESTIGATION OF STRESS-STRAIN STATE OF A CURVED BAR BY ASYMPTOTIC INTEGRATION METHOD

Yu.M.BAGDASARIAN, A.M.KHACHATRIAN

ԿՈՐ ԶՈՂԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ-ՂԵՖՈՐՄԱՅԻՈՆ ՎԻՃԱԿԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱ-  
ՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԻՆՏԵԳՐԱՄԱՆ ՄԵԹՈՂՈՎ

Յու.Մ. ԲԱԳԴԱՍԱՐՅԱՆ, Ա.Մ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

### Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկված է գլանային անիզոտրոպիայով օժտված կոր ձողի հարթ լարվածային-ղեֆորմացիոն վիճակի ճշգրիտ որոշման հարցը:

Խնդրի լուծումը ներկայացված է երկու տեսակ լուծումների գումարով՝ հիմնական լարվածային վիճակը բնութագրող լուծման եւ սահմանային շերտի տիպի: Նիմնական լարվածային վիճակը բնութագրող հավասարումները զրոյական մոտավորությունում համեմատված են Կիրիսոնֆ-Կլեբշի դասական հավասարումների հետ:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Friedrichs K.O., Dressler R.F. A boundary-layer theory for elastic plates. — Comm.Pure and Appl.Math., 1961, v.14, no.1, pp.1-33.
2. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. — ПММ, 1962, т.26, вып.4, с.668-686.
3. Гольденвейзер А.Л. О двумерных уравнениях общей линейной теории тонких упругих оболочек.—В сб. Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М.: Наука, 1969, 692с.
4. Гольденвейзер А.Л. Погранслои и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки.—ПММ, 1969, т.33, вып.6, с.996-1028.
5. Агаловян Л.А. К теории изгиба ортотропных пластин.—МТТ, 1966, но.6, с.116-121.
6. Агаловян Л.А. О некоторых соотношениях линейной теории анизотропных оболочек и возможностях их уточнения.—МТТ, 1972, но.1, с.109-120.
7. Агаловян Л.А. О погранслое ортотропных пластинок.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1973, т.24, но.2, с.27-43.

8. Понятовский В.В. Асимптотические разложения в линейной теории плоских стержней.— В кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Л., 1970, с.341-351.
9. Понятовский В.В. Асимптотическая теория изгиба кривого бруса.— В кн.: Исследования по упругости и пластичности, но.9, Изд. ЛГУ, 1973, с.81-93.
10. Агаловян Л.А., Хачатрян Ш.М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния ортотропной полосы.— Уч.записки ЕГУ, 1977, но.1, с.22-30.
11. Хачатрян Ш.М. К определению напряженно-деформированного состояния анизотропной полосы.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т.29, но.6, с.19-32.
12. Прочность. Устойчивость. Колебания. Том I. Справочник в трех томах. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко.— М.: Машиностроение, 1968, 831 с.
13. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.— М.: Наука, 1977, 416с
14. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости.— М.: Наука, 1979, 560 с.

*Московский коммерческий институт  
Институт механики АН Армении*

*Поступила в редакцию  
20. IV.1990*