ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 6, 1990 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

ГАЛОЯН В. Ц., КАЗАРЯН К. Б.

В настоящей работе рассматриваются нелинейные радиальные колебания кругового кольца под действием внешней периодической радиальной нагрузки. Рассмотрение ведется в рамках модели плоских деформаций кольца [1, 2]. При этом колебания, возбуждаемые внешней нагрузкой в разных областях пространства параметров, имеют различный характер. Основная цель данной работы—указать те области изменения параметров системы, где возможны хаотическке нелинейные колебания.

§ 1. *Колебания кругового кольца при неравномерной нагрузке*

Динамические уравнения и граничные условия нелинейной теории стержневых систем выражаются или з компонентах вектора перемещений, или же в компонентах тензора усилий и изгибных деформаций [3]. Уравнения в перемещениях обычно являются более сложными—они более высокого порядка—но они очень удобны в задачах о колебаниях систем. В дальнейшем мы используем именно этот подход, при этом не будем учитывать деформации сдвига, силы и моменты инерции вращения и растяжение срединной поверхности кольца. Как показано в работе [14], эти факторы играют сравнительно несущественную роль, если длина волны рассматриваемой моды велика по сравнению с толщиной кольца.

Уравнения динамики плоских деформаций гибкого кругового кольца, находящегося под действием неравномерной внешней нагрузки, имеют вид [1, 2]

$$-\frac{\partial N}{\partial s}+\frac{Q}{\rho}=q_s,\quad \frac{\partial Q}{\partial s}+\frac{N}{\rho}=q_z-q,\quad \frac{\partial M}{\partial s}=Q,\quad M=EI\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right) \tag{1.1}$$

где M, N, Q — изгибающий момент, тангенциальное и радиальное усилия в сечении кольца, ρ—радиус кривизны, R—радиус недеформированного кольца, E—модуль упругости, I—момент инерции поперечного сечения кольца. В уравнениях (1.1) q_z и q_s —суммы сил инерции и трения в радиальном и тангенциальном направлениях

$$q_z=m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial w}{\partial t},\quad q_s=m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial v}{\partial t}$$

w, v—прогибы в радиальном направлении и вдоль дуги кольца, η—коэффициент демпфирования вязкого трения, m—масса единичной длины кольца; прогибы w и v связаны между собой соотношением

$$\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{w}{\rho}$$

В дальнейшем используется полярная система координат (r, φ) с началом в центре кольца. Для кривизны используем следующее, линейное относительно w, приближение

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2}(w+w'') \tag{1.2}$$

где штрих означает дифференцирование по φ ($s=R\varphi$). Таким образом, мы ограничимся нелинейными членами, обусловленными геометрией стержня.

Для внешнего периодического давления примем следующее выражение:

$$q(s, t)=q_1\sin(n\varphi)\cos(\omega t)+q_0$$

Из уравнений (1.1) после некоторых преобразований получаем следующее уравнение:

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial w}{\partial t}+R\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left\{\rho\left(q_z-\frac{\partial^2 M}{\partial s^2}\right)\right\}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 M}{\partial s^2}-\frac{\partial(1/\rho)}{\partial s}\frac{\partial M}{\partial s}=0 \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3)—это неоднородное уравнение в частных производных относительно $w(s, t)$. Для перехода к конечномерной системе применим процедуру Бубнова-Галеркина. Как показано в работе [3], колебания кольца под воздействием внешней периодической нагрузки могут совершаться либо по одной, либо по двум связанным изгибным модам. При некоторых условиях нелинейное взаимодействие приводит к возбуждению второй моды, которая также принимает участие в движении. Но, в основном, подход, основанный на рассмотрении одной пространственной моды колебаний, оказывается достаточным и можно принять следующее приближение для прогиба:

$$w(\varphi, t)=f(t)\sin(n\varphi)$$

где n—целое число.

Тогда в кубическом приближении относительно f получим следующее обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение с безразмерными коэффициентами

$$\ddot{A}+\alpha\dot{A}-A-A^3=\delta(1+\gamma A^2)\cos(\Omega\tau) \tag{1.4}$$

где точка обозначает дифференцирование по безразмерному времени,

$$A=f/R,\ \alpha=\eta/(mb^{1/2}),\ \delta=g(c/b^3)^{1/2},\ \gamma=bd/c,\ \Omega=\omega/b^{1/2}$$

$$b=\frac{1}{m}\frac{n^2(n^2-1)}{n^2+1}\left(\frac{q_0}{R}-\frac{EI(n^2-1)}{R^4}\right)$$

$$c=\frac{1}{m}\frac{n^2(n^2-1)}{4(n^2+1)^2}\left[\frac{q_0}{R}(-3n^4+2n^2+3)+\frac{EI}{R^4}n^2(n^2-1)(3n^2+1)\right] \quad (1.5)$$

$$d=\frac{1}{4}\frac{n^2(n^2-1)(n^6-n^4-n^2-1)}{n^2+1}, \quad g=\frac{n^2}{n^2+1}\frac{q_0}{mR}$$

Как показано в [4], при малых n учет кубической нелинейности является существенным.

В настоящей работе рассматривается случай, когда коэффициенты уравнения (1.4) являются положительными, что накладывает следующее ограничение на внешнюю нагрузку:

$$\frac{E}{R^3}(n^2-1)<q_0<\frac{EI}{R^3}\frac{n^2(n^2-1)(3n^2+1)}{3n^4-2n^2-3}$$

Иными словами, нами ставится задача возможности существования хаотического режима в закритической области неустойчивости, когда величина внешней нагрузки превышает статическое критическое значение нелинейной задачи.

2. Качественное исследование основного уравнения

Основное уравнение (1.4), описывающее динамику системы, является нелинейным уравнением типа Дуффинга. Для качественного исследования этого уравнения применим метод, основанный в работе [5] и подробно разработанный для классического уравнения Дуффинга в работе [6]. С его помощью можно указать границы области изменения параметров, где возможно хаотическое движение в качестве решения уравнения. При этом уравнение (1.4) мы будем рассматривать как неавтономное возмущение гамильтоновой системы, которое сохраняет некоторые черты невозмущенной системы.

При малых возмущениях (при малых a и δ) уравнение (1.4) допускает периодическое решение, которое можно найти, используя метод усреднения [6].

Невозмущенная автономная система, соответствующая уравнению (1.4), имеет вид

$$\dot{x}_1=x_2, \quad \dot{x}_2=x_1-x_1^3 \quad (2.1)$$

с гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{4}x_1^4$$

Эта система на фазовой плоскости (x_1, x_2) имеет неподвижные точки: (0,0), (1,0), (−1,0) первая из которых является неподвижной точкой типа седла, а две другие—центрами. При этом возмущенная система (1.4) имеет периодическое решение Γ_δ [5], которое притягивается при $\delta\to 0$ к седловой точке.

Определим характеристики этого периодического движения. Перепишем (1.4) в виде системы уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + x_1 - x_1^3 + \delta(1 + \gamma x_1^3)\cos(\Omega\tau) \qquad (2.2)$$

Произведя замену переменных

$$z_1 = x_1\cos(\Omega\tau) - \frac{1}{\Omega}x_2\sin(\Omega\tau), \quad z_2 = -x_1\sin(\Omega\tau) - \frac{1}{\Omega}x_2\cos(\Omega\tau)$$

получим уравнения относительно z_1 и z_2. Согласно теореме о среднем, заменим правые части полученных уравнений на их усредненные по периоду выражения. Тогда получим новую, автономную систему уравнений, которая в полярной системе координат имеет простой вид

$$\dot{z} = -\frac{z}{\Omega}\left(\Omega\alpha + \frac{1}{2}\sin\theta\right), \quad \dot{\theta} = \frac{1}{\Omega}\left(-\Omega^2 + \frac{3}{4}z^2 - \cos\theta\right) \qquad (2.3)$$

Неподвижная точка (z^*, θ^*) этой системы определяется выражениями

$$\theta^* = -\arcsin(2\alpha\Omega), \quad z^* = \left[\frac{4}{3}\Omega^2 + \frac{4}{3}(1 - \alpha^2\Omega^2)^{1/2}\right]^{1/2} \qquad (2.4)$$

Следовательно, при выполнении порогового условия $\alpha^2\Omega^2 < 1$ в системе установятся колебания с законом движения (2.3).

При увеличении возмущения (δ и α), входящие и выходящие сепаратрисы седловой точки не совпадают—периодическое решение разрушается. При выполнении некоторых условий эти кривые пересекаются. Как показано в работе [5], расстояние между устойчивыми и неустойчивыми ветвями сепаратрисы определяется некоторой функцией (функцией Мельникова), которая в нашем случае имеет вид

$$\Delta_i(t_0) = -\int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}[\delta(1 + \gamma x^2)\cos(\Omega\tau) - \alpha\dot{x}]d\tau$$

где $x(\tau - \tau_0) = \sqrt{2}\operatorname{sech}(\tau - \tau_0)$—гомоклиническая орбита точки (0, 0) невозмущенной системы (1.5).

Вычисляя соответствующие интегралы, получим следующее выражение для $\Delta_i(\tau_0)$

$$\Delta_i(\tau_0) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\delta\Omega[3 + \gamma(\Omega^2 + 1)]\operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2}\Omega\right)\sin(\Omega\tau_0) + \frac{4}{3}\alpha \qquad (2.5)$$

Полученная функция является периодической по τ_0. Согласно [5], если функция $\Delta_i(\tau_0)$ имеет нули, то устойчивое и неустойчивое многообразия периодической траектории Γ, пересекаются в бесконечном числе точек. В этом случае имеем гомоклиническую структуру в устойчивом множестве и, следовательно, странный аттрактор. Исходя из (2.5), можно получить связь между критическими значениями параметров системы, которые определяют границу появления хаотического движения

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{\delta^*\Omega^*}{\alpha^*}[\gamma^*(\Omega^{*2} + 1) + 3]\operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2}\Omega^*\right) = 1 \qquad (2.6)$$

где звездочкой обозначены соответствующие критические значения.

Для медного кольца кругового сечения ($E=1,23 \cdot 10^{11}$ П) с радиусом 10^{-3} м, $R=10^{-1}$ м, $\eta=10^{-2}$ сек$^{-1}$, $n=2$ имеем следующее пороговое значение: $q_*=24,84$ Н/м^2. Для такого кольца в табл. 1 приведены значения параметров системы, а также критические значения δ^*, Q_1^* в зависимости от F, где $F_1=q_1/q_*$, $F=q_0/q_*$, для которых возможно хаотическое движение.

Таблица 1

Значения параметров системы в зависимости от F

F	F_1	ω_0	δ^*	[illegible]	q_1/q_0
1,01	1,3008	$0,8139 \cdot 10^5$	27,5496	1,060	1,288
1,1	2,0575	$2,5737 \cdot 10^5$	1,1706	14,682	1,871
1,2	1,2591	$3,6398 \cdot 10^5$	0,1914	51,388	1,049
1,3	0,3224	$4,4578 \cdot 10^5$	0,0133	308,331	0,248

Как видно из табл. 1, экспериментально реализуемые условия возможного возникновения хаотического движения, при которых $q_1/q_0<1$ и δ^* имеет не очень большое значение, достигаются в узком интервале значений параметров: $1,1<F<1,3$ и $2,06>F_1>0,32$, что может накладывать определенные трудности при их реализации. При этом граница области хаотического движения не обязательно должна точно определяться условием (2.6). Возможно существование области параметров (δ, Ω), где имеется гомоклиническая структура, которая не является притягивающей. С другой стороны наличие гомоклинической структуры не является необходимым условием возникновения хаотического движения [7]. Окончательные ответы на эти вопросы можно получить с помощью численного моделирования уравнения (1.4).

§ 3. Колебания кольца при равномерной нагрузке

Уравнения динамики плоской деформации гибкого кругового кольца, находящегося под действием равномерно распределенной внешней нагрузки, примем в виде [2,8]

$$-\frac{\partial N}{\partial s}+\frac{Q}{\rho}=q_s, \quad \frac{\partial Q}{\partial s}+p_0R\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)+\frac{N}{\rho}=q_z \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial M}{\partial s}=Q, \quad M=EI\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)$$

Уравнения (3.1) можно получить из более общих уравнений (1.1), принимая, что движение кольца начинается с момента приложения внешней нагрузки p_0.

Для периодического по времени внешнего давления примем следующее выражение: $p_0=q_0+q_1\cos(\omega t)$. Используя приближение (1.2) вместо уравнений (3.1), получим одно уравнение

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial w}{\partial t}+R\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[\rho\left(q_z-\frac{\partial^2 M}{\partial s^2}\right)-p_0R\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial M}{\partial s}\right]=0 \tag{3.2}$$

Применяя метод Бубнова-Галеркина в одномодовом приближении и ограничиваясь кубическим относительно A приближением, получим следующее уравнение с безразмерными коэффициентами:

$$\ddot{A}+\alpha\dot{A}-A+A^3=\delta A(1+\gamma A^2)\cos(\Omega\tau) \tag{3.3}$$

где коэффициенты α, δ, γ, Ω определяются уравнением (1.5).

Уравнение (3.3) в отличие от (1.4)—однородное уравнение. Но его качественное исследование можно провести по схеме, изложенной в § 1. В частности, невозмущенная система (случай $\delta=0$) уравнения (3.3) идентична невозмущенной системе (2.1). При ненулевой, но малой δ система (3.3) совершает периодическое движение с характеристиками, определяемыми (2.3) и (2.4). При увеличении внешней нагрузки периодическое решение разрушается и на фазовой плоскости появляется множество со сложной структурой. Для его характеристики снова введем в рассмотрение функцию Мельникова, которая в данном случае имеет вид

$$\Delta_\delta(t_0)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{x}[\delta x(1-\gamma x^2)\cos(\Omega\tau)-\alpha\dot{x}]d\tau \tag{3.4}$$

где $x(t-t_0)$ —гомоклиническая орбита неподвижной точки (0,0) типа седла, определяемая уравнением $x(t-t_0)=\sqrt{2}\operatorname{sech}(t-t_0)$.

Произведя соответствущие вычисления, получим следующее выражение для $\Delta_\delta(t_0)$:

$$\Delta_\delta(t_0)=\pi\Omega\delta\left[\frac{2}{3}\gamma\left(1+\frac{\Omega^2}{4}\right)-1\right]\operatorname{cosech}\left(\frac{\pi\Omega}{2}\right)\sin(\Omega t_0)+\frac{4}{3}\alpha \tag{3.5}$$

Отсюда можно получить критическое для δ значение

$$\delta^*=\frac{4\alpha}{3\pi\Omega^2}\frac{\operatorname{sh}(\pi\Omega/2)}{\left|\frac{2\gamma}{3}\left(1+\frac{\Omega^2}{4}\right)-1\right|} \tag{3.6}$$

При выполнении условия $\delta>\delta^*$ функция (3.5) имеет нули и, согласно критерию Мельникова, на фазовой плоскости появляется множество типа странного аттрактора.

Для сравнения рассмотрим модельную систему, описанную в § 1. Для нее в табл. 2 приведены значения основных параметров и критических значений.

Таблица 2

Значения параметров системы (3.3) в зависимости от F

F	F_1	δ^*	δ^*/a_1	q_0/q_1
1,01	1,60	22,82	14,31	0,63
1,1	1,56	2,23	1,43	0,71
1,2	0,49	0,35	0,72	2,46
1,3	0,09	0,04	0,48	14,05
1,32	0,04	0,02	0,45	37,18

Приведенные численные результаты показывают, что, как и в случае системы (1.4), экспериментально реализуемые условия возникновения хаотического движения возможны в узком интервале значений параметров. Для системы (3.3) границы этих интервалов отличаются от значений, полученных для (1.4) и критические условия имеют вид:

$$1{,}30 < F < 1{,}32; \quad 0{,}04 < F_1 < 0{,}10.$$

Как и для уравнения (1.4), окончательный ответ на вопрос о границах хаотического движения можно получить с помощью численного моделирования уравнения (3.3).

Полученные результаты позволяют утверждать, что описанные модельные механические системы, движения которых подчиняются детерминистическим дифференциальным уравнениям, допускают как периодическое, так и апериодическое, хаотическое движение.

ABOUT ONE NONLINEAR PROBLEM OF CHAOTIC VIBRATION OF A CIRCULAR RING

V. TS. GALOYAN, K. B. KAZARIAN

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՕՂԱԿԻ ՔԱՈՍԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Ծ. ԳԱԼՈՅԱՆ, Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է շրջանային օղակի դինամիկ ոչ գծային վարքը արտաքին շառավղային պարբերական բեռի ազդեցության տակ: Հարթ դեֆորմացիաների մոդելում ընտարկված են համաչափ և անհամաչափ բեռների դեպքերը: Համակարգը նկարագրվում է Դուֆինգի տիպի հավասարումով, որը նույն է ասելու ինչպես պարբերական, այնպես էլ քաոսային լուծումներ: Վերջին դեպքում համակարգի փազային հարթության վրա առաջանում է բարդ բազմաձևություն՝ տարօրինակ-ձգիչներ: Բերված են կրիտիկական պարամետրերի արժեքների հաշվարկի արդյունքները, որոնց դեպքում անցում է կատարվում պարբերական շարժումից դեպի քաոսայինին:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Reissner E.* On one-dimensional finite-strain beam theory.— ZAMP, 1972, v. 23, № 4.
2. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем.— М.: Наука, 1967. 984 с.
3. Simmonds J. G., Accurate nonlinear equations for the free vibrations of circular elastic ring.— Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1979, v. 46, № 1.
4. *Ивенсен М.* Нелинейные изгибные колебания тонких круговых колец.—Прикладная механика, 1966, т. 33, № 3.
5. *Мельников В. К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях.—Тр. Московского математического общества, т. 12, 1963.
6. *Holmes P. J.* A nonlinear oscillator with a strange attractor.— Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1979, v. 292A, № 1394.

7. *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* Стохастические и хаотические колебания—М.: Наука, 1987. 424 с.
8. *Динник А. Н.* Устойчивость арок.—М.: ОГИЗ. 1946. 128 с.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория АН Армении

Институт механики
АН Армении

Поступила в редакцию
4.XII.1989