

УДК 539.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК  
 МИНИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА

БАРСЕГЯН Г. Н., КИРАКОСЯН Р. М.

Рассматривается задача проектирования однослойной прямоугольной пластинки минимального объема, изготовленной из упругого ортотропного материала.

Следуя [1], показывается, что если на поверхностях пластинки упругий потенциал принимает постоянное значение, то объем такой пластинки является минимальным в классе пластинок близкой конфигурации при соответствующем ограничении на прочность. Получена разрешающая система уравнений задачи. Разработан алгоритм и составлена программа численной реализации решения на ЭВМ. Проведено сравнение минимального объема с объемом соответствующей пластинки постоянной толщины при различных отношениях сторон.

1. Прямоугольная однослойная пластинка, размерами  $2a$  и  $2b$  в плане, несет распределенную поперечную нагрузку интенсивности  $q(x, y)$ . Координатная плоскость  $xy$  совмещена со срединной плоскостью недеформированной пластинки. Предполагается, что имеют место основные допущения классической теории изгиба тонких пластинок. Считается, что материал пластинки является ортотропным и подчиняется обобщенному закону Гука [2].

Напряженное состояние пластинки можно представить моментами  $M_x, M_y, M_{xy}$ , которые удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (1.1)$$

и связаны с кривизнами срединной поверхности

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.2)$$

следующими соотношениями:

$$M_x = \frac{h^3}{12} (B_{11}\chi_x + B_{12}\chi_y), \quad M_y = \frac{h^3}{12} (B_{12}\chi_x + B_{22}\chi_y) \quad (1.3)$$

$$M_{xy} = \frac{h^3}{12} B_{66}\chi_{xy}$$

Здесь  $w$  — прогиб,  $h$  — толщина,

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \frac{a_{22}}{\Omega_0}, & B_{22} &= \frac{a_{11}}{\Omega_0}, & B_{12} &= -\frac{a_{12}}{\Omega_0} \\
 B_{66} &= \frac{1}{a_{66}}, & \Omega_0 &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2
 \end{aligned}
 \quad (1.4)$$

$a_{ij}$ —упругие постоянные материала.

Компоненты деформации определяются формулами

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.5)$$

где  $z$ —поперечная координата.

С учетом (1.2) и (1.5) выражения моментов (1.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{h^2}{6} (B_{11}\varepsilon_x^0 + B_{12}\varepsilon_y^0), & M_y &= \frac{h^2}{6} (B_{12}\varepsilon_x^0 + B_{22}\varepsilon_y^0) \\
 M_{xy} &= \frac{h^2}{6} B_{66}\varepsilon_{xy}^0
 \end{aligned}
 \quad (1.6)$$

Здесь через  $\varepsilon_x^0$ ,  $\varepsilon_y^0$ ,  $\varepsilon_{xy}^0$  обозначены значения компонент деформации на поверхности пластинки  $z = h/2$ .

Разрешая систему (1.6) относительно  $\varepsilon_x^0$ ,  $\varepsilon_y^0$ ,  $\varepsilon_{xy}^0$  и имея в виду соотношения (1.4), получим

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \frac{6}{h^2} (a_{11}M_x + a_{12}M_y), & \varepsilon_y^0 &= \frac{6}{h^2} (a_{12}M_x + a_{22}M_y) \\
 \varepsilon_{xy}^0 &= \frac{6}{h^2} a_{66}M_{xy}
 \end{aligned}
 \quad (1.7)$$

Для упругого потенциала, отнесенного к единице объема пластинки, имеем [2]

$$U = \frac{1}{2} (a_{11}\varepsilon_x^2 + a_{22}\varepsilon_y^2 + 2a_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y + a_{66}\varepsilon_{xy}^2) \quad (1.8)$$

С учетом (1.4) и закона Гука, выражение (1.8) можно представить в виде

$$U = \frac{1}{2} (B_{11}\varepsilon_x^2 + B_{22}\varepsilon_y^2 + B_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y + B_{66}\varepsilon_{xy}^2) \quad (1.9)$$

Условие постоянства упругого потенциала (1.9) на поверхностях пластинки  $z = \pm h/2$  имеет вид

$$U \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} = \frac{1}{2} [B_{11}(\varepsilon_x^0)^2 + B_{22}(\varepsilon_y^0)^2 + 2B_{12}\varepsilon_x^0\varepsilon_y^0 + B_{66}(\varepsilon_{xy}^0)^2] = \frac{C}{8} = \text{const} \quad (1.10)$$

Подставляя (1.7) в (1.10), получаем

$$U \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} = \frac{18}{h^2} (a_{11}M_x^2 + a_{22}M_y^2 + 2a_{12}M_xM_y + a_{66}M_{xy}^2) = \frac{C}{8} = \text{const} \quad (1.11)$$

Покажем, что это условие обеспечивает минимальный объем в классе пластинок близкой конфигурации.

Для пластических пластинок известно [1], что если в предельном состоянии существует поле кинематически возможных деформаций, совместимое с этим состоянием, то условие

$$\frac{\partial D}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} (M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy}) = \text{const} \quad (1.12)$$

обеспечивает минимальность объема в классе однослойных безреберных пластинок близкой конфигурации. Здесь  $D$  — диссипация энергии деформирования, приходящейся на единицу площади срединной плоскости пластинки. Как обычно, поле деформацией называется совместным с предельным состоянием, если вектор обобщенных деформаций  $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$  в каждой точке направлен по нормали к поверхности предельного состояния.

Этот результат можно распространить и на случай упругих анизотропных пластинок путем введения формальных аналогов предельной поверхности и ассоциированного закона деформирования. При этом диссипацию энергии  $D$  следует заменить соответствующей работой внутренних моментов на изменения кривизны пластинки. Следуя [1, 3], предельным будем называть состояние пластинки, когда упругий потенциал (1.8) принимает заданное постоянное значение на поверхностях пластинки.

Имея в виду (1.11), уравнение предельной поверхности пластинки представим в виде:

$$2\psi(M_{ij}) = a_{11}M_x^2 + a_{22}M_y^2 + 2a_{12}M_xM_y + a_{66}M_{xy}^2 - \frac{Ch^4}{144} = 0 \quad (1.13)$$

Используя выражения (1.3), с учетом (1.13) получим

$$\begin{aligned} \chi_x &= \lambda \frac{\partial \psi}{\partial M_x} = \frac{12}{h^3} (a_{11}M_x + a_{12}M_y) \\ \chi_y &= \lambda \frac{\partial \psi}{\partial M_y} = \frac{12}{h^3} (a_{12}M_x + a_{22}M_y) \\ \chi_{xy} &= \lambda \frac{\partial \psi}{\partial M_{xy}} = \frac{12}{h^3} a_{66}M_{xy} \end{aligned} \quad (1.14)$$

где  $\lambda = \frac{h^3}{12}$ .

Таким образом, вектор с компонентами, пропорциональными  $\chi_{ij}$ , направлен по внешней нормали к предельной поверхности  $\psi(M_{ij})$  и, следовательно, поле деформаций совместимо с предельным состоянием. В силу этого для минимальности объема остается выполнение лишь условия (1.12).

Покажем, что при (1.11) это условие всегда выполняется. С учетом (1.11) и (1.14) условие (1.12) приводится к виду

$$\frac{\partial D}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{2h}{3} U \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} \right) = \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{hC}{12} \right) = \frac{C}{12} = \text{const} \quad (1.15)$$

Таким образом, условие (1.12) для равнопрочной пластинки выполняется. Это означает, что равнопрочная пластинка обладает минимальным объемом среди однослойных безреберных пластинок близкой конфигурации.

Подставляя выражения моментов (1.3) в условие равнопрочности (1.13) и в уравнение равновесия (1.1), с учетом (1.2) и (1.4), получим следующую разрешающую систему уравнений относительно искомого  $h$  и  $w$ :

$$\begin{aligned} B_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + B_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4B_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = Ct^{-\frac{2}{3}} \\ t \left[ B_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + 2 \frac{\partial t}{\partial x} \left[ B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \right. \\ \left. + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + 2 \frac{\partial t}{\partial y} \left[ (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] + \\ + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \left( B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \left( B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\ + 4B_{66} \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 12q \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $t = h^3$ .

Таким образом, решение задачи проектирования однослойной ортотропной упругой прямоугольной пластинки минимального объема сводится к решению системы (1.16) при соответствующих граничных условиях.

2. Пользуясь безразмерными обозначениями

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{an}, \quad n = \frac{b}{a}, \quad P_{ij} = \frac{B_{ij}}{E} \\ w = \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{w}{a} \left( \frac{Eq^2}{C^3} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad t = \frac{t}{24\sqrt{3}a^3} \left( \frac{EC}{q^2} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (2.1)$$

систему (1.16) можно представить в виде

$$\begin{aligned} P_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + \frac{P_{22}}{n^4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)^2 + \frac{2P_{12}}{n^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{4P_{66}}{n^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 = \frac{16}{9} t^{-\frac{2}{3}} \\ t \left[ P_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{2(P_{12} + 2P_{66})}{n^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{P_{22}}{n^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} \right] + \\ + 2 \frac{\partial t}{\partial \xi} \left( P_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \frac{P_{12} + 2P_{66}}{n^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) + 2 \frac{\partial t}{\partial \eta} \left( \frac{P_{12} + 2P_{66}}{n^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{P_{22}}{n^4} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \gamma_1^3} \Big) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi^2} \left( P_{11} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{P_{12}}{n^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma_1^2} \right) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial \gamma_1^2} \left( \frac{P_{12}}{n^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{P_{22}}{n^4} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma_1^2} \right) + \\
 & + \frac{4P_{06}}{n^2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi \partial \gamma_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \gamma_1} = \frac{4}{3} \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Здесь  $E$  — постоянная, имеющая размерность напряжения.

Систему (2.2) можно решить по той же схеме, что и систему задачи проектирования однослойной прямоугольной идеально-пластической пластинки минимального объема [4], поскольку эти системы отличаются друг от друга лишь значениями постоянных коэффициентов. В случае изотропного упругого несжимаемого материала система (2.2) полностью совпадает с соответствующей системой задачи проектирования однослойной изотропной идеально-пластической пластинки минимального объема.

Численное решение основывается на конечно-разностном представлении системы уравнений (2.1) и соответствующих граничных условий. Оно выполняется путем дискретного представления приближений искомых функций  $\omega$  и  $\mu$  на прямоугольной сетке со сторонами, параллельными координатным осям. Полученная система конечно-разностных уравнений решается методом итераций.

В качестве примера рассмотрим задачу проектирования шарнирно опертой по всему контуру прямоугольной пластинки при действии равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности  $q_0$ . Срединная плоскость пластинки разбита на 196 равных прямоугольных частей. Для постоянного материала приняты следующие значения:

$$\frac{B_{11}}{E} = 1,5; \quad \frac{B_{12}}{E} = 0,6; \quad \frac{B_{22}}{E} = 0,75; \quad \frac{B_{06}}{E} = 0,2 \quad (2.3)$$

В случае бесконечно длинной полосы, когда имеет место цилиндрический изгиб, решение задачи получается в виде

$$h_{\text{пол.}} = \sqrt{\frac{6q_0}{\sqrt{B_{11}C}}} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (2.4)$$

С учетом (2.4) для объема единичной длины полосы имеем

$$V_{\text{пол.}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{6q_0}{\sqrt{B_{11}C}}} a^2 \quad (2.5)$$

Для безразмерного значения объема единичной длины полосы, с учетом (2.3) и (2.5), получается

$$\bar{V}_{\text{пол.}} = \frac{V_{\text{пол.}}}{a^2} \left( \frac{EC}{q_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{2} \sqrt[4]{24} \approx 3,477 \quad (2.6)$$

С целью сравнения результатов рассмотрена также пластинка постоянной толщины при тех же граничных условиях.

Имея в виду известное решение задачи поперечного изгиба [5], при одинаковом условии прочности, для пластинки постоянной толщины получается

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\text{пост.}} = & \frac{h_{\text{пост.}}}{a} \left( \frac{EC}{q_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{16\sqrt{3}n}{\pi^2} \left[ P_{11}n^4 \times \right. \\ & \times \left( \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{m}{k} \frac{\sin \frac{\pi m \xi}{2} \sin \frac{\pi k \eta}{2}}{P_{11}(mn)^2 + 2(P_{12} + 2P_{66})(mkn)^2 + P_{22}n^4} \right)^2 + \\ & + P_{22} \left( \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{k}{m} \frac{\sin \frac{\pi m \xi}{2} \sin \frac{\pi k \eta}{2}}{P_{11}(mn)^2 + 2(P_{12} + 2P_{66})(mkn)^2 + P_{22}n^4} \right)^2 + \\ & + 2P_{12}n^2 \left( \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{m}{k} \frac{\sin \frac{\pi m \xi}{2} \sin \frac{\pi k \eta}{2}}{P_{11}(mn)^2 + 2(P_{12} + 2P_{66})(mkn)^2 + P_{22}n^4} \right) \times \\ & \times \left( \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{k}{m} \frac{\sin \frac{\pi m \xi}{2} \sin \frac{\pi k \eta}{2}}{P_{11}(mn)^2 + 2(P_{12} + 2P_{66})(mkn)^2 + P_{22}n^4} \right) + \\ & \left. + 4P_{66}n^2 \left( \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi m \xi}{2} \cos \frac{\pi k \eta}{2}}{P_{11}(mn)^2 + 2(P_{12} + 2P_{66})(mkn)^2 + P_{22}n^4} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}} \quad (2.7) \end{aligned}$$

Безразмерное значение объема единичной длины пластинки постоянной толщины определяется по формуле

$$\bar{V}_{\text{пост.}} = \frac{V_{\text{пост.}}}{2a^2b} \left( \frac{EC}{q_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} = 2\bar{h}_{\text{пост.}} \quad (2.8)$$

Аналогичным образом для полосы постоянной толщины имеем

$$\bar{h}_{\text{пол. пост.}} = \frac{h_{\text{пол. пост.}}}{a} \left( \frac{EC}{q_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{2\sqrt{16}}{\sqrt{\pi} \sqrt{P_{11}}} \sqrt{\left| \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{\pi m \xi}{2} \right|} \quad (2.9)$$

Безразмерное значение объема единичной длины полосы постоянной толщины на основе (2.9) имеет вид

$$\bar{V}_{\text{пол. пост.}} = \frac{V_{\text{пол. пост.}}}{a^2} \left( \frac{EC}{q_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} = 2\bar{h}_{\text{пол. пост.}} \quad (2.10)$$

В табл. I представлены безразмерные значения объема единичной длины пластинки постоянной толщины (2.9) при различных отношениях сторон пластинки и чисел удержанных слагаемых в двойных рядах (2.7).

Как видно из табл. I, сходимость безразмерных значений объема можно считать практически достигнутой при числе слагаемых 961.

В табл. 2 представлены безразмерные значения объема единичной длины равнопрочной пластинки (2.8) при различных отношениях сторон. Там же приведены соответствующие значения для пластинки и полосы постоянной толщины. В последней строке

Таблица 1

$b/a$	1	2	5	10	50	100
900	3,568	4,331	4,450	4,434	4,435	4,448
961	3,568	4,331	4,450	4,434	4,437	4,455
1024	3,568	4,331	4,450	4,434	4,437	4,455

Таблица 2

$b/a$	1	2	5	10	50	100	$\infty$
$\bar{V}$	2,510	3,008	3,274	3,346	3,386	3,388	3,477
$\bar{V}_{\text{пост.}}$	3,568	4,331	4,451	4,434	4,437	4,455	4,428
$\frac{\bar{V}_{\text{пост.}} - \bar{V}}{\bar{V}}$	42,2%	44%	35,9%	32,5%	31%	31,5%	27,4%

Таблица 3

$\epsilon$	0	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	1
0	2,038	2,020	1,964	1,865	1,714	1,484	1,117	0
1/7	2,010	1,993	1,936	1,838	1,689	1,463	1,102	0
2/7	1,935	1,917	1,862	1,765	1,620	1,403	1,059	0
3/7	1,826	1,809	1,753	1,658	1,517	1,311	0,991	0
4/7	1,681	1,664	1,608	1,514	1,376	1,181	0,891	0
5/7	1,474	1,457	1,404	1,314	1,179	0,995	0,746	0
6/7	1,127	1,114	1,072	1,000	0,892	0,744	0,556	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0

табл. 2 представлен размер выигрыша в объеме оптимальной пластинки по сравнению с пластинкой постоянной толщины.

В табл. 3 приведены безразмерные значения толщины  $\bar{h} = \frac{h}{a} \left( \frac{EC}{q_0^2} \right)^{1/3}$  в узлах одной четверти разностной сетки квадратной пластинки.

## DESIGN OF ANISOTROPIC ELASTIC PLATES OF MINIMUM VOLUME

G. N. BARSEGHIAN, R. M. KIRAKOSIAN

Ա մ ֆ ո թ ո լ մ

Դիտարկված է առաձգական օրթոտրոպ նյութից պատրաստված մինիմալ ծավալի միաշերտ ուղղանկյուն սալի նախազոման խնդիրը: Ցույց է արգված, որ եթե սալի մակերևույթների վրա առաձգական պոտենցիալը ստանում է հաստատուն արժեք, ապա այդպիսի սալի ծավալը հանդիսանում է մինիմալ՝ իրարից քիչ տարբերվող սալերի դասում: Դիտարկված է կոնկրետ թրվային օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Шилд Р. Методы оптимального проектирования конструкций.—Сб. пер. Механика, 1962, № 2(72), с. 148—159.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин.—М.: Наука, 1967, 268 с.
3. Киракосян Р. М. О достаточных условиях наименьшего объема идеально-пластических пластинок.—Докл. АН Арм. ССР, 1981, т. 72, № 5, с. 291—295.
4. Барсегян Г. И. О задаче проектирования идеально-пластических прямоугольных пластинок.—В сб.: Механика деформируемого твердого тела. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1989, с. 128—133.
5. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки.—М.-Л.: ОГИЗ—Гостехиздат, 1947, 355 с.

Институт механики  
АН Армении

Поступила в редакцию  
13.XII.1989