ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 43, № 5, 1990 Механика

УДК 539.3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРИНЦИПА СЕН-ВЕНАНА И МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И РАЗНОСТЕЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К СВОБОДНО ОПЕРТЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ТОНКИМ УПРУГИМ ПЛИТАМ

ГЕВОРКЯН Г. С.

В работе [1] предложен метод, где применяется принцип Сен-Венана к статическим условиям на поверхности упругого тела и тем самым получено приближенное решение задачи теории упругости.

В настоящей работе получено общее решение задачи об изгибе опертой прямоугольной плиты под действием равномерно распределенной нагрузки при любом разбиении контура с применением принципа Сен-Венана.

Принимается, что прогиб $W(x, y)$ плиты точно удовлетворяет дифференциальному уравнению упругой плиты

$$\nabla^4 W=\frac{q}{D} \tag{1}$$

где $q(x, y)$ — интенсивность поперечной нагрузки, а D — жесткость плиты.

Полагается далее, что прогиб также точно удовлетворяет на контуре геометрическому условию $W=0$.

Статическое контурное условие $M=0$, где M — контурный изгибающий момент, удовлетворяется приближенно, согласно принципу Сен-Венана. Обозначим стороны прямоугольника через a и b, а координатные оси OX и OY примем за оси симметрии.

Для общего случая уравнение упругой поверхности будет иметь вид:

$$W=\frac{q}{8D}\left(\frac{a^2}{4}-x^2\right)\left(\frac{b^2}{4}-y^2\right)+\sum_{n=1}^{k} C_{2n-1}^{(1)}\left[a\cdot \operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi a}{2b}\operatorname{ch}\frac{(2n-1)\pi x}{b}-\right.$$

$$\left.-2x\operatorname{ch}\frac{(2n-1)\pi a}{2b}\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi x}{b}\right]\cos\frac{(2n-1)\pi y}{b}+\sum_{n=1}^{k} C_{2n-1}^{(2)}\times \tag{2}$$

$$\times\left[b\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi b}{2a}\operatorname{ch}\frac{(2n-1)\pi y}{a}-2y\operatorname{ch}\frac{(2n-1)\pi b}{2a}\times\right.$$

$$\times \operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi y}{a}\Bigg|\cos\frac{(2n-1)\pi x}{a}$$

где k — число, которое показывает на сколько частей разбит контур половины прямоугольника, а $C_{2n-1}^{(1)}$ и $C_{2n-1}^{(2)}$ — постоянные, подлежащие определению.

Легко убедиться, что выражение (2) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и контурному условию $W=0$.

Требуется, чтобы геометрическая сумма изгибающих моментов, действующих на каждую указанную часть контура, равнялась нулю. Учитывая при этом условия симметрии задачи, будем иметь:

$$\int_0^{\frac{b}{2k}} M_x\left(\frac{a}{2}, y\right)dy=0;\quad \int_{\frac{b}{2k}}^{2\frac{b}{2k}} M_x\left(\frac{a}{2}, y\right)dy=0;\ldots;\int_{\frac{(k-1)b}{2k}}^{\frac{b}{2}} M_x\left(\frac{a}{2}, y\right)dy=0$$

$$\int_0^{\frac{a}{2k}} M_y\left(x, \frac{b}{2}\right)dx=0;\quad \int_{\frac{a}{2k}}^{2\frac{a}{2k}} M_y\left(x, \frac{b}{2}\right)dx=0;\ldots;\int_{\frac{(k-1)a}{2k}}^{\frac{a}{2}} M_y\left(x, \frac{b}{2}\right)dx=0 \qquad (3)$$

где M_x и M_y — обычные обозначения для изгибающих моментов, причем

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) \qquad (4)$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Учитывая далее (2) и (4), из (3) нами получена следующая формула для общего случая при любом k разбиении контура:

$$[S]\{C_{2k-1}^{(1)}\cdot A_{2k-1}^{(1)}\}=-\{q^{(1)}\} \qquad (5)$$

$$[S]\{C_{2k-1}^{(2)}\cdot A_{2k-1}^{(2)}\}=-\{q^{(2)}\} \qquad (6)$$

где $[S]$ является квадратной матрицей, строки которого — коэффициенты гиперболических функций $\{A_{2k-1}^{(1)}\}$ и $\{A_{2k-1}^{(2)}\}$ и постоянных $\{C_{2k-1}^{(1)}\}$ и $\{C_{2k-1}^{(2)}\}$, а колонны являются разницами синусов для каждой заданной области.

В открытом виде (5) имеет такой вид:

$$
\underbrace{\begin{vmatrix}
\sin\frac{\pi}{2n}-\sin 0 & \sin\frac{3\pi}{2n}-\sin 0 & \dots & \sin\frac{(2k-1)\pi}{2k}-\sin 0\\
\sin 2\frac{\pi}{2n}-\sin\frac{\pi}{2n} & \sin 2\frac{3\pi}{2n}-\sin\frac{3\pi}{2n} & \dots & \sin 2\frac{(2k-1)\pi}{2k}-\sin\frac{(2k-1)\pi}{2k}\\
\sin 3\frac{\pi}{2n}-\sin 2\frac{\pi}{2n} & \sin 3\frac{3\pi}{2n}-\sin 2\frac{3\pi}{2n} & \dots & \sin 3\frac{(2k-1)\pi}{2k}-\sin 2\frac{(2k-1)\pi}{2k}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\sin k\frac{\pi}{2k}-\sin(k-1)\frac{\pi}{2k} & \sin k\frac{3\pi}{2k}-\sin(k-1)\frac{3\pi}{2k} & \dots & \sin k\frac{(2k-1)\pi}{2k}-\sin\frac{(k-1)(2k-1)\pi}{2k}
\end{vmatrix}}_{[S]} \times
$$

$$
\times \begin{vmatrix}
C_1^{(1)} & A_1^{(1)}\\
C_3^{(1)} & A_3^{(1)}\\
\cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot\\
C_{2k-1}^{(1)} & A_{2k-1}^{(1)}
\end{vmatrix} = -\frac{qb^3}{192D2k^3}\underbrace{\begin{vmatrix}
3k^2-1\\
(3k^2-1)-6\\
[(3k^2-1)-6]-2\cdot 6\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\\
3k-1
\end{vmatrix}}_{\{q^{(1)}\}} \qquad (7)
$$

где $A_1^{(1)}=\mathrm{ch}^2\frac{\pi a}{2b}$, $A_3^{(1)}=\mathrm{ch}^2\frac{3\pi a}{2b}, \dots, A_{2k-1}^{(1)}=\mathrm{ch}^2\frac{(2k-1)\pi a}{2b}$

Аналогичную формулу типа (7) можно написать и для (6) в открытом виде.

Следует обратить внимание, что в (7)

$$2k^3=(3k^2-1)+[(3k^2-1)-6]+\{[(3k^2-1)-6]-2\cdot 6\}+\dots+(3k-1) \qquad (8)$$

где $k=1; 2; 3; 4;\dots$

Элементы квадратной матрицы $[S]$, фактически, для нашей задачи, являются числами влияния, как это принято в методах конечных разностей и элементов [3, 4, 5, 7]. Обращая матрицу $[S]$ по Фробениусу [6] (при небольшом разбиении контура) или с помощью ЭВМ (при большом разбиении контура) легко можно определить постоянные $\{C_{2k-1}^{(1)}\}$ и $\{C_{2k-1}^{(2)}\}$.

Таким образом, из (5) и (6) будем иметь [6]

$$\{C_{2k-1}^{(1)}\, A_{2k-1}^{(1)}\}=-[S]^{-1}\{q^{(1)}\} \qquad (9)$$

$$\{C_{2k-1}^{(2)}\, A_{2k-1}^{(2)}\}=-[S]^{-1}\{q^{(2)}\} \qquad (10)$$

Для квадратной плиты $(a=b)$ имеем

$\{C_{2k-1}^{(1)}\}=\{C_{2k-1}^{(2)}\}=\{C_{2k-1}\}$, $\{A_{2k-1}^{(1)}\}=\{A_{2k-1}^{(2)}\}=\{A_{2k-1}\}$, $\{q^{(1)}\}=\{q^{(2)}\}=\{q\}$

Формулы (9) и (10) примут вид

$$\{C_{2k-1}A_{2k-1}\}=-[S]^{-1}\{q\} \tag{11}$$

Рассмотрим несколько примеров. Предположим, что $k=1$, то есть рассматривается половина обеих сторон прямоугольника. Тогда из (7) очень легко можно получить решение задачи, рассмотренной в [1].

Допустим, что $k=2$, тогда из (7), учитывая (8), получим

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{\pi}{4} & \sin\frac{3\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4} & \sin\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{4} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} C_1^{(1)}A_1^{(1)} \\ C_3^{(1)}A_3^{(1)} \end{Bmatrix} = -\frac{qb^3}{192D16}\begin{Bmatrix} 11 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

Решение этой системы не представляет трудностей. Определим обратную матрицу $[S]^{-1}$, далее учитывая (9) и (10), определим постоянные $C_1^{(1)}$ и $C_1^{(2)}$, $C_3^{(1)}$ и $C_3^{(2)}$. Они равны

$$C_1^{(1)}=-0{,}987\frac{qb^3}{192D\operatorname{ch}^2\frac{\pi a}{2b}},\quad C_1^{(2)}=-0{,}987\frac{qa^3}{192D\operatorname{ch}^2\frac{\pi b}{2a}}$$

$$C_3^{(1)}=0{,}014\frac{qb^3}{192D\operatorname{ch}^2\frac{3\pi a}{2b}},\quad C_3^{(2)}=0{,}014\frac{qa^3}{192D\operatorname{ch}^2\frac{3\pi b}{2a}} \tag{12}$$

Для квадратной плиты из (12) получим

$$C_1^{(1)}=C_1^{(2)}=-0{,}987\frac{qa^3}{192D\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{2}},\quad C_3^{(1)}=C_3^{(2)}=0{,}014\frac{qa^3}{192D\operatorname{ch}^2\frac{3\pi}{2}} \tag{13}$$

Из (2) и (13) определим прогиб в центре квадратной плиты. Используя таблицы для гиперболических функций [8], получим $W=0{,}0041qa^4/D$.

По О. М. Сапонджяну [1], то есть когда $k=1$, $W=0{,}0040qa^4/D$.

Погрешность результата О. М. Сапонджяна составляет 2,4%.

Согласно формулам (2), (4) и (13) определим значение изгибающего момента в центре квадратной плиты

$$M=\frac{qa^2}{16}(1+\mu)\left(1-0{,}987\frac{\pi}{3\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}}+0{,}014\frac{\pi}{\operatorname{ch}\frac{3\pi}{2}}\right)$$

Приняв коэффициент Пуассона $\mu=0{,}3$, получим $M=0{,}0478qa^2$.

По О. М. Сапонджяну [1] $M=0{,}0473\ qa^2$.

Погрешность результата О. М. Сапонджяна равна 1,1%. По Б. Г. Галеркину [2] $M=0{,}0479qa^2$.

Погрешность нашего результата с точным решением Б. Г. Галеркина составляет 0,2%.

Таблица 1

Значения прогибов и изгибающих моментов к задаче об изгибе прямоугольной плиты с применением принципа Сен-Венана

Соотношение сторон $\frac{b}{a}$	Значения k											
	1			2			3			4		
	W	M_x	M_y	W	M_x	M_y	W	M_x	M_y	W	M_x	M_y
1	0.004063	0.0473	0.0473	0.00405	0.04784	0.04784	0.00406	0.0479	0.0479	0.00406	0.0479	0.0479
1.5	0.00757	0.0803	0.0485	0.00772	0.08129	0.05001	0.0078	0.0813	0.0502	0.0078	0.0813	0.0502
2	0.00971	0.0996	0.0433	0.01009	0.10214	0.04683	0.0101	0.1022	0.0469	0.0101	0.1022	0.0469

В табл. 1 коэффициент Пуассона равен 0,3, а множители прогибов и моментов соответственно имеют вид: $\frac{qa^4}{D}$ и qa^2.

В табл. 1 приведены результаты прогибов и моментов для квадратной и прямоугольных плит, при $k=1\div4$ разбиении контура. Как видно из таблицы, при $k\geqslant3$ разбиении контура полученные результаты не дают существенного эффекта, поскольку гиперболические синусы и косинусы при больших значениях почти равны.

При использовании метода конечных элементов для решения задачи квадратной свободно опертой плиты, при делении плиты на четыре элемента максимальные величины прогиба и изгибающего момента имеют следующие значения:

$$W=0{,}00345\frac{qa^4}{D}, \quad M=0{,}0572qa^2$$

А при делении плиты на 16 элементов имеем:

$$W=0{,}00394\frac{qa^4}{D}, \quad M=0{,}04573qa^2$$

Расхождение максимальных прогибов и моментов при делении области плиты на 16 элементов, с нашими результатами, полученные при $k=3$, соответственно составляют $-3{,}0\%$ и $+1{,}7\%$.

Аналогичные сравнения можно провести и с результатами решений, полученными методом конечных разностей [4].

В заключение отметим, что при решении задачи об изгибе свободно опертых прямоугольных плит целесообразно использовать принцип Сен-Венана, который даст возможность при небольшом разбиении контура получать приближенное (если не точное) решение задачи, что не имеет место в методах конечных разностей и элементов.

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE ST. VENANT PRINCIPLE WITH THE FINITE ELEMENTS AND DIFFERENCIES METHODS AS APPLIED TO FREE-SUPPORTED RECTANGULAR THIN ELASTIC PLATES

G. S. GEVORKIAN

ԱԶԱՏ ՀԵՆՎԱԾ ԲԱՐԱԿ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԵՐԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ ՍԵՆ-ՎԵՆԱՆԻ ՍԿԶԲՈՒՆՔԻ ԵՎ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Գ. Ս. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում, Սեն-Վենանի սկզբունքի օգնությամբ ստացված է հենված ուղղանկյուն սալի ծռման խնդրի ընդհանուր լուծումը հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ՝ եզրագծի ցանկացած բաժանման դեպ-

թամ։ Օրինակների հետ համեմատությունը ցույց է տալիս ստացված արդյունքների բավարար համընկնումը մոտավոր և ճշգրիտ լուծումների հետ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сапонджян О. М.* Применение принципа Сен-Венана к решению задачи теории упругости.—Юбилейный сб. научн. тр. ЕрПИ, Ереван, 1960.
2. *Галеркин Б. Г.* Упругие тонкие плиты.—Л.—М.: Госстройиздат, 1933.
3. *Варвак П. М., Варвак Л. П.* Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций.—М.: Стройиздат, 1977.
4. *Варвак П. М.* Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. В 2-х частях.—Киев: Изд-во АН УССР, 1949, 1952.
5. *Безухов Н. И., Лужин О. В.* Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач.—М.: «Высшая школа», 1974.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.—М.: Наука, 1967.
7. Справочник по теории упругости. Под редакцией П. М. Варвака и А. Ф. Рябова. «Будівельник», Киев, 1971.
8. *Кочанов Н. С.* Компактные шестизначные математические таблицы. Л.: Машиностроение, 1970.

Ереванский политехнический
институт

Поступила в редакцию
10.X.1989

ВСЕСОЮЗНОЕ АГЕНСТВО ПО АВТОРСКИМ ПРАВАМ (ВААП)

Вниманию авторов, обращающихся в ВААП по вопросам выплаты гонорара за перепечатку за рубежом статей, опубликованных в советских журналах

I. ОФОРМЛЕНИЕ СПРАВОК-ЗАЯВЛЕНИЙ

Для получения гонорара автору необходимо оформить и выслать в ВААП справку-заявление автора.

СПРАВКА-ЗАЯВЛЕНИЕ оформляется:

—на листе бумаги стандартного формата:
—на пишущей машинке или печатными буквами от руки;
—на каждое наименование журнала и год его издания;
с указанием следующих необходимых для расчета данных:
1. Фамилия, имя, отчество (полностью)
2. Год рождения
3. Наличие детей
4. Домашний адрес (с почтовым индексом, по прописке в паспорте)
5. Телефоны (служебный, домашний)
6. Выходные данные статьи:
—наименование журнала
—год издания
раздел или серия (для ДАН, Изв. АН СССР, БМУ, ВЛУ, ИзВУЗ)
—том
—номер
—страницы статьи
7. Форма получения гонорара—указать нужное
—на текущий счет типа «В»—№.......
(только в свободноконвертируемой валюте), наименование учреждения банка, в котором открыт счет:
в рублях— —счет № .... в отд. сбербанка, № ... расчетный
счет № ...., в ......
(наименование банка)
—почтовым переводом
—в классе ВААП
8. Льготы по подоходному налогу: удостоверение участника (инвалида) Великой Отечественной войны—указать серию, номер удостоверения, когда и каким учреждением выдано.
9. Дата
10. Личная подпись

II. СРОКИ ВЫПЛАТЫ ГОНОРАРА

Выплата авторского гонорара начинается через 2 года и заканчивается через 4 года после выхода последнего номера журнала в СССР (например, выплата гонорара за перепечатку статей, опубликованных в журналах в 1988 г., будет производиться с 1 января 1991 г. по 30 декабря 1992).

III. ПОРЯДОК ОТКРЫТИЯ ТЕКУЩЕГО СЧЕТА ТИПА «В» И ПОСЛЕДУЮЩИХ РАСЧЕТОВ

1. Счет типа «В» открывается по месту жительства автора:
а) для авторов, проживающих в Москве и Московской области,—во Внешэкономбанке СССР (г. Москва, ул. Чкалова, 14/16);
б) для авторов, проживающих в городах Ленинград, Вильнюс, Выборг, Ереван, Измаил, Киев, Кишинев, Львов, Минск, Находка, Новороссийск, Одесса, Сочи,