

УДК 534.1+517.9

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ,
 ЭЛЕМЕНТАМИ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ СТЕРЖНИ ИЗ
 КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

ЕГНАЗАРЯН А. Г.

Рассматривается задача проектирования стержневых конструкций минимального веса при ограничениях на прочность, устойчивость отдельных элементов, на общую первую частоту собственных колебаний и на жесткость. Элементами конструкций являются стержни замкнутого профиля, изготовленные из монослоев волокнистого композиционного материала (ВКМ) методом перекрестной намотки (или укладки) под углом $\pm\varphi$ к оси стержня. В результате пакет стержня по толщине получается ортотропным, и главные физические направления пакета стержня по толщине совпадают с главными геометрическими направлениями.

Для решения задачи применяется метод оптимизации в пространстве состояний [1]. Этот метод является итерационным и на каждом шагу нужно провести полный расчет конструкций, который осуществляется на основе метода конечных элементов (МКЭ). Строятся матрицы жесткости, масс и геометрическая матрица жесткости для некоторых типов элементов.

1. TRUS—элемент из изотропного материала, работающий только на растяжение и сжатие;
2. TRUS2—элемент из ВКМ, работающий только на растяжение-сжатие и имеющий профиль кольца;
3. BEAM—плоский балочный элемент из изотропного материала;
4. BEAM1—плоский балочный элемент из изотропного материала с прямолинейной анизотропией;
5. BEAM0—пространственный балочный элемент из изотропного материала;
6. BEAM2—пространственный балочный элемент из ортотропного материала;
7. BEAM5—тонкостенный стержень замкнутого профиля из ортотропного материала, работающий на растяжение-сжатие, кручение и общий изгиб. Форма сечения—круглая. Принимается, что в плоскости сечения не происходит деформация контура и что продоль-

ная деформация распределяется по сечению по закону плоскости, то есть линейно зависит от координат y и z [2].

Проектируемая конструкция может состоять из описанных выше элементов и их комбинаций. Общие матрицы жесткости K , масс M и геометрической жесткости G строятся стандартным способом сборки матриц для ансамбля. Уравнения состояния записываются в виде

$$K\vec{Z} = P \quad (1)$$

$$K\vec{Y} - \xi^2 M\vec{Y} \quad (2)$$

$$(K+G)\vec{x} = \eta^2 M\vec{x} \quad (3)$$

где уравнение (1) описывает равновесное состояние конструкции (\vec{Z} — узловые перемещения, \vec{P} — узловые нагрузки), уравнению (2) соответствуют свободные колебания конструкции (ξ — частота колебаний, \vec{Y} — собственный вектор, описывающий форму колебаний), уравнению (3) соответствуют собственные колебания конструкции в статически нагруженном состоянии (η — частота колебаний, \vec{x} — собственный вектор, описывающий форму колебаний в нагруженном состоянии). Сформулируется задача оптимального проектирования: минимизировать функционал

$$\psi_0 = \psi_0(b) \quad (4)$$

(b — вектор проектных переменных, ψ_0 — вес конструкций), при наличии уравнения состояния (1)–(3) и следующих ограничений:

а) на частоту свободных колебаний

$$\psi(\xi) = \xi_0 - \xi \leq 0 \quad (5)$$

где ξ_0 — заданное допустимое значение нижней частоты свободных колебаний;

б) на частоту собственных колебаний в статически нагруженном состоянии

$$\psi(\eta) = \eta_0 - \eta \leq 0 \quad (6)$$

где η_0 — заданное допустимое значение нижней частоты собственных колебаний;

в) на напряжения в слоях элемента. В качестве такого ограничения принимается условие Мизеса

$$\psi(b, z) = \frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{B1}^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{B2}^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2} + \frac{\tau_{12}^2}{\tau_{B0}^2} - 1 \leq 0 \quad (7)$$

где σ_{B1} , σ_{B2} , τ_{B0} — допустимые нормальные напряжения по направлению осей монослоя и по сдвигу соответственно.

г) на нижнее z_i^l и верхнее z_i^u значения узловых перемещений

$$z_i^l \leq z_i \leq z_i^u \quad (8)$$

д) на нижнее b_i^l и верхнее b_i^u значения проектных переменных

$$b_i^l \leq b_i \leq b_i^u \quad (9)$$

Для определения направления поиска необходимо определить матрицу чувствительности [1]. Каждый столбец этой матрицы представляет собой вектор чувствительности целевой функции Ψ_0 или активных в данный момент ограничений относительно проектных переменных и определяется формулой

$$U = \frac{\partial \Psi_0}{\partial b} - \left(\frac{\partial K}{\partial b} z \right) \lambda_\zeta + I^\zeta + I^\eta \quad (10)$$

где I^ζ , I^η — векторы чувствительности для ζ и η соответственно.

Вычисление I^ζ приведено в [1], а I^η определяется формулой

$$I^\eta = x^T \left(\frac{\partial(K+G)}{\partial b} x - \eta \frac{\partial M}{\partial b} x \right) + \left(\frac{\partial K}{\partial b} z \right) \lambda_\eta \quad (11)$$

λ_ζ и λ_η определяются из решения сопряженных к (1) уравнений

$$K \lambda_\zeta = \partial \Psi_0 / \partial z \quad (12)$$

$$K \lambda_\eta = x^T \frac{\partial G}{\partial z} x \quad (13)$$

Алгоритм решения оптимизационной задачи имеет нижеприведенный порядок.

1. Задаются начальные значения проектных переменных b^0 .
2. Решаются задачи (1)–(2), определяющие состояние системы.
3. Проверяются ограничения типа (а), (б), (в). По имеющимся

глобальным перемещениям \bar{z} определяются локальные перемещения $[q_1, q_2, \dots]$, а также деформации, причем деформации в слоях, расположенных под углами $\pm \varphi$ определяются известными соотношениями (например, для круглого стержня)

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \quad (14)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{xx} \sin^2 \varphi - \varepsilon_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \quad (15)$$

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{xy} \sin 2\varphi + \varepsilon_{yy} \cos 2\varphi \quad (16)$$

Определяются напряжения в слоях по формулам

$$\sigma_{11} = B_{11}^0 \varepsilon_{11} + B_{12}^0 \varepsilon_{12}; \quad \sigma_{22} = B_{21}^0 \varepsilon_{11} + B_{22}^0 \varepsilon_{12}; \quad \sigma_{12} = B_{66}^0 \varepsilon_{12} \quad (17)$$

где

$$B_{11}^0 = E_1 / (1 - \nu_{11} \nu_{12}); \quad B_{22}^0 = E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}); \quad B_{12}^0 = E_1 \nu_{21} / (1 - \nu_{11} \nu_{12}); \quad B_{66}^0 = G_{12} \quad (18)$$

E_1 , E_2 — модули упругости вдоль и поперек волокон в монослое, G_{12} — модуль сдвига, ν_{12} , ν_{21} — коэффициенты Пуассона. На основе полученных значений напряжений строятся геометрические матрицы жесткости g_{ij} отдельных элементов и конструкции в целом. Реша-

ется задача (3). С целью уменьшения количества обращений к внешней памяти все ограничения проверяются одновременно. Для каждой группы элементов строятся необходимые векторы $\partial K/\partial b$, $\partial M/\partial b$, $\partial G/\partial b$, $\partial K/\partial b$, $\partial M/\partial b$, $\partial G/\partial b$, а также $\partial G/\partial z$ и $\partial \psi/\partial z$ для нарушенных ограничений.

4. Проверяются ограничения типа (г).

5. Вычисляются векторы λ_i для нарушенных ограничений по уравнениям (12) и (13). Матрица чувствительности, составленная из векторов для ограничений типа (а)—(г), обозначаются через Λ^a , для целевой функции Λ^0 , для ограничения типа (д) через Λ^d , вектор, составленный из величин нарушений через $\Delta\psi$. Строится матрица [B] следующим образом:

$$[B] = \Lambda^T W^{-1} \Lambda = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

где

$$[B_{11}] = \Lambda^a \Lambda^a, [B_{12}] = [B_{21}] = \Lambda^a \Lambda^d, [B_{22}] = \Lambda^d \Lambda^d \quad (20)$$

6. Составляется уравнение

$$B_{11} b = -2\psi \Delta\psi + \Lambda^T W^{-1} \Lambda^0 \quad (21)$$

где W — вектор весовых коэффициентов и находятся множители Лагранжа μ . Если матрица [B] имеет линейно зависимые столбцы, то соответствующие ограничения исключаются из числа активных и возвращаемся к п. 5.

7. Вычисляется вектор приращений δb по формуле

$$\delta b = -\frac{1}{2\psi} W^{-1} [\Lambda^0 + \Lambda \mu] \quad (22)$$

8. Определяется новый вектор $b^{i+1} = b^i + \delta b$. Проверяются условия сходимости, если они не выполняются, то переходим к шагу 1 с новым значением $b^0 = b^{i+1}$.

Приводим результаты расчета некоторых стержневых конструкций. На фиг. 1 приведена схема плоской рамной конструкции, собранной из элементов типа ВЕАМ2. Нагрузки имеют следующие значения:

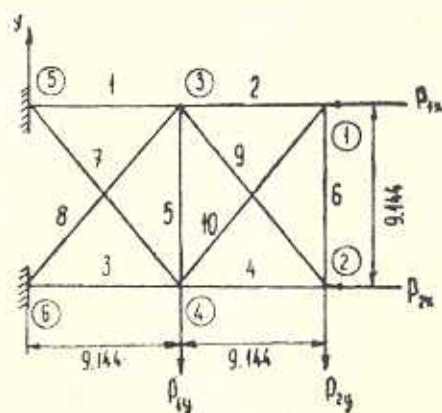
$$P_{1x} = -0,223 \cdot 10^6 \text{ н}, \quad P_{2x} = -0,223 \cdot 10^6 \text{ н}, \quad P_{2y} = -0,668 \cdot 10^6 \text{ н}, \quad P_{3y} = -0,668 \cdot 10^6 \text{ н},$$

материал ВКМ с характеристиками $E_1 = 0,21 \cdot 10^{12} \text{ н/м}^2$, $E_2 = 0,19 \cdot 10^{12} \text{ н/м}^2$, $G_{12} = 0,620 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2$, $\nu_{12} = 0,0253$, $\nu_{21} = 0,28$, $\rho = 0,2 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$, $\tau_{B1} = 0,6 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2$, $\tau_{B2} = 0,65 \cdot 10^8 \text{ н/м}^2$, $\tau_{B0} = 0,102 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2$.

Требуется найти проект конструкции минимального веса при следующих ограничениях:

1. На частоту свободных колебаний $\xi_0 = 22$ гц,
2. На прочность элементов конструкций;
3. На жесткость $z_i^l = -0,05$; $z_i^a = 0,05$.

Проектными переменными являются h -толщина стенки стержня, R —средний радиус; φ —угол укладки монослоев. Ставятся также ограничения на проектные переменные $0,0001 \leq h_i \leq 0,03$ (м), $0,1 \leq R_i \leq 0,1 \cdot 10$ (м); $0 \leq \varphi_i \leq \pi/2$; где $i=1 \div 10$ —номер элемента. Элементы не сгруппированы. Таким образом, имеем 30 проектных переменных. Начальная точка выбрана $h_i=0,5 \cdot 10^{-2}$ м, $R_i=0,5$ м, $\varphi_i=0,7$. В



Фиг. 1

этой точке $\psi_0=3340$ кг, частота колебаний $\xi=9,757$ гц, нарушаются ограничения на перемещения под номерами 5;2;11;8;4. После 28-ой итерации получен проект, удовлетворяющий всем ограничениям $\psi_0=750,8$ кг, $\xi=40,65$ гц. ε -активными являются ограничения на перемещения 1 и 5.

Оптимальные значения проектных переменных приводятся в табл. 1.

Таблица 1

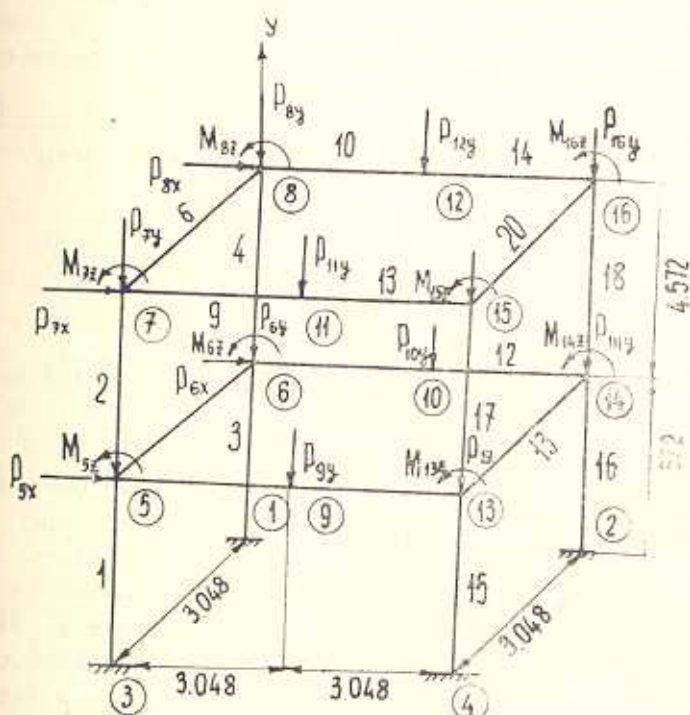
h_i (м) $\times 10^{-2}$	0.301	0.010	0.304	0.173	0.012	0.024	0.094	0.211	0.211	0.363
R_i (м)	0.423	0.381	0.421	0.399	0.39	0.396	0.387	0.404	0.403	0.382
φ_i (рад.)	0	0.73	0	0	0.683	0	0	0	0	0

Для той же конструкции (фиг. 1) находится оптимальный вариант при ограничении на частоту собственных колебаний в нагруженном состоянии ($\eta_0=22$ гц). Остальные ограничения сохраняются. Начальная точка выбрана, как в предыдущей задаче. Частота колебаний в нагруженном состоянии $\eta=9,6$ гц. После 28-ой итерации условия сходимости удовлетворяются $\psi_0=752$ кг, $\eta=40,29$ гц. ε -активными являются ограничения на перемещения 1 и 5. Проектные переменные имеют следующие значения (табл. 2).

На фиг. 2 приведена схема пространственной рамной конструкции. Нагрузки имеют следующие значения:

Таблица 2

$h(\text{м})$ $\times 10^{-2}$	0.296	0.01	0.298	0.175	0.01	0.0253	0.0937	0.214	0.213	0.6352
$R(\text{м})$	0.424	0.38	0.421	0.397	0.39	0.393	0.387	0.405	0.402	0.351
$\varphi(\text{рад})$	0	0.755	0	0	0.7	0.0011	0	0	0	0



Фиг. 2.

$$P_{5x} = P_{6x} = P_{7x} = P_{8x} = 0,45 \cdot 10^5 \text{ Н}, \quad P_{5y} = P_{6y} = P_{7y} = P_{8y} = P_{11y} = P_{15y} = P_{19y} = \\ = -0,3 \cdot 10^5 \text{ Н}; \quad P_{9y} = P_{10} = P_{11y} = P_{12y} = -0,6 \cdot 10^5 \text{ Н}, \quad M_{6z} = M_{7z} = M_{8z} = \\ = M_{11z} = M_{15z} = M_{19z} = 0,6 \cdot 10^8 \text{ Нм}.$$

Материал с такими же характеристиками, что и в предыдущей задаче. Необходимо спроектировать конструкцию минимального веса при ограничениях:

1. На частоту свободных колебаний $\xi_0 = 16$ гц.
2. На прочность элементов;
3. На жесткость конструкций $-0,3 \leq z_i \leq 0,3$.

Проектными переменными являются h —толщина стенки, R —средний радиус, φ —угол намотки стержней. Стержни сгруппированы в шести группах: I. 1, 3, 15, 16; II. 2, 4, 17, 18; III. 7, 8, 9, 10; IV. 11, 12, 13, 14; V. 5, 6, VI. 19, 20. Ограничения на проектные переменные имеют вид:

$0,254 \cdot 10^{-2} \leq h_i \leq 0,5 \cdot 10^{-1}$, $0,04 \leq R_i \leq 0,8$; $0 \leq \varphi_i \leq \pi/2$ $i=1 \div 6$.

Начальная точка выбирается в виде:

$$h_i = 0,1 \cdot 10^{-1} \text{ м}, \quad R_i = 0,1 \text{ м}, \quad \varphi_i = 0,7.$$

В этой точке $\psi_0 = 919,2$ кг, нарушены ограничения по частоте свободных колебаний $\xi = 1,99$, по прочности в элементах 1 (I), 2 (II), 3 (III), 4 (III), по перемещениям под номерами 61, 63, 67, 43, 13. После 19-ой итерации условия сходимости удовлетворяются $\psi_0 = 232,8$ кг.

ε -активными являются ограничения по прочности в элементе 3 группы 3. Проектные переменные имеют следующие значения (табл. 3).

Таблица 3

$h(\text{м})$ $\times 10^{-2}$	0.0254	0.0352	0.0254	0.0409	0.758	0.758
$R_i(\text{м})$	0.7987	0.722	0.797	0.8	0.04	0.04
φ_i (рад)	0	0	5	9	0.698	0.698

Рассматривается также задача оптимального проектирования рамной конструкции из фиг. 2, при ограничениях на частоту собственных колебаний в нагруженном состоянии ($\eta_0 = 16$ гц). Известны также условия нагружения: принято $P_{yx} = P_{xy} = P_{zx} = P_{xz} = 0,45 \cdot 10^4$ н, $P_{yy} = P_{yy} = P_{yy} = P_{yy} = -0,3 \cdot 10^4$ н. Остальные нагрузки равны нулю. Ставятся также ограничения на прочность элементов, на жесткость конструкции, на величину значений проектных переменных. Начальные точки выбираются как в предыдущей задаче. В этой точке $\psi_0 = 919,2$ кг и нарушено ограничение по частоте собственных колебаний $\eta = 2,25$ гц. После 25-ой итерации найден оптимальный проект со значением целевой функции $\psi_0 = 0,156 \cdot 10^3$ кг. ε -активной является частота собственных значений $\eta = 16$ гц. Проектные переменные имеют следующие значения (табл. 4).

Таблица 4

$h \cdot 10^{-2}$ (м)	0.0254	0.0254	0.411	0.41	0.254	0.254
R (м)	0.773	0.565	0.04	0.04	0.647	0.677
φ (рад.)	0	0	0.24	0.246	0.118	0.0

Таким образом, разработанный пакет расчета и проектирования оптимальных стержневых конструкций из ВКМ позволяет существенно уменьшить вес конструкции по сравнению с первоначальным проектом. Следует отметить, что полученный оптимальный проект обеспечивается и при других начальных (стартовых) значениях проектных переменных.

OPTIMAL DESIGN OF STRUCTURES THE ELEMENTS OF WHICH ARE BEAMS FROM COMPOSITE MATERIALS

H. H. EGHIAZARIAN

ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱՆ ԶՈՂԱՅԻՆ ԿԱՌՈՒՅՎԱԾՔՆԵՐԻ
ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ

Հ. Հ. ԵՂԻԱԶԱՐԻԱՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Գրտարկված է փակ շրջագիծ ունեցող մի բանի ախյի ճողային կառուցվածքների օպտիմալ նախագծման ալգորիթմի կառուցման և կիրառման ծրագրերի փաթեթ ստեղծելու հարցերը: Կառուցվածքների հաշվարկը (հանգույցների տեղափոխությունները, ազատ տատանման հաճախականությունները, սեփական տատանման հաճախականությունները բևեռավորված վիճակում) կատարվում է վերջավոր էլեմենտների մեթոդով, իսկ օպտիմիզացիոն ալգորիթմը օգտագործում է վիճակների տարածության մեջ օպտիմիզացման մեթոդը: Մշակված ծրագրերի հիման վրա բերված է կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված շրջանակային կառուցվածքների օպտիմալ նախագծման արդյունքները տարրեր սահմանափակումների դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Арора Я., Хог. Э. Прикладное оптимальное проектирование. Механические системы и конструкции.—М.: Мир, 1983. 479 с.
2. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 269 с.

Институт механики
АН Армени

Поступила в редакцию
3.VIII.1989