

УДК 539.3

О НЕТРИВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИИ ПОЛОГИХ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК

ГЛУНИ В. Ц.

Известно [1], что нелинейная система разрешающих уравнений гибких оболочек (панелей двойкой кривизны  $k_x, k_y$ ) в определенном диапазоне нагрузок  $q, \leq q \leq q^*$ , начиная с некоторого значения параметра кривизны  $k$ , допускает три решения  $f_i = f_i(q)$  ( $i=1, 2, 3$ ), где  $f$  и  $q$  — параметры прогиба и нагрузки, действующей со стороны выпуклости оболочки. Однако, нелинейная система разрешающих уравнений гибких панелей двойкой кривизны допускает нетривиальное ( $f \neq 0$ ) решение и в случае незагруженной ( $q=0$ ) оболочки.

Целью настоящей работы является исследование этих решений.

1. В первом приближении для пологой гибкой оболочки двойкой кривизны можно получить соотношение [1]

$$Kf - \alpha f^2 + \beta f^3 = 0 \tag{1.1}$$

где введены обозначения

$$K = k^2 + \frac{\pi^4(1+\nu^2)^4}{12(1-\nu^2)}, \quad \alpha = 16k\lambda^2, \quad \beta = \frac{512}{9}\lambda^4$$

$$k = (k_y + \lambda^2 k_x) \frac{a^2}{h}, \quad \lambda = \frac{a}{b}$$

$a, b$  — размеры оболочки в плане,  $f$  — безразмерный (деленный на толщину  $h$ ) прогиб в центре оболочки,  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала.

Необходимо отметить, что соотношение (1.1) получено для панели с граничными условиями

$$\begin{aligned} v=w=0, \quad T_{11}=0, \quad M_{11}=0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad x=a \\ u=w=0, \quad T_{22}=0, \quad M_{22}=0 \quad \text{при} \quad y=0, \quad y=b \end{aligned} \tag{1.2}$$

которым тождественно удовлетворяет представление (первое приближение по методу Бубнова-Галеркина)

$$w = w_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \Phi = \Phi_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \tag{1.3}$$

где  $u, v, w$  — перемещения точек срединной поверхности оболочки

соответственно по направлениям координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ;  $T_{ik}$  — усилия,  $M_{ik}$  — моменты,  $\Phi$  — функция усилий.

Уравнение (1.1) при

$$k \geq \pi^2 \sqrt{\frac{2}{3(1-\nu^2)}} (1+\lambda^2)^2 \quad (1.4)$$

допускает три решения

$$f_1=0, \quad f_{2,3} = \frac{9k}{64k^2} \left( 1 \mp \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{2\pi^4(1+\lambda^2)^4}{3(1-\nu^2)k^2}} \right) \quad (1.5)$$

В частном случае квадратной в плане оболочки ( $\lambda=1$ ) при  $\nu=0,3$  из (1.5) получается

$$f_1=0, \quad f_{2,3} = \frac{9k}{64} \left( 1 \mp \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{1140}{k^2}} \right) \quad (1.6)$$

Из соотношений (1.5), (1.6) получаются условия существования ненулевых решений для оболочек с произвольным отношением сторон и для оболочек квадратных в плане при  $\nu=0,3$

$$k \geq \pi^2 (1+\lambda^2)^2 \sqrt{\frac{2}{3(1-\nu^2)}}, \quad k \geq 33,8 \quad (1.7)$$

Из второго соотношения (1.7) для оценки радиуса цилиндрической и сферической оболочек квадратных в плане соответственно получается

$$R \leq 0,0296 \frac{a^2}{h}, \quad R \leq 0,0592 \frac{a^2}{h} \quad (1.8)$$

В табл. 1 для различных значений параметра кривизны  $k$  квадратной в плане оболочки приводятся значения безразмерных прогибов в центре оболочки.

Таблица 1

$f \backslash k$	34	36	38	40	42	44	46	48	50
$f_1$	4.6	4.5	4.5	4.6	4.7	4.9	5.0	5.2	5.3
$f_2$	5.0	5.6	6.2	6.6	7.1	7.5	7.9	8.4	8.8

Здесь может возникнуть правомерный вопрос, что полученные решения являются результатом приближения. Однако, как показано в [1], решение (1.3) для рассмотренного диапазона кривизны оболочки качественно правильно описывает деформированное состояние оболочки. Кроме того, в [1] для длинных гибких цилиндрических панелей приведено точное решение нелинейной задачи выпучивания и при  $q=0$  получается, что

$$f_1 = \begin{cases} 1,7 & \text{при } k=10 \\ 3,5 & \text{при } k=20 \\ 4,2 & \text{при } k=30 \end{cases} \quad f_3 = \begin{cases} 2,2 & \text{при } k=10 \\ 5,1 & \text{при } k=20 \\ 7,9 & \text{при } k=30 \end{cases}$$

В этом примере ненулевые решения получаются для меньших кривизн панели, так как предполагается, что длинные кромки панели ( $x=0$ ,  $x=a$ ) не смещаются.

Таким образом, существование нетривиальных решений очевидно.

Представляет интерес исследование этих решений на устойчивость и на прочность.

2. Как показано в работе [2], частоты собственных колебаний около изогнутых положений равновесия оболочки определяются формулой

$$\omega_{mn}^2 = \omega_{0mn}^2 \left( 1 - 2 \frac{e_{mn}}{K_{mn}} f_1 + 3 \frac{d_{mn}}{K_{mn}} f_1^2 \right) \quad (2.1)$$

где  $\omega_{0mn} = \sqrt{\frac{K_{mn}}{\rho h}}$  — частота собственных колебаний панели около неизогнутого ( $f_1 = f_1 = 0$ ) состояния оболочки,

$$\begin{aligned} K_{mn} &= D(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 + Eh \frac{(k_y \lambda_m^2 + k_x \mu_n^2)^2}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} \\ e_{mn} &= \frac{Eh}{2} \left[ \frac{k_y \lambda_1^2 + k_x \mu_1^2}{(\lambda_1^2 + \mu_1^2)^2} + \frac{2(k_y \lambda_m^2 + k_x \mu_n^2)}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} \right] \beta_{mn} \\ d_{mn} &= \frac{Eh}{3} \left[ \frac{\beta_{11}}{2(\lambda_1^2 + \mu_1^2)^2} + \frac{\beta_{mn}}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} \right] \beta_{mn} \\ \beta_{mn} &= \frac{32}{ab} \frac{mn}{(4m^2 - 1)(4n^2 - 1)} \left[ 2mn \left( \frac{\lambda_1}{\mu_1} \mu_n^2 + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \lambda_m^2 \right) - \lambda_m \mu_n \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  — жесткость на изгиб,  $E$  — модуль Юнга,  $\rho$  — плотность материала оболочки;  $m, n$  — числа полуволн.

Следует отметить, что результаты работы [2], полученные для гибких цилиндрических оболочек, здесь обобщены на случай гибких оболочек двойной кривизны.

Собственные значения (2.1) соответствуют собственным функциям

$$\Phi = \Phi_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y, \quad w = w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \quad (2.3)$$

где  $\lambda_m = m\pi/a$ ,  $\mu_n = n\pi/b$

Как показывают вычисления, квадраты частот собственных колебаний около второго ( $f_2$ ) положения равновесия незагруженной панели — отрицательные, а около третьего ( $f_3$ ) — положительные. Так, например, для квадратной ( $a=b$ ) в плане оболочки при  $\nu=0,3$

$$\omega_{11}^2 = \frac{256Eh^2}{9\rho a^4} \left( f_1 - \frac{9}{64}k \right) f_1 \quad (2.4)$$

и как видно из (1.6)

$$f_1 < \frac{9k}{64}, \quad f_2 > \frac{9k}{64} \quad (2.5)$$

что показывает неустойчивость нетривиальных решений, определяемых через  $f_1$  и устойчивость решений, определяемых через  $f_2$ . Полученный результат физически ясен. Очевидно, между двумя устойчивыми решениями  $f_1 = 0$  и  $f_2$  должно находиться неустойчивое решение  $f_1 < f_2 < f_3$ .

Таким образом, устойчивыми являются недеформированное  $f_1 = 0$  и деформированное

$$f_2 = \frac{9k}{64} \left( 1 + \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{1140}{k^2}} \right) \quad (2.6)$$

состояния незагруженной оболочки.

3. В случае нетривиальных решений нелинейной системы разрешающих уравнений гибких оболочек двойной кривизны, обусловленных  $f_2$ , в оболочке устанавливается некоторое напряженное состояние. В этом случае для функций прогиба  $w$  и усилий  $\Phi$  в первом приближении по методу Бубнова-Галеркина получается [1]

$$w = f_2 h \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (3.1)$$

$$\Phi = \frac{Eh^2}{\pi^2(1+\lambda^2)^2} \left( k - \frac{16}{3}\lambda^2 f_2 \right) f_2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

через которые определяются основные напряжения ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ ) в произвольной точке оболочки

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_{12} &= -\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Напряжения (3.2) должны удовлетворять условию

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2 \leq \sigma_{\text{дон}}^2 \quad (3.3)$$

для любого  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-0.5h \leq z \leq 0.5h$ .

Не нарушая общности рассуждений, для простоты выкладок рассмотрим случай квадратной ( $\lambda=1$ ) в плане панели при  $\nu=0.3$ . В этом

случае из условия (3.3) в силу (3.1) и (3.2) получается система неравенств

$$\frac{h}{a} \leq \sqrt{\frac{2\sigma_{доп.}}{E}} \left[ \left( \frac{k}{2} + 14,1 \right) f_2 - \frac{8}{3} f_3^2 \right]^{-1/4} \quad (3.4)$$

$$\frac{h}{a} \leq \sqrt{\frac{2\sigma_{доп.}}{\sqrt{3}E}} \left[ \left( \frac{k}{2} + 7,59 \right) f_2 - \frac{8}{3} f_3^2 \right]^{-1/5}$$

Условия (3.4) получаются из (3.3) при  $x=a/2$ ,  $y=a/2$ ,  $z = -\frac{h}{2}$  или  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z = \frac{h}{2}$ , где левая часть (3.3) принимает максимальные значения (наиболее опасные точки).

В табл. 2 приводятся значения допускаемой относительной толщины оболочки, до которой нетривиальное решение, определяемой  $f_2$ , удовлетворяет условию (3.3) при  $\sigma_{доп.}/E = 0,005$  (I строка) и  $\sigma_{доп.}/E = 0,0005$  (II строка).

Таблица 2

$k$	34	35	38	40	42	44	46	48	50
I	1,01	0,985	0,960	0,937	0,916	0,897	0,878	0,861	0,845
II	0,320	0,312	0,304	0,296	0,290	0,284	0,278	0,272	0,267

Как показывают результаты, приведенные в табл. 2, лишь весьма тонкие и пологие оболочки допускают прощелкнутое состояние равновесия незагруженной оболочки в пределах упругости.

## ON NON-TRIVIAL SOLUTIONS OF FLEXIBLE SHELLS EQUATIONS V. TS. GNUNY

### ՆԿՈՒՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ԼՈՒՅՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Յ. ԳՆՈՒՆԻ

### Ա մ փ ո փ ո մ

Աշխատանքում ուսումնասիրված են ճկուն թաղանթների ոչ գծային հավասարումների որոշիչ համակարգի ոչ զրոյական լուծումները, երբ թաղանթը ազատ է արտաքին զործոնների ազդեցությունից: Այդպիսի լուծումները անվանվում են սեփական լուծումներ և ստացված է այդ լուծումների գո-

յության պայմանը, կախված թաղանթի կորուստի քննադրիչ մեծությունից:

Ուսումնասիրված է սեփական լուծումների կայունությունը և ցույց է տրված, որ ոչ զրոյական երկու լուծումներից մեկը անկայուն է, իսկ մյուսը կայուն: Գտնված է թաղանթի այն հարսերական հաստությունը՝ կախված կորուստի քննադրիչից, մինչև որը թաղանթում ստեղծված լարվածային վիճակը բավարարում է ամրության պայմանին:

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки.—М.: Гостехиздат, 1956. 419 с.
2. Гнуки В. Ц. О собственных колебаниях цилиндрической панели, нагруженной внешним давлением.—Инж. журнал МТТ, 1968, № 2, с. 127—130.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию  
19.XII.1988