ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 43, № 5 1990. Механика

УДК 539.3:537.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЕКТОРЕ ИЗ ПЬЕЗОКРИСТАЛЛА

ГАЛПЧЯН П. В.

В работе рассматривается краевая задача электроупругости для призматического тела из пьезокристалла класса $6mm$ гексагональной системы с поперечным сечением в виде сектора.

Задачам электроупругости посвящены ряд работ, источники которых можно найти в [1]. В этой же работе рассмотрено электроупругое антиплоское равновесие цилиндрического сектора из пьезокристалла $6mm$, в которой исследованы характеры особенностей в точках смены граничных условий. При рассмотренных граничных условиях поставленные краевые задачи в этой работе разделились на две независимые и сведены к задачам электростатики для потенциала Φ.

В настоящей работе исследуется сопряженное электроупругое состояние продольного сдвига.

1. Как и в [1], предполагается, что главная ось симметрии пьезокристалла проходит через вершину сектора параллельно к образующим призмы. Принимается цилиндрическая система координат r, φ, z, ось z которой совпадает с главной осью кристалла ($0\leqslant r\leqslant r_1$, $-\alpha\leqslant\varphi\leqslant\alpha$, $-\infty<z<\infty$, $0<\alpha<\pi$).

Система уравнений, описывающая электроупругое равновесие, при отсутствии массовых сил будет иметь вид [2, 3]

$$\Delta u_z=0, \quad \Delta\Phi=0 \tag{1.1}$$

где Δ — оператор Лапласа, u_z — упругое перемещение, Φ — электростатический потенциал.

Уравнениями состояния будут:

$$\begin{gathered}\tau_{zr}=c_{44}\gamma_{zr}-e_{15}E_r, \quad \tau_{\varphi z}=c_{44}\gamma_{\varphi z}-e_{15}E_\varphi\\ D_r=4\pi e_{15}\gamma_{zr}+\varepsilon_1 E_r, \quad D_\varphi=4\pi e_{15}\gamma_{\varphi z}+\varepsilon_1 E_\varphi\end{gathered} \tag{1.2}$$

где

$$\gamma_{zr}=\frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \gamma_{\varphi z}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}, \quad E_r=-\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad E_\varphi=-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$$

В этих соотношениях τ_{zr}, $\tau_{\varphi z}$ — компоненты тензора напряжений;

γ_{zr}, $\gamma_{\varphi z}$ — компоненты деформаций; E_r, E_φ — компоненты вектора напряженности электрического поля; D_r, D_φ — компоненты вектора электрической индукции; c_{44}, e_{15}, ε_1 — соответственно модуль упругости, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость.

Для сопряженного электромеханического поля граничные условия сформулированы следующим образом:

$$\tau_{\varphi z}(r, \pm\alpha)=0, \quad \Phi(r, \pm\alpha)=V^{\pm}r \tag{1.3}$$

$$u_z(r_1, \varphi)=0, \quad D_r(r_1, \varphi)=0 \tag{1.4}$$

На поверхностях $\varphi=\pm\alpha$ электрические граничные условия (1.3) можно реализовать различными способами:

а) с помощью конденсаторов, параллельно границам $\varphi=\pm\alpha$ создаются электрические поля напряженностями $E_{\pm}=V^{\pm}$;

б) по металлизированным границам $\varphi=\pm\alpha$ протекают постоянные токи $I_0^{\pm}$, что соответствуют разности потенциалов $\Phi(r, \pm\alpha)=V^{\pm}r$.

В отличие от граничных условий (1.4), (1.5), сформулированных в [1], при условиях (1.4) граничная задача (1.1)—(1.4) не разделяется на две независимые и возникают некоторые трудности при построении решений по методу Фурье.

2. Рассмотрим параллельно два случая: полукруговое поперечное сечение ($\alpha=\pi/2$) и секторное поперечное сечение ($\alpha\neq\pi/2$) с произвольным углом α.

Можно построить следующие решения уравнений (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.3):

$$\Phi(r, \varphi)=\frac{2v_2}{\pi}r(\varphi\sin\varphi-\cos\varphi\ln r)+v_1 r\sin\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}A_k r^k\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)k$$

$$u_z(r, \varphi)=-\frac{e_{15}}{c_{44}}\Phi(r, \varphi)+\sum_{k=0}^{\infty}C_k r^k\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)k, \quad (\alpha=\pi/2) \tag{2.1}$$

$$\Phi(r, \varphi)=\frac{v_1}{\sin\alpha}r\sin\varphi+\frac{v_2}{\cos\alpha}r\cos\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}B_k r^{k\beta}\sin(\alpha+\varphi)k\beta$$

$$u_z(r, \varphi)=-\frac{e_{15}}{c_{44}}\Phi(r, \varphi)+\sum_{k=0}^{\infty}C_k r^{k\beta}\cos(\alpha+\varphi)k\beta, \quad (\alpha\neq\pi/2) \tag{2.2}$$

где $v_1=(V^+-V^-)/2$, $v_2=(V^++V^-)/2$, A_k, C_k, B_k — постоянные, подлежащие определению, $\beta=\pi/(2\alpha)$.

Согласно (1.4), (1.2), (2.1) и (2.2), будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty}(A_k^*\sin k\theta+aB_k^*\cos k\theta)=f_{1,j}(\theta)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^*k\sin k\theta-bB_k^*k\cos k\theta)=f_{2,j}(\theta) \tag{2.3}$$

где

$$\theta=\varphi+\pi/2, \quad A_k^*=A_k r_1^{k-1}, \quad B_k^*=C_k r_1^{k-1}$$

$$j=1 \quad \text{при} \quad \alpha=\pi/2;$$

$$\theta=\beta(\varphi+\alpha),\quad A_k^*=B_k r_1^{k\beta-1},\quad B_k^*=C_k r_1^{k\beta-1}$$

$$j=2 \quad \text{при} \quad \alpha\neq\pi/2;$$

$$a=-\frac{c_{44}}{e_{15}},\quad b=\frac{4\pi e_{15}}{\gamma},\quad \gamma=\frac{4\pi e_{15}^2}{c_{44}}+\varepsilon_1$$

$$f_{1.1}(\theta)=\frac{2v_2}{\pi}\theta\cos\theta+(v_1-v_2)\cos\theta+\frac{2v_2}{\pi}\ln r_1\sin\theta$$

$$f_{2.1}(\theta)=\frac{2v_2}{\pi}\theta\cos\theta+(v_1-v_2)\cos\theta+\frac{2v_2}{\pi}(1+\ln r_1)\sin\theta$$

$$f_{1.2}(\theta)=-\frac{v_1}{\sin\alpha}\sin\left(\frac{2\alpha}{\pi}\theta-\alpha\right)-\frac{v_2}{\cos\alpha}\cos\left(\frac{2\alpha}{\pi}\theta-\alpha\right)$$

$$f_{2.2}(\theta)=f_{1.2}(\theta)/\beta$$

3. Умножив обе части равенств (2.3) на $\sin m\theta$ ($m=1,2,\ldots$) и проинтегрировав их почленно в промежутке $[0,\pi]$, получаем соответственно

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{2}A_m^*+a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m[1-(-1)^{m-k}]}{m^2-k^2}B_k^*=f_{1,j}^{(m)}\\&\frac{\pi}{2}A_m^*-b\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k[1-(-1)^{m-k}]}{m^2-k^2}B_k^*=\frac{1}{m}f_{2,j}^{(m)}\end{aligned}\tag{3.1}$$

где

$$\frac{1-(-1)^{m-k}}{m^2-k^2}=0 \quad \text{при} \quad m=k$$

$$f_{1,1}^{(1)}=v_2\left(\ln r_1-\frac{1}{2}\right),\quad f_{2,1}^{(1)}=v_2\left(\ln r_1+\frac{1}{2}\right)$$

$$f_{1,1}^{(m)}=\frac{m}{m^2-1}\{v_1[1+(-1)^m]-v_2[1-(-1)^m]\}$$

$$f_{2,1}^{(m)}=f_{1,1}^{(m)}\quad (m=2,3,\ldots)$$

$$f_{1,2}^{(m)}=\frac{4\pi^2 m}{\pi^2-(2\pi m)^2}\{v_1[1+(-1)^m]+v_2[1-(-1)^m]\}$$

$$f_{2,2}^{(m)}=f_{1,2}^{(m)}/\beta$$

Исключив теперь из (3.1) A_m^*, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов B_k^*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}x_n=-b_m^{(j)},\quad m=1,2,\ldots\tag{3.2}$$

где

$$x_n=B_{n-1}^*\quad (n=1,2,\ldots),\qquad b_m^{(j)}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{m}f_{2,j}^{(m)}-f_{1,j}^{(m)}\right)$$

$$a_{m,n}=\frac{[m+\lambda(n-1)][1-(-1)^{m-(n-1)}]}{m^2-(n-1)^2}, \quad \lambda=\frac{b}{a}=-\frac{4\pi e_{15}^2}{4\pi e_{15}^2+\varepsilon_1 c_{44}}$$

4. Ограничиваясь в разложениях (3.2) первыми двумя членами, определяем коэффициенты C_0, C_1, A_1 и B_1.

В случае полукругового поперечного сечения будем иметь

$$C_0=-\frac{v_2 r_1}{2a}, \quad C_1=\frac{v_1}{2a+b}, \quad A_1=\frac{v_2}{\pi}(2\ln r_1+1)$$

Для секторного поперечного сечения с произвольным углом α

$$C_0=\frac{4\pi v_2 r_1(2\alpha-\pi)}{a(4\pi^2-\alpha^2)}, \quad C_1=\frac{24\pi v_1 r_1^{1-\beta}(\alpha-\pi)}{(16\pi^2-\alpha^2)(2a+b)}, \quad B_1=\frac{32\alpha v_2 r_1^{1-\beta}}{\alpha^2-4\pi^2}$$

Подставив найденные коэффициенты в (1.2), получим решения рассматриваемых выше задач.

В случае поперечного сечения в виде полукруга τ_{zr}, $\tau_{\varphi z}$, E и E_φ, как следует из (2.1), обладают логарифмической особенностью, когда $v_2\neq 0$. В случае же секторного поперечного сечения ($\alpha\neq\pi/2$) с произвольным углом α эти величины имеют особенность вида $r^{\beta-1}$, что следует из (2.2).

Коэффициент особенности A составляющего вектора электрической индукции D_r, в случае призмы с полукруговым поперечным сечением, имеет вид

$$A=\left(\frac{4\pi e_{15}^2}{c_{44}}+\varepsilon_1\right)\frac{2v_2\cos\varphi}{\pi}$$

Коэффициентом особенности B компонента напряжения τ_{zr}, в случае призмы секторного поперечного сечения с произвольным углом a, будет

$$B=\frac{6\pi^2 v_1(\alpha-\pi)(4\pi e_{15}^2+\varepsilon_1 c_{44})e_{15}}{\alpha(16\pi^2-\alpha^2)(2\pi e_{15}-4\pi e_{15}^2-\varepsilon_1 c_{44})}$$

Отсюда следует, что, когда $V^+=V^-(v_1=0)$, особенность в τ_{zr} исчезает ($B=0$).

THE COUPLED ELECTROMECHANICAL FIELDS DEFINITION IN A CYLINDRICAL SECTOR FROM PIEZOCRYSTAL

P. V. GALPCHIAN

ԿԱՊՎԱԾ ԷԼԵԿՏՐԱՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՊԻԵԶՈԱԲՅՈՒՐԵՂՅԱ ԿԼԱՆԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐՈՒՄ

Պ. Վ. ԳԱԼՊՉՅԱՆ

Ամփոփում

Ուսումնասիրված է պիեզոաբյուրեղյա միջավայրի առանձնահատկություններ պարունակող կապված էլեկտրաառաձգական դաշտը:
Բերված է բանաձև եզակիության գործակցի համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галпчян П. В.* Определение особенности вблизи вершины сектора из пьезокристалла.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1987, т. *40*, №5, с. 35—39.
2. *Балакирев М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезокристаллах.—Новосибирск: Наука, 1982. 239 с.
3. *Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокристаллических тел.—Тепловые напряжения в элементах конструкций.—Киев: Наукова думка, 1975, вып. 15, с. 90—99.

Институт механики
АН Армении

Поступила в редакцию
11.X.1988