ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 43, № 5, 1990 Механика

УДК 539.3:534.222.2

МНОГОВОЛНОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКЕ

АВЕТИСЯН А. С.

В нелинейной электромагнитоупругости важное место занимают вопросы распространения электромагнитоакустических поверхностных волн. Вообще нелинейные поверхностные волны в электроупругих средах весьма слабо изучены [1—4] и др. Это объясняется тем, что учет нелинейностей в волновых уравнениях электромагнитоупругости приводит к качественно новым явлениям. Нелинейность материала уже не допускает простых периодических волновых решений и приводит к ангармоническим эффектам. В простейшем случае, когда на вход среды падает монохроматическая волна $u=A\sin(\omega t-\vec{k}\vec{r})$, нелинейност приводит к последовательному возбуждению временных гармоник волны $u_n=A_n\sin(\omega_n t-\vec{k}_n\vec{r})$. При этом амплитуды генерационных гармоник будут функциями времени t и направления распространения волны $\vec{r}$.

1. Рассматривается распространение поверхностных электроакустических волн по границе нелинейной электроупругой среды, занимающей область $\{x_3\geq 0,\ |x_2|<\infty,\ |x_1|<\infty\}$. Область $x_3<0$ занимается нематериальной средой (вакуум). Не нарушая общности, будет предполагаться, что волна распространяется по координатной оси ox_1. Исходя из полученных результатов в работе [5], нелинейные электроакустические эффекты в пьезодиэлектрическом полупространстве описываются с помощью нелинейных волновых уравнений

$$\begin{aligned}
&L_s[u_i,\Phi]\equiv c_{iskn}u_{n,ik}+e_{ris}\Phi_{,ri}-\rho_0\ddot{u}_s=NL_s[u_j,\Phi]\\
&L_4[u_k,\Phi]\equiv e_{ikm}u_{m,ki}-\varepsilon_{ik}\Phi_{,ik}=NL_4[u_s,\Phi]\\
&L_5[\Phi^{(e)}]\equiv-\varepsilon_0\Phi^{(e)}_{,ii}=NL_5[\Phi^{(e)},u_j^{(e)}]
\end{aligned}\qquad(1.1)$$

и нелинейных граничных условий на границе раздела электроупругой среды с вакуумом $x_3=0$:

$$\begin{aligned}
&B_m[u_k,\Phi]\equiv c_{3mkn}u_{k,n}+e_{n3m}\Phi_{,n}=G_m[u_s,\Phi,\Phi^{(e)}]\\
&B_4[u_i,\Phi,\Phi^{(e)}]\equiv e_{3kn}u_{n,k}-\varepsilon_{3k}\Phi_{,k}+\varepsilon_0\Phi^{(e)}_{,3}=G_4[u_i,\Phi,u_j^{(e)},\Phi^{(e)}]\\
&B_5[\Phi,\Phi^{(e)}]\equiv\Phi-\Phi^{(e)}=0
\end{aligned}\qquad(1.2)$$

Здесь индексы $l, j, k, m, n, r, s, \beta$ принимают значения 1; 2; 3. Нелинейные оп раторы $NL_s[\cdot]$ и $G_m[\cdot]$ (где $m, s = \overline{1,5}$) соответствуют нелинейности электроупругой задачи. Выражения нелинейных слагаемых $NL_s[u_j, \Phi, \Phi^{(e)}]$ и $G_m[u_k, u_j^{(e)}, \Phi]$ громоздкие, поэтому тут не приводятся. Необходимо обратить внимание на то, что при учете геометрической нелинейности в уравнениях и граничных условиях имеем лагранжевые электрические потенциалы

$$\mathscr{E}_k = -\Phi_{,k}, \quad \mathscr{E}_j^{(e)} = -\Phi_{,j}^{(e)} \tag{1.3}$$

Если же геометрическая нелинейность не учитывается, то в соотношениях фигурируют истинные потенциалы электрических полей

$$E_m = -\Phi_{,m}; \quad E_j^{(e)} = -\Phi_{,j}^{(e)} \tag{1.4}$$

При изучении вопроса распространения поверхностных электроупругих нелинейных волн на искомые величины налагаются также условия затухания на бесконечности

$$\lim_{x_3 \to \pm\infty} f(x_s, t) = 0, \quad s = \alpha, \beta, \gamma \tag{1.5}$$

2. В общем случае анизотропии пьезокристалла в ограниченном вакуумом пьезодиэлектрике имеется пятипарциальная электроупругая волна. Однако, при высших симметриях пьезокристалла возможно разделение плоского и антиплоского электроупругих напряженно-деформированных состояний. Важность разделения полей диктуется тем, что часто бывает необходимо возбуждать и передать на расстояние только чисто сдвиговые (SH) или только плоские (P и SV) волны.

В плоском деформированном состоянии одна из компонент вектора упругого перемещения $\vec{u} = \{u_i(x_k, t)\}$ равна нулю и остальные характеристики электроупругого поля не зависят от соответствующей координаты: $u_\gamma = 0$ и $\partial/\partial x_\gamma = 0$. Для разделения плоского деформированного состояния необходимо тождественное удовлетворение уравнения

$$L_{\alpha\gamma,\alpha} + L_{\beta\gamma,\beta} - \rho_0 \ddot{u}_\gamma \equiv 0 \tag{2.1}$$

где индексы $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3 / \beta, \alpha \neq \gamma, \alpha \neq \beta\}$

Уравнение (2.1) выполняется, если компоненты тензоров физических постоянных нелинейного пьезодиэлектрика удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}
c_{i\gamma mn} \equiv 0, \quad e_{mi\gamma} \equiv 0, \quad e_{mi\gamma kn} \equiv 0 \\
c_{i\gamma klmn} + \delta_{km} c_{i\gamma nl} \equiv 0, \quad e_{mi\gamma klpq} + \delta_{kp} e_{mi\gamma ql} \equiv 0 \\
\frac{1}{3} c_{i\gamma klmnpq} + \frac{1}{2} \delta_{kp} c_{i\gamma qlmn} + \frac{1}{2} \delta_{mp} c_{i\gamma klqn} \equiv 0 \\
l_{mai\gamma} \equiv 0, \quad l_{\ \ i\gamma} \equiv 0, \quad f_{m\ \ i\gamma} \equiv 0
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь для индексов также имеем $i, m, n, k, l, p, q \in \{\alpha, \beta / \beta \neq \gamma, \alpha \neq \beta\}$. Условия разделения плоского напряженно-деформированного состояния намного упрощаются, если в задаче электроупругости учитывать либо геометрическую, либо физическую нелинейность. Учет только геометрической нелинейности позволяет записать условия разделения плоской задачи электроупругости только через компоненты тензоров упругости второго ранга c_{ijkn} и пьезоэлектрических постоянных e_{mij} [6].

Если же задача электроупругости физически нелинейна и геометрически линейна, то условия разделения плоского напряженно-деформированного электроупругого состояния $u_\alpha \neq 0$, $u_\beta \neq 0$, $u_\gamma \equiv 0$, $\partial / \partial x_\gamma \equiv 0$ запишутся в следующем виде:

$$c_{i\gamma mn} \equiv 0, \quad c_{i\gamma klmn} \equiv 0, \quad c_{i\gamma klmnpq} \equiv 0, \quad e_{mi\gamma} \equiv 0, \quad l_{mni\gamma} \equiv 0, \quad e_{mi\gamma kl} \equiv 0 \tag{2.3}$$

$$e_{mi\gamma klpq} \equiv 0, \quad l_{mni\gamma pq} \equiv 0, \quad f_{mnpi\gamma} \equiv 0$$

Здесь, как и в общем случае, индексы i, m, n, k, l, p, q принимают значения α или β ($\alpha, \beta \neq \gamma$; $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}$).

Антиплоскому напряженно-деформированному электроупругому состоянию соответствует вектор упругого перемещения с компонентами $u_\alpha = u_\beta \equiv 0$, $u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t)$. Все остальные физические характеристики электроупругого поля изменяются в координатной плоскости $x_\alpha O x_\beta$ то есть $\partial / \partial x_\gamma \equiv 0$). Для разделения указанного деформированного состояния необходимо тождественное удовлетворение уравнений

$$L_{\alpha\alpha,\alpha} + L_{\alpha\beta,\beta} - \rho_0 \ddot{u}_\alpha \equiv 0, \quad L_{\gamma\alpha,\alpha} + L_{\gamma\beta,\beta} - \rho_0 \ddot{u}_\gamma \equiv 0 \tag{2.4}$$

Условия, налагаемые на компоненты тензоров физических постоянных нелинейного пьезодиэлектрика, запишутся в виде

$$c_{ij\gamma m} \equiv 0, \quad e_{mi\gamma} \equiv 0, \quad c_{ij\gamma l\gamma n} \equiv 0$$

$$\frac{1}{3} c_{ij\gamma l\gamma n\gamma q} + \frac{1}{2} (c_{ijql\gamma n} + c_{ij\gamma lqn}) \equiv 0, \quad e_{mij\gamma l} \equiv 0 \tag{2.5}$$

$$e_{mij\gamma l\gamma q} + e_{mi\gamma ql} \equiv 0, \quad l_{mnlj\gamma q} \equiv 0, \quad f_{mnl\gamma} \equiv 0$$

$$l_{mni\gamma} - \delta_{im}\delta_{\gamma n} - \delta_{in}\delta_{\gamma m} + \delta_{i\gamma}\delta_{mn} \equiv 0$$

Здесь также индексы i, j, m, n, p, q, k, l из указанного выше множества $\Omega = \{\alpha, \beta / \alpha, \beta \neq \gamma; \alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}\}$. Условия (2.5) намного упрощаются в случае физически линейной, геометрически нелинейной задачи электроупругости: $c_{ij\gamma m} \equiv 0$, $e_{mi\gamma} \equiv 0$, а также в случае физически нелинейной, геометрически линейной задачи электроупругости. В этом случае последнее соотношение из (2.5) запишется в виде $l_{mni\gamma} \equiv 0$.

Необходимо обращать внимание на то, что при такой постановке задач электроупругости, сопутствующее напряженно-деформированному состоянию электрическое поле всегда является плоской и изменение поля происходит в плоскости $x_\alpha O x_\beta$.

3. Поскольку нелинейности кристаллов малы, в большинстве слу-

чаев при решении задач о распространении нелинейных волн достаточно ограничиться приближением заданного волнового электроупругого поля. Очевидно также, что при прохождении волной расстояния порядка длины волны, амплитуда волны будет изменяться на малую величину ε. Такой количественной характеристикой может быть мера изменения (понижения) первичного волнового сигнала. Тогда, произведя замену производных по x_α и по t

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \to \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}$$

где $\xi = \varepsilon x_\alpha$, $\tau = \varepsilon t$ — медленно изменяющиеся координата и время, вместо волновых уравнений (1.1) и граничных условий (1.2) будем иметь следующие соотношения:

$$\begin{aligned} L_k[u_i, \Phi] &= NL_k[u_j, \Phi] - \{2c_{\alpha k\alpha q} u_{q,\alpha\xi} - (c_{ik\alpha q} + c_{\alpha kiq}) u_{q,i\xi} + \\ &- e_{\alpha ik}\Phi_{,i\xi} + 2\rho u_{k,t\tau} - e_{r\alpha k}\Phi_{,r\xi}\}\varepsilon + \{\rho u_{k,\tau\tau} - c_{\alpha k\alpha q} u_{q,\xi\xi} - e_{\alpha\alpha s}\Phi_{,\xi\xi}\}\varepsilon^2 \\ L_4[u_k, \Phi] &= NL_4[u_j, \Phi] - \varepsilon\{(e_{\alpha im} + \varepsilon_{i\alpha m}) u_{m,i\xi} + (\varepsilon_{i\alpha} + \varepsilon_{\alpha i})\Phi_{,i\xi}\} - \\ &\qquad - \{e_{\alpha\alpha m} u_{m,\xi\xi} + \varepsilon_{\alpha\alpha}\Phi_{,\xi\xi}\}\varepsilon^2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} B_m[u_k, \Phi] &= \{-c_{\beta mk\alpha} u_{k,\xi} - e_{\alpha\beta m}\Phi_{,\xi}\}\varepsilon + G_m[u_s, \Phi, \Phi^{(e)}] \\ B_4[u_i, \Phi, \Phi^{(e)}] &= \{-e_{\beta\alpha n} u_{n,\xi} + \varepsilon_{\beta\alpha}\Phi_{,\xi}\}\varepsilon + G_4[u_i, \Phi, u_j^{(e)}, \Phi^{(e)}] \\ B_5[\Phi, \Phi^{(e)}] &= 0; \quad m, k = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Учитывая малость нелинейности, воспользуемся методом возмущения, представляя искомые характеристики электромеханического волнового поля в виде рядов по малому физическому параметру ε:

$$F(x_s, \xi, \tau, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m F_m(x_s, \xi, \tau, t) \tag{3.3}$$

с учетом того, что амплитуды искомых величин будут функциями медленных координат и времени: $A = A(\xi, \tau)$. После подстановки представлений (3.3) в уравнения электроупругости (3.1) и в граничные условия (3.2) и приравнения выражения при одинаковых степенях ε, получим линейную однородную краевую задачу для определения электроупругого поля нулевого приближения:

$$L_s[u_{0i}, \Phi_0] = 0, \quad L_s[\Phi_0^{(e)}] = 0, \quad s = \overline{1;4} \tag{3.4}$$

$$B_m[u_{0k}, \Phi_0] = 0, \quad B_4[u_{0i}, \Phi_0, \Phi_0^{(e)}] = 0, \quad B_5[\Phi_0, \Phi_0^{(e)}] = 0 \tag{3.5}$$

Полученные уравнения электроупругости и граничные условия нулевого приближения вместе с условиями затухания на бесконечности $x_3 \to \pm\infty$ искомых функций $F_0(x_s, \xi, \tau, t)$, соответственно, описывают распространение поверхностного электроупругого линейного волнового сигнала в пьезоэлектрическом полупространстве со свободной границей. В общем случае анизотропии пьезодиэлектрического кристалла, когда плоское и антиплоское напряженно-деформированное состояния не разделяются, линейным сигналом может быть многопорциальная электроупругая волна. Решения линейной краевой задачи (3.4), (3.5), соответствующие локализованной у границы раздела сред $x_\beta=0$ электроупругих волн, распространяющихся по направлению оси ox_α запишутся в следующем виде:

$$F_{s0}(x_j,\xi,\tau,t)=\sum_{m=1}^{\infty} g_{sm}(x_\beta)A_{0m}(\xi,\tau)\exp(im\varphi)+\text{к. с.} \tag{3.6}$$

$$\Phi_0^{(e)}(x_j,\xi,\tau,t)=\sum_{m=1}^{\infty} g_{5m}(x_\beta)A_{0m}(\xi,\tau)\exp(im\varphi)+\text{к. с.} \tag{3.7}$$

где $\varphi=kx_\alpha-\omega t$ — фазовая функция, $A_{0m}(\xi,\tau)$ — комплексные амплитуды генерационных гармоник электроупругой волны, $g_{ij}(x_\beta)$ — экспоненциальные функции в области $x_\beta\geqslant 0$ и затухающие при $x_\beta\to+\infty$, $g_{sn}(x_\beta)$ — экспоненциальная функция, определенная в области $x_\beta<0$ и затухающая при $x_\beta\to-\infty$, индекс s принимает значения $\overline{1,4}$.

Обычно в качестве линейного сигнала (поверхностной электроупругой волны) в практике используются или рэлеевский электроупругий сигнал $\{u_\alpha(x_\alpha, x_\beta, t), u_\beta(x_\alpha, x_\beta, t), 0, \Phi(x_\alpha, x_\beta, t)\}$, или чисто сдвиговой электроупругий сигнал $\{0, 0, u_\gamma(x_\alpha, x_\beta, t), \Phi(x_\alpha, x_\beta, t)\}$ (волны Гуляева-Блюстейна). Возможность возбуждения только одного из указанных, локализованных у границы раздела двух сред, волновых электроупругих полей в пьезодиэлектрике связана как с анизотропией пьезокристалла [11], так и от граничных условий на поверхности раздела. Анизотропия пьезокристалла позволяет разделение плоского и антиплоского напряженно-деформированных электроупругих полей. Локализация же у поверхности электроупругих волн зависит от совокупности граничных условий.

Для следующих приближений получаются рекуррентные системы неоднородных волновых уравнений относительно искомых $F_m(x_s, \xi, \tau, t)$ функций $(1\leqslant m<\infty)$. В правые части этих уравнений входят функции $F_n(x_s, \xi, \tau, t)$ (где $0\leqslant n\leqslant m-1$), определяемые из предыдущих приближений

$$\begin{aligned}
L_k[u_s^{(m)}, \Phi_m]&=NL_k^{(m)}[u_j^{(n)}, \Phi_n]-\{2c_{\alpha k\alpha q}\, u_{q,\alpha\xi}^{(m-1)}+(c_{ik\alpha q}+c_{\alpha kiq})u_{q,i\xi}^{(m-1)}-\\
&-2\rho u_{k,t\tau}^{(m-1)}+(e_{\alpha ik}+e_{i\alpha k})\Phi_{m-1,i\xi}\}-c_{\alpha k\alpha q}\, u_{q,\xi\xi}^{(m-2)}+\rho u_{k,\tau\tau}^{(m-2)}-e_{\alpha\alpha k}\Phi_{m-2,\xi\xi}\\
L_4[u_k^{(m)},\Phi]&=NL_4^{(m)}[u_j^{(n)},\Phi_n]-(e_{\alpha ij}+e_{i\alpha j})u_{j,i\xi}^{(m-1)}+\\
&+(\varepsilon_{i\alpha}+\varepsilon_{\alpha i})\Phi_{m-1,i\xi}-e_{\alpha\alpha j}u_{j,\xi\xi}^{(m-2)}+\varepsilon_{\alpha\alpha}\Phi_{m-2,\xi\xi}\\
L_5[\Phi_m^{(e)}]&=NL_5^{(m)}[\Phi_n^{(e)},u_{jn}^{(e)}]+2\varepsilon_0\Phi_{m-1,\alpha\xi}^{(e)}+\varepsilon_0\Phi_{m-2,\xi\xi}^{(e)}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Соответственно для m-ого приближения из (3.2) получаем неоднородные граничные условия на деформированной поверхности

$$B_s[u_j^{(m)},\Phi_m]=G_s^{(m)}[u_j^{(n)},\Phi_n,\Phi_n^{(e)}]-c_{\beta sk\alpha}u_{k,\xi}^{(m-1)}-e_{\alpha\beta s}\Phi_{m-1,\xi}$$

$$B_4[u_i^{(m)}, \Phi_m, \Phi_m^{(e)}] = G_4[u_j^{(n)}, \Phi_n, \Phi_n^{(e)}] - e_{3\alpha n} u_{n,\xi}^{(m-1)} + \varepsilon_{\alpha 3} \Phi_{m-1,\xi} \qquad (3.9)$$

$$B_5[\Phi_m, \Phi_m^{(e)}] = 0$$

В приведенных уравнениях m ого приближения слагаемые с верхними индексами $m-j<0$ следует полагать равными нулю. Слагаемые в (3.8) $NL_s^{(m)}[u_j^{(n)}, \Phi_n, \Phi_n^{(e)}]$ получаются соответственно из нелинейных выражений $NL_s[u_k, \Phi, \Phi^{(e)}]$ и включают в себе только величины с порядком малости $\varepsilon^m (m \geq 1)$.

Полученные рекуррентные соотношения дают возможность исследовать процесс генерации высших гармоник поверхностной электроупругой нелинейной волны. Очевидно, что генерация высших гармоник будет зависеть как от характера линейного волнового сигнала, так и от анизотропии пьезодиэлектрического кристалла. Исходя из анизотропии (наличие центра инверсии), необходимо в стартовых уравнениях, а следовательно, и в слагаемых $NL_s[\cdot]$ сохранять квадратичную или кубическую нелинейности. Тогда в процессе генерации высших гармоник будем иметь двухфононные или трехфононные взаимодействия соответственно. В общем случае анизотропии пьезодиэлектрического кристалла волновой линейный сигнал содержит все компоненты упругого перемещения, напряженности внутреннего и внешнего электрических полей: $\{u_k^0, \Phi_0, \Phi_0^{(e)}\}$ $k=1, 2, 3$. Высшие симметрии допускают частные виды электроупругого линейного волнового сигнала (плоское или антиплоское напряженно-доформированное электроупругое), которые уже могут генерировать общее электроупругое состояние. Тогда вместо решения (3.6), (3.7) будем иметь:

а) в случае плоского напряженно-деформированного электроупругого состояния

$$F_{s0}(x_j, \xi, \tau, t) = \sum_{m=1} g_{sm}^{\text{пл}}(x_3) A_{0m}(\xi, \tau) \exp(im\varphi) + \text{к. с.}, \quad s=1, 2, 3$$

$$\Phi_0^{(e)}(x_j, \xi, \tau, t) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{4m}^{\text{пл}}(x_3) A_{0m}(\xi, \tau) \exp(im\varphi) + \text{к. с.} \qquad (3.10)$$

б) при антиплоском напряженно-деформированном электроупругом состоянии

$$F_{j0}(x_k, \xi, \tau, t) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{jm}^{\text{анпл}}(x_3) A'_{0m}(\xi, \tau) \exp(i\omega\varphi) + \text{к. с.}, \quad j=1, 2$$

$$\Phi_0^{(e)}(x_k, \xi, \tau, t) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{3m}^{\text{анпл}}(x_3) A'_{0m}(\xi, \tau) \exp(i\omega\varphi) + \text{к. с.} \qquad (3.11)$$

В правые части полученных рекуррентных соотношений (3.8), (3.9) войдут или $u_\alpha^0(x_\alpha, x_\beta, t)$, $u_\beta^0(x_\alpha, x_\beta, t)$, $\Phi_0(x_\alpha, x_\beta, t)$, $\Phi_0^{(e)}(x_\alpha, x_\beta, t)$ или $u_\gamma^0(x_\alpha, x_\beta, t)$, $\Phi_0(x_\alpha, x_\beta, t)$, $\Phi_0^{(e)}(x_\alpha, x_\beta, t)$ соответственно.

Подставляя решения нулевого приближения (3.6), (3.7) в соотношения (3.8), (3.9) первого приближения ($m=1$), получим неоднородную краевую задачу для исследования генерации высших гармоник при распространении поверхностных электроупругих волн (при двухфононном взаимодействии):

$$
\begin{gathered}
L_k[u_j^{(1)}, \Phi_1, \Phi_1^{(e)}] = \sum_{n=1} P_{0n}^{(k)}(x_3)\,|A_{0n}(\xi, \tau)|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \{G_{\tau}^{(k)}(x_3) A_{0m,\tau}(\xi, \tau) + \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}^{(k)}(x_3) A_{0n}^{*}(\xi, \tau) \cdot A_{0m+n}(\xi, \tau) + G_{\xi}^{(k)}(x_3) A_{0m,\xi}(\xi, \tau)\} \exp(im\varphi) + \\
+ \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{m-1} Q_{mn}^{(k)}(x_3) A_{0n}(\xi, \tau)\, A_{0m-n}(\xi, \tau) \exp(i\omega\varphi) + \text{к. с}
\end{gathered}
\tag{3.12}
$$

$$
\begin{gathered}
B_s[u_j^{(1)}, \Phi_1, \Phi_1^{(e)}] = \sum_{n=1}^{\infty} F_{0n}^{(s)}(0)\,|A_{0n}(\xi, \tau)|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \Big\{ H_{\xi}^{(s)}(0) A_{0m,\xi}(\xi, \tau) + \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{(s)}(0) A_{0n}^{*}(\xi, \tau) A_{0m+n}(\xi, \tau) \Big\} \exp(im\varphi) + \\
+ \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{m-} W_{mn}^{(s)}(0) A_{0n}(\xi, \tau) A_{0m-n}(\xi, \tau) \exp(im\varphi) + \text{к. с.}
\end{gathered}
\tag{3.13}
$$

В приведенных выражениях индексы k и s принимают значения $1 \div 5$, зависящие от x_3 величины — экспоненциальные функции, затухающие в бесконечности Звездочкой сверху обозначены комплексно сопряженные амплитуды.

Очевидно, что в результате наличия квадратичной нелинейности, вызывающей последовательность двухфононных процессов, в первом приближении уже вносится вклад во все гармоники электроупругой волны. Вклад в каждую гармонику волны характеризуется соответствующими коэффициентами при $\exp(im\varphi)$ в уравнениях (3.12) и в граничных условиях (3.13). Вследствие двухфононного взаимодействия возникает также нераспространяющееся электроупругое поле (электроакустическое детектирование). Исходя из сказанного, представим решения полученной краевой задачи в виде разложения по гармоникам

$$
f^{(1)}(x_j, \xi, \tau, t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m^{(1)}(x_3, \xi, \tau) \exp(im\varphi) + \text{к. с.} \tag{3.14}
$$

где функция $f^{(1)}(x_j, \xi, \tau, t)$ — элемент множества $\chi := \{u_n^{(1)}(x_j, \xi, \tau, t)$, $\Phi_1(x_k, \xi, \tau, t)$, $\Phi_1^{(e)}(x_j, \xi, \tau, t)\}$. В разложении (3.14) функции $f_0(x_3, \tau, \xi)$ вещественны и описывают электроакустическое детектирование. Для определения этого нераспространяющегося электроупругого поля необходимо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
L_k^{(0)}[u_{j0}^{(1)}, \Phi_{01}, \Phi_{01}^{(e)}] = \sum_{n=1}^{\infty} P_{0n}^{(k)}(x_3)|A_{0n}(\xi, \tau)|^2, \quad k = \overline{1;5} \tag{3.15}
$$

с краевыми условиями на поверхности $x_3=0$

$$B_s^{(0)}[u_{j0}^{(1)}, \Phi_{01}, \varphi_{01}^{(e)}] = \sum_{n=1}^{\infty} F_{0n}^{(s)}(0)|A_{0n}(\xi, \tau)|^2, \quad s=\overline{1,5}, \tag{3.16}$$

и с условиями затухания в бесконечности

$$\lim_{x_\beta \to +\infty} f_0^{(1)}(x_\beta, \xi, \tau)=0, \quad \lim_{x_\beta \to -\infty} \Phi_{0j}^{(e)}(x_\beta, \xi, \tau)=0 \tag{3.17}$$

Дифференциальные операторы $L_k^{(0)}[\cdot]$ и $B_s^{(0)}[\cdot]$ получаются из $L_k[\cdot]$ и $B_s[\cdot]$ соответственно, сохраняя в них только производные по x_3.

Подставляя разложение (3.14) в уравнения (3.12), для каждой гармоники получаем систему пяти линейных, неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений. Затухающие в бесконечности решения этой системы для каждой искомой функции $f_m^{(1)}(x_\beta, \xi, \tau)$, $(m \geqslant 1)$ можно записать в виде

$$f_m^{(1)}(x_\beta, \xi, \tau) = \sum_{j=1}^{5} (b_{mj} + \bar{b}_{mj} x_\beta) \exp(-p^j x_3) + \sum_{j=6}^{15} \bar{b}_{jm} \exp(-p_j x_3) \tag{3.18}$$

Здесь b_{mj} — произвольные „постоянные" интегрирования, зависящие от медленных координаты ξ и времени τ. Остальные коэффициенты: $\bar{b}_{mj}$ и $\tilde{b}_{mj}$ — линейные комбинации выражений $A_{0n}^*(\xi, \tau) A_{0m+n}(\xi, \tau)$ и $A_{0n}(\xi, \tau) A_{0m-n}(\xi, \tau)$ комплексных амплитуд, а также производных этих амплитуд $A_{0m,\xi}(\xi, \tau)$ и $A_{0m,\tau}(\xi, \tau)$. Коэффициенты затухания $p_j (j=6, \ldots, 15)$ — свертки основных коэффициентов затухания $p_j (j=1, \ldots, 5)$.

Удовлетворяя граничным условиям (3.13) для каждой гармоники, получим систему алгебраических неоднородных уравнений относительно произвольных постоянных $b_{jm}(\xi, \tau)$. Главный детерминант в каждом случае совпадает с дисперсионным уравнением линейных электроупругих волн. Из нулевого приближения известно, что $\det\|M^0\|=0$. Следовательно, из условия существования нетривиальных решений получим бесконечную систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно комплексных амплитуд $A_{0m}(\xi, \tau)$:

$$c_0 A_{0m,\xi} + A_{0m,\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \{a_{mn} A_{0n}^* A_{0n+m} + d_{mn} A_{0n} A_{0m-n}\} \tag{3.19}$$

Здесь коэффициенты a_{mn} и d_{mn} (причем $d_{mn} \equiv 0$ при $n \geqslant m$) комплексные, зависят от физических характеристик материала, c_0 — скорость распространения линейного электроупругого сигнала, $m \geqslant 1$.

Полученная бесконечная система квазинелинейных дифференциальных уравнений (3.19) описывает взаимодействие генерационных гармоник, локализованной у поверхности пьезодиэлектрического полупространства электроупругой нелинейной волны. При учете кубичной нелинейности в правой части полученного уравнения появится кубически нелинейное слагаемое, что будет следствием трехфононного взаимодействия.

Бесконечную систему можно записать относительно вещественных модулей $R_m(\xi, \tau)$ и фаз $\theta_m(\xi, \tau)$ комплексных амплитуд взаимодействующих гармоник. Представляя комплексные амплитуды $A_{0m}(\xi, \tau)$ в виде

$$A_{0m}(\xi, \tau)=R_m(\xi, \tau)\exp\{i\theta_m(\xi, \tau)\} \tag{3.20}$$

из (3.19) получим новую бесконечную систему

$$\begin{gathered} c_0 R_{m,\xi}+R_{m,\tau}=N_m^{(r)}[R_s, \sin\theta_j, \cos\theta_k] \\ R_m(c_0\theta_{m,\xi}+\theta_{m,\tau})=N_m^{(\theta)}[R_n, \sin\theta_s, \cos\theta_l] \end{gathered} \tag{3.21}$$

Процесс взаимодействия естественно зависит от характера падающего электроупругого линейного сигнала. В случае квазимонохроматического электроупругого сигнала все комплексные амплитуды $A_{0m}(\xi, \tau)$ за исключением входной амплитуды $A_{01}(\xi, \tau)$ должны удовлетворять нулевым входным (на входе $\xi=0$) условиям. Это значит, что

$$R_1(0, \tau)=R_0(\tau); \quad R_m(0, \tau)=0 \quad \text{при} \quad m\geqslant 2 \tag{3.22}$$

фазы изменения комплексных амплитуд на входе $\xi=0$ также равны нулю: $\theta_m(0, \tau)=0$ при $m\geqslant 1$.

Конечно, при решении полученной квазилинейной краевой задачи необходимо ограничиться рассмотрением взаимодействия N первых гармоник. Чем большей выберем N конечное число, тем точнее получим картину взаимодействия гармоник волны. Но такое приближение применимо на не слишком большом расстоянии от источника (от входа линейного монохроматического сигнала). Оно не применимо также для сред с большой дисперсией или большей вязкости по сравнению с нелинейностью среды. При N—волновом приближении будем иметь систему из $2N$ квазилинейных дифференциальных уравнений.

Из полученных соотношений видно, что в качественном плане процесс генерации и взаимодействия гармоник электроупругих поверхностных волн не отличается от аналогичного процесса в случае объемных волн. Происходит затухание поверхностного электроупругого сигнала и перенос энергии вверх по спектру.

Количественный анализ полученных уравнений сведется к вычислению комплексных коэффициентов a_{mn} и d_{mn} и численному интегрированию укороченных уравнений (при $m\leqslant N$) (3.21). В зависимости от анизотропии материала и от величин физических характеристик фазы изменения комплексных амплитуд $A_{0m}(\xi, \tau)$ могут быть сдвинуты между собой.

В качестве примера изучено влияние электрострикционного эффекта и нелинейной диэлектрической проницаемости на распространение поверхностных электроупругих волн в поляризированной керамике [4]. В двухволновом приближении выявлен характер изменения комплексных амплитуд A_{01} (ξ, τ). Оказывается, что фазы изменения первых двух гармоник сдвинуты относительно друг друга. Происходит перекачка энергии от первой к второй гармонике распространяющейся волны. Мера перекачки энергии при этом зависит от коэффициента электромеханической связи пьезодиэлектрика $\chi^2=e_{15}^2/(\varepsilon_{11}c_{44})$.

POLYWAVES INTERECTION UNDER PROPAGATION OF SURFACE ELECTROELASTIC WAVES IN A NONLINEAR PIEZOELECTRIC

A. S. AVETISYAN

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՊԻԵԶՈԷԼԵԿՏՐԻԿՈՒՄ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ ԱԼԻՔԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա. Ս. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Բերված ոչ գծային ալիքային հավասարումների և առնչությունների հիման վրա, հետազոտվում է ալիքային փոխազդեցությունը ոչ գծային պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածությունում էլեկտրաառաձգական մակերևութային ալիքների տարածման ժամանակ։ Լուծման ընթացքում օգտվում ենք դանդաղ փոփոխվող ամպլիտուդների և գրգռումների մեթոդներից։ Էլեկտրաառաձգական մակերևութային ալիքի ամպլիտուդների նկատմամբ ստացված է, և մասնավոր դեպքում ուսումնասիրված է, ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Реутов В. П.* Применение усредненного вариационного принципа для описания многоволновых взаимодействий упругих поверхностных волн.—Изв. ВУЗ, Радиофизика, 1973, т. *16*, вып. 11, с. 1690—1702.
2. *Красильников В. А., Лямов В. Е., Солодов Ю. И.* Нелинейные акустические эффекты при распределении поверхностных волн в кристаллах кварца.—Изв. АН СССР, сер. Физическая, 1971, т. *35*, №5, с. 944—948.
3. *Lardner R. W.* Nonlinear surface waves on an elastic solid of general anisotropy.—J. Elasticity, 1986, v. 16, № 1, p. 63—75.
4. *Аветисян А. С., Белубекян М. В.* Нелинейные поверхностные электроупругие волны в керамике.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1988, т. 41, №4, с. 9—18.
5. *Аветисян А. С.* Об основных уравнениях нелинейной электроупругости пьезоэлектрического диэлектрика.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1990, т. 43, №4, с. 41—51.
6. *Аветисян А. С.* К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1985, т. 38, №1, с. 12—19.

Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию 18.V.1989