ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, №4, 1990 Механика

УДК 539.3

ОБ УСЛОВИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВОЛНЫ СТОУНЛИ ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕМ КОНТАКТЕ

БЕЛУБЕКЯН М. В.

Задача о распространении поверхностной волны, локализованной вблизи поверхности раздела двух сред при условиях отсутствия касательных напряжений между ними, рассматривалась в [1—4]. На основе численных расчетов показано как существование, так и отсутствие поверхностной волны в зависимости от упругих характеристик сред.

В настоящей работе приводится новая форма записи дисперсионного уравнения задачи, которая позволяет получить необходимое и достаточное условие существования поверхностной волны.

1. Пусть в прямоугольной декартовой координатной системе (x_1, x_2, x_3) упругие полупространства с разными механическими свойствами разделены плоскостью $x_2=0$. Рассматривается задача плоской деформации в плоскости (x_1, x_2). Компоненты упругих перемещений представляются в виде [3]

$$u_1^{(1)}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2},\quad u_2^{(1)}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\quad (x_2>0)$$

$$u_1^{(2)}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2},\quad u_2^{(2)}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\quad (x_2<0)\tag{1.1}$$

где функции φ_n и $\psi_n (n=1,2)$ удовлетворяют уравнениям

$$c_{ln}^2\Delta\varphi_n=\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial t^2},\quad c_{tn}^2\Delta\psi_n=\frac{\partial^2\psi_n}{\partial t^2}\tag{1.2}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$c_{ln}^2=\frac{\lambda_n+2\mu_n}{\rho_n},\quad c_{tn}^2=\frac{\mu_n}{\rho_n}\quad (n=1,2)$$

Предполагается, что на границе раздела между полупространствами (при $x_2=0$) осуществляются условия скользящего контакта

$$\sigma_{22}^{(1)}=\sigma_{22}^{(2)},\quad u_2^{(1)}=u_2^{(2)},\quad \sigma_{21}^{(1)}=0,\quad \sigma_{21}^{(2)}=0$$

которые в соответствии с (1.1) записываются в виде

$$\sum_{n=1}^{2}(-1)^n\left[(\lambda_n+2\mu_n)\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_2^2}+\lambda_n\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_1^2}-2\mu_n\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x_1\partial x_2}\right]=0\tag{1.3}$$

$$\sum_{n=1}^{2}(-1)^n\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi_n}{\partial x_1}\right)=0,\quad 2\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x_1^2}=0$$

Задача состоит в нахождении решений уравнений (1.2), удовлетворяющих граничным условиям (1.3) и условиям затухания при $x_2\to\pm\infty$.

Решения уравнения (1.2) представляются в виде

$$\varphi_1=A_1\exp[-k\nu_1x_2+i(\omega t-kx_1)],\quad \psi_1=B_1\exp[-k\nu_2x_2+i(\omega t-kx_1)]$$

$$\varphi_2=A_2\exp[k\varkappa_1x_2+i(\omega t+kx_1)],\quad \psi_2=B_2\exp[k\varkappa_2x_2+i(\omega t-kx_1)] \tag{1.4}$$

где

$$\nu_1^2=1-\theta_1\eta,\quad \nu_2^2=1-\eta,\quad \varkappa_1^2=1-\theta_2\eta,\quad \varkappa_2^2=1-\theta_3\eta$$

$$\eta=\frac{\omega^2}{k^2c_{t1}^2},\quad \theta_1=\frac{c_{t1}^2}{c_{l1}^2},\quad \theta_2=\frac{c_{t1}^2}{c_{l2}^2},\quad \theta_3=\frac{c_{t1}^2}{c_{t2}^2} \tag{1.5}$$

Направление координатной оси ox_2 выбирается так, чтобы выполнялось условие $c_{t1}\leqslant c_{t2}$. Тогда решения (1.4) будут удовлетворить условию затухания при $x_2\to\pm\infty$, если имеет место неравенство

$$0<\eta<1 \tag{1.6}$$

Подстановка (1.4) в граничные условия (1.3) приводит к системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n и B_n

$$(2-\eta)A_1-2i\nu_2B_1-g(2-\theta_3\eta)A_2-2ig\varkappa_2B_2=0$$

$$2i\nu_1A_1+(2-\eta)B_1=0,\quad g=\mu_2/\mu_1$$

$$-\nu_1A_1+iB_1-\varkappa_1A_2-iB_2=0,\quad -2i\varkappa_1A_2+(2-\theta_3\eta)B_2=0 \tag{1.7}$$

Равенство нулю детерминанта системы (1.7) приводит к следующему уравнению относительно η:

$$\eta\{\theta_3\varkappa_1[(2-\eta)^2-4\nu_1\nu_2]+g\nu_1[(2-\theta_3\eta)^2-4\varkappa_1\varkappa_2]\}=0 \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) имеет корень $\eta=0$. Однако, легко показать, что в этом случае все перемещения из (1.1) тождественно равны нулю. Следовательно, в условии существования поверхностной волны (1.6) знак равенства исключается.

В случае сред с одинаковыми упругими свойствами уравнение (1.8) приводится к виду

$$\nu_1[(2-\eta)^2-4\nu_1\nu_2]=0 \tag{1.9}$$

Выражение в квадратной скобке—функция Рэлея. Равенство нулю функции Рэлея определяет корень уравнения (1.9) (единственный), соответствующий скорости поверхностной волны.

Корню $\eta=\theta_1^{-1}(\nu_1=0)$ соответствует предельная [5] волна ($c_{l1}=c_{l2}=c_l$)

$$u_1^{(1)}=-ikA\exp ik(\pm c_l t-x_1),\quad u_2^{(1)}\equiv 0$$

$$u_1^{(2)}=-ikA\exp ik(\pm c_l t-x_1),\quad u_2^{(2)}\equiv 0$$

2. Уравнение (1.8), после сокращения на η, удобно записать в форме

$$\theta_2\varkappa_1[\gamma^2+4\nu_2(\nu_2-\nu_1)]+g\nu_1[\theta_3\gamma^2+4\nu_2(\varkappa_2-\varkappa_1)]=0 \qquad (2.1)$$

Если в уравнении (2.1) разности $\nu_2-\nu_1$, $\varkappa_2-\varkappa_1$ умножить и разделить, соответственно, на их суммы, получим уравнение, которое можно сократить на γ. Окончательно новая форма записи дисперсионного уравнения примет вид

$$R(\gamma)=\varkappa_1F_1(\gamma)+g\nu_1F_2(\gamma)=0 \qquad (2.2)$$

где

$$F_1(\gamma)=\gamma-\frac{4(1-\theta_1)\nu_2}{\nu_2+\nu_1},\quad F_2(\gamma)=\theta_3\gamma-\frac{4(1-\theta_4)\varkappa_2}{\varkappa_2+\varkappa_1},\quad \theta_4=\frac{c_{t2}^2}{c_{l2}^2} \qquad (2.3)$$

Исследуем свойства функции $R(\gamma)$ при $0\leqslant\gamma\leqslant 1$. Для значений функции $R(\gamma)$ на концах интервала получаются следующие выражения:

$$R(0)=-2(1-\theta_1)-2g(1-\theta_4)$$

$$R(1)=\sqrt{1-\theta_2}+g\sqrt{1-\theta_3}\,[\theta_3-4(1-\theta_4)\sqrt{1-\theta_3}(\sqrt{1-\theta_3}+\sqrt{1-\theta_2})^{-1}] \qquad (2.4)$$

Из условий $\theta_1<1$, $\theta_4<1$, $g>0$ (для реальных материалов $0<\theta_1<0{,}5$; $0<\theta_4<0{,}5$) следует $R(0)<0$. Поэтому условие $R(1)>0$ будет достаточным условием существования корня уравнения (2.2), удовлетворяющему условию существования поверхностной волны ($0<\gamma<1$).

Докажем, что условие $R(1)>0$ является также необходимым условием. Для этой цели исследуется производная функции $R(\gamma)$. Отметим прежде всего, что

$$F_1^1(\gamma)=1+2(1-\theta_1)^2(\nu_1\nu_2)^{-1}(\nu_1+\nu_2)^{-2}>0$$

$$F_2^1(\gamma)=\theta_3[1+2(1-\theta_4)^2(\varkappa_1\varkappa_2)^{-1}(\varkappa_1+\varkappa_2)^{-2}]>0 \qquad (2.5)$$

То есть функции $F_1(\gamma)$ и $F_2(\gamma)$ возрастают при $0\leqslant\gamma\leqslant 1$ и, в частности, наименьшие значения принимают при $\gamma=0$

$$\min F_1(\gamma)=F_1(0)=-2(1-\theta_1)<0$$

$$\min F_2(\gamma)=F_2(0)=-2(1-\theta_4)<0 \qquad (2.6)$$

3. Рассмотрим вначале частный случай $\theta_1=\theta_2=0$ ($c_{l1}=c_{l2}=c_l$, $\varkappa_1=\nu_1$). Уравнение (2.2) приводится к виду

$$\nu_1[F_1(\gamma)+gF_2(\gamma)]=0 \qquad (3.1)$$

Корню $\gamma=\theta^{-1}$ ($\nu_1=0$) соответствует решение в виде предельной волны

$$u_1^{(1)}=-ikA_1\exp ik(\pm c_l t-x_1),\quad u_2^{(1)}\equiv 0$$

$$u_1^{(2)}=-ik\frac{\rho_1(1-2\theta)}{\rho_2(1-2\theta_4)}A_1\exp ik(\pm c_l t-x_1),\quad u_2^{(2)}\equiv 0$$

Решение уравнения

$$R_1(\eta)\equiv F_1(\eta)+gF_2(\eta)=0 \tag{3.2}$$

определяет скорость поверхностной волны. Из (2.5) следует, что $R_1(\eta)>0$. Поэтому условие $R(1)>0$ (с учетом $\theta_1=\theta_2$) будет необходимым и достаточным для существования единственного корня при $0<\eta<1$.

В случае $\theta_1>\theta_2$ ($c_{11}<c_{12}$) вместо уравнения (2.2) удобно использовать эквивалентное уравнение

$$R_2(\eta)\equiv\varkappa_1\nu_1^{-1}F_1(\eta)+gF_2(\eta)=0 \tag{3.3}$$

Для производной $R_2'(\eta)$ получается выражение

$$R_2'(\eta)=\varkappa_1\nu_1^{-1}F_1'(\eta)+gF_2'(\eta)+\frac{1}{2}\varkappa_1^{-1}\nu_1^{-3}(\theta_1-\theta_2)F_1(\eta)$$

Используя (2.5) и (2.6), получим следующую оценку:

$$R_2'(\eta)>\frac{\varkappa_1}{\nu_1}+\frac{\theta_1-\theta_2}{2\varkappa_1\nu_1^3}F_1(0)>\frac{(1-\theta_1)^2}{\varkappa_1\nu_1^3}>0$$

Отсюда непосредственно следует необходимость условия $R(1)>0$.

При $\theta_1<\theta_2$ ($c_{11}>c_{12}$), представляя уравнение (2.2) в виде

$$R_3(\eta)\equiv F_1(\eta)+g\nu_1\varkappa_1^{-1}F_2(\eta)=0 \tag{3.4}$$

получаем оценку

$$R_3'(\eta)>\frac{g\theta_2(1-\theta_2)^2}{\varkappa_1^3\nu_1}>0$$

которая доказывает необходимость условия $R(1)>0$ и в этом случае.

Таким образом, доказано, что условие $R(1)>0$, где $R(1)$ определяется согласно (2.4), является необходимым и достаточным условием существования единственного действительного корня уравнения (2.2), удовлетворяющего условию $0<\eta<1$.

ON THE STOUNLY WAVES EXISTENCE CONDITION UNDER THE SLIDER CONTACT

M. V. BELUBEKIAN

ՍԱՀՈՂ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ԴԵՊՔՈՒՄ ՍՏՈՈՒՆԼԻ ԱԼԻՔԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆԻ ՄԱՍԻՆ

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է երկու կիսատարածությունները բաժանող եզրով մակերևութային ալիքների տարածման խնդիրը։ Կիսատարածությունները ունեն

տարբեր առաձգական հատկություններ և նրանց բաժանման եզրում իրակա-նացվում են սահքի կոնտակտի պայմանները։

Ստացված է մակերևութային ալիքի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Achenbach J. D., Epstein H. I.* Dynamic interaction of a layer and half-space —Proc. Amer. Soc. Civil. Eng., J. Eng. mech., 1967, 93, № 5, p. 27—42.
2. *Lee D. A., Corbly D. M.* Use of interface waves for nondestructive inspection. —IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics, 1977, 24, № 3, p. 206—212.
3. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.—Киев: Наук. думка, 1981, 284 с.
4. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В., Казарян К. Б.* Магнитоупругие поверхностные волны на границе раздела двух проводящих твердых тел.—Механика. Межвуз. сб. научных трудов—Ереван, ЕГУ, 1986, в. 4, с. 5—10.
5. *Балакирев М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезокристаллах.—Новосибирск: Наука, 1982, 240 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
7.II.1990