

УДК 539.3:534.222.2

ОБ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИЭЛЕКТРИКА

АВЕТИСЯН А. С.

Область исследований, учитывающая взаимосвязь механического и электромагнитного полей, существенно расширяется и пользоваться линейной теорией электроупругости для описания взаимодействия этих полей в реальных средах можно не во всех случаях.

Как известно, в твердых телах могут распространяться различные типы упругих волн. Это, естественно, приводит к значительному многообразию нелинейных взаимодействий волн. Другим важным обстоятельством является то, что наиболее интересный класс твердых, диэлектрических тел (пьезокристаллы) имеют анизотропию, что в определенной мере усложняет рассмотрение нелинейных эффектов.

Важное место в нелинейной электроупругости занимают вопросы распространения электроакустических поверхностных волн. Общие основы нелинейной электромагнитоупругости изложены в работах [1—3] и др., в которых мало обращается внимание на нелинейные краевые задачи. Нелинейные электромагнитоакустические эффекты в твердых телах принято подразделять на статические (распространение волн при воздействии на тело постоянных механических или электромагнитных возмущений) и динамические (генерация гармоник или искажение формы волны, взаимодействие волн и т. д.).

В предлагаемой работе, исходя из основных положений нелинейной теории электромагнитоупругости, выведены нелинейные волновые соотношения для ограниченных пьезодиэлектриков. При этом учитывается как геометрическая, так и физическая нелинейности.

1. В механике сплошных сред существуют два способа описания движения точек тела. Первый, когда каждой точке среды приписываются координаты $x_m (m = 1, 2, 3)$, которые в процессе деформации не изменяются (переменные Лагранжа). Во втором способе в качестве переменных используются координаты $\xi_j (j = 1, 2, 3)$, которые определяют место точек в пространстве, изменяющееся в процессе деформаций. Переменные ξ_k называют эйлеровыми.

Если точки тела в процессе движения получают перемещения, определяемые вектором \vec{u} с компонентами $u_k (k = 1, 2, 3)$, то закон движения точек тела можно записать в форме

$$\hat{\varepsilon}(x_j, t) = x_i + u_i(x_j, t), \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

При приложении к телу внешних воздействий любой природы, в окрестности любой точки тела характеристикой деформации является тензор деформации \hat{U} . Компоненты тензора связаны с компонентами вектора перемещения точек тела в лагранжевой форме описания следующим образом:

$$U_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (1.2)$$

Здесь и далее, если это особо не оговорено, по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3, индексом после запятой обозначено дифференцирование по лагранжевым координатам.

При движении материальных тел в электромагнитном поле между средой и полем происходит силовое взаимодействие. Взаимодействие среды с электромагнитным полем приводит к тому, что на каждый элемент сплошной среды наряду с объемными силами механического происхождения F_i^m действуют также поперомоторные силы F_j^{sm} . В пьезоэлектрической среде объемная сила электромагнитного происхождения (поперомоторная сила) равна:

$$\vec{F}^{sm} = \rho_e \vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \text{grad} \hat{\varepsilon} + \frac{1}{2} \text{grad} \left(E^2 \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \rho} \right) = (\vec{P} \vec{\nabla}) \vec{E} \quad (1.3)$$

Здесь \vec{P} — вектор электрической поляризации, \vec{E} — вектор напряженности электрического поля.

Характерной особенностью сил близкого действия является возможность сведения их к напряжениям, возникающим в деформированных средах. При рассмотрении многих вопросов замена поперомоторных сил эквивалентными им напряжениями оказывается весьма целесообразной [4, 5]. Между плотностью поперомоторных сил \vec{F}^{sm} и компонентами тензора напряжения электромагнитного происхождения t_{ij} (напряжения Максвелла), устанавливаются искомые дифференциальные соотношения

$$F_i^{sm} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial \varepsilon_j} \quad (1.4)$$

Представления (1.4) справедливы с учетом симметричности тензора максвелловских напряжений \hat{t} (то есть $t_{ij} = t_{ji}$). Максвелловские напряжения t_{ij} для анизотропных сред [4] (а пьезоэлектрики — это существенно анизотропные материалы) записываются в следующем виде:

$$t_{ij} = \frac{1}{2} [E_i D_j + E_j D_i + H_i B_j + H_j B_i - \delta_{ij} (E_k D_k + H_m B_m)] \quad (1.5)$$

Как известно, в линейной электроупругости потенциальным магнитным полем пренебрегают, а малое вихревое магнитное поле электроакустической волны определяется с помощью уравнений

$$\varepsilon_{rjm} H_{m,p} = D_{rj}^0, \quad B_{k,k} = 0, \quad B_k = \nu_{km} H_m \quad (1.6)$$

Ниже покажем, что в нелинейной электромагнитоупругости с учетом градиента деформации, в пьезодиэлектрике магнитное и электрическое поля взаимосвязаны.

Приведем уравнения движения материальной среды, описывающих взаимодействие их с электромагнитным полем, в материальных переменных. Подробный вывод уравнений движения среды и механических граничных условия можно найти в работах [6, 7] и др.

$$\left(J \frac{\partial x_k}{\partial z_i} T_{ij} \right)_{,k} = \rho_0 \ddot{u}_j \quad (1.7)$$

$$N_k \left[J \frac{\partial x_k}{\partial z_j} T_{ij} \right] = 0 \quad (1.8)$$

В электромагнитоупругих средах $T_{ij} = z_{ij} + t_{ij}$ — термодинамические напряжения, определяемые из термодинамического потенциала соответствующей среды. Для удобства записи, скачок лагранжевых напряжений $L_{ij} = J T_{ik} \partial x_j / \partial z_k$ на поверхности раздела электроупругих сред $L_{ij}^+ - L_{ij}^-$ обозначается прямыми скобками $[L_{ij}]$.

2. Определение напряженно-деформированного состояния в электромагнитоупругой среде производится совместно с определением электромагнитного поля в среде и представляет собой совместную задачу теории упругости и электромагнетизма. Основы электромагнетизма и вывод уравнений Максвелла изложены в [4, 5] и др. Обычно уравнения электромагнетизма формулируются в пространственных переменных Эйлера, но при изучении движения материальных сред с учетом электромагнитных эффектов, целесообразно иметь систему уравнений электромагнитоупругости, записанную в материальных переменных [1, 3] и др.

В электромагнитоупругости сопутствующее упругим волнам электромагнитное поле описывается уравнениями электромагнитостатики, тем самым пренебрегая малыми количественными поправками порядка v_{gr}^2/c^2 (c — скорость света в среде). Тогда наряду с уравнениями движения среды (1.7) решаются уравнения электромагнитостатики

$$\varepsilon_{rjm} \mathcal{H}_{m,p} = 0, \quad \mathcal{B}_{p,p} = 0, \quad \varepsilon_{rjm} \mathcal{E}_{m,p} = 0, \quad \mathcal{J}_{p,p} = 0 \quad (2.1)$$

Введенные здесь новые искомые величины

$$\mathcal{H}_m = H_i \xi_{i,m}, \quad \mathcal{E}_m = E_i \xi_{i,m}, \quad \mathcal{B}_p = J \frac{\partial x_p}{\partial z_i} B_i, \quad \mathcal{J}_p = J \frac{\partial x_p}{\partial z_n} D_n \quad (2.2)$$

представляют собой лагранжевые напряженности и индукции магнитного и электрического полей деформируемой среды соответственно. Очевидно, что с учетом деформируемости среды электрическое и магнитное поля связываются посредством градиента деформации $\xi_{i,l}$.

К уравнениям электромагнетизма (2.1) необходимо присоединить также граничные условия, налагаемые на электромагнитное поле. На деформированной, незаряженной границе раздела двух сред нормальные составляющие индукции магнитного и электрического полей, а также тангенциальные составляющие векторов напряженностей электрического и магнитного полей остаются непрерывными. В лагранжевых координатах эти условия запишутся в виде

$$\varepsilon_{ijk} N_j [\mathcal{E}_k^{(1)} - \mathcal{E}_k^{(2)}] = 0, \quad N_j [\mathcal{H}_j^{(1)} - \mathcal{H}_j^{(2)}] = 0 \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{ijk} N_j [H_k^{(1)} - H_k^{(2)}] = 0, \quad N_j [\mathfrak{B}_j^{(1)} - \mathfrak{B}_j^{(2)}] = 0 \quad (2.4)$$

Часто вместо условий сопряженности электрического поля (2.3) в теории электроупругости пользуются граничными условиями для электрически «закрытой» или электрически «открытой» границ. Если на поверхности пьезодиэлектрика нанесен тонкий металлический электрод и заземлен (электрический экран), то на поверхности раздела условия (2.3) заменяются условием электрически «закрытой» границы

$$\Phi^{(1)/s} = 0, \quad \text{где } \mathcal{E}_k = -\partial\Phi^{(1)}/\partial x_k \quad (2.5)$$

Когда диэлектрическая проницаемость внешней среды намного меньше диэлектрической проницаемости рассматриваемого диэлектрика (этот случай соответствует предельно малому отношению $\varepsilon_{ij}^{(2)}/\varepsilon_{mn}^{(1)} \ll 1$) условия (2.3) заменяются приближенным равенством

$$N_j \mathcal{H}_j^{(1)} = 0 \quad (2.6)$$

на поверхности раздела двух сред.

Наряду с тензором напряжения Лагранжа (Пiola-Кирхгофа) \hat{L} часто вводится тензор обобщенных напряжений $\hat{\sigma}^*$ [6], компоненты которого σ_{ij}^* связаны с лагранжевыми напряжениями формулами

$$\sigma_{ij}^* = L_{jn} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_n} \quad (2.7)$$

Если по аналогии введем понятия обобщенной индукции электрического поля D_k^* и обобщенной индукции магнитного поля B_n^*

$$D_k^* = \mathcal{H}_i \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j}, \quad B_n^* = \mathfrak{B}_j \frac{\partial x_n}{\partial \xi_j} \quad (2.8)$$

то уравнения и граничные условия электромагнитоупругости пьезодиэлектрической среды запишутся в форме

$$[\sigma_{ij}^* (\xi_{ki} + u_{k,j})]_{,j} = \rho_0 \ddot{u}_k, \quad N_k [\sigma_{ij}^* \xi_{k,j}] = 0 \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_{rpn} [H_k \xi_{k,m}]_{,p} = 0, \quad \varepsilon_{ijm} N_j [H_k \xi_{k,m}] = 0 \quad (2.10)$$

$$[B_n^* \xi_{p,n}]_{,p} = 0, \quad N_j [B_n^* \xi_{j,n}] = 0 \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{rpm} [E_k \xi_{k,m}]_{,p} = 0, \quad \varepsilon_{rpm} N_p [E_k \xi_{k,m}] = 0 \quad (2.12)$$

$$[D_n^* \xi_{p,n}]_{,p} = 0, \quad N_j [D_n^* \xi_{j,n}] = 0 \quad (2.13)$$

Необходимо отметить, что величины σ_{ij}^* не являются напряжениями в точном смысле этого слова, так и величины D_k^* и B_n^* не являются индукциями электрического и магнитного полей соответственно. Все эти величины можно отождествлять с истинными напряжениями T_{ij} и индукциями D_k и B_n соответственно, если удлинениями и сдвигами можно пренебрегать по сравнению с единицей. Разница между величинами Ω^* и Ω проявляется только при больших деформациях.

К полученным соотношениям электромагнитоупругости необходимо добавить определяющие уравнения для термодинамических напряжений T_{ij} и электрической индукции D_m . Для магнитных характеристик материальные уравнения представляются в виде

$$B_k = \mu_{kj} H_j \quad (2.14)$$

Учитывая инвариантность формы, термодинамическую функцию Гиббса можно представить как в виде разложения по градиенту деформации $\xi_{n,i}$ и напряженности электрического поля E_m (то есть $\Psi = \Psi(\xi_{n,i}; E_m)$), так и в виде разложения по истинным деформациям u_{ni} и лагранжевым электрическим напряженностям $\xi_m = E_k \xi_{k,m}$ (то есть $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(u_{ik}; \xi_m)$). Представляя термодинамическую функцию $\bar{\Psi}(u_{ik}; \xi_m)$ в виде ряда

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(u_{mn}, \xi_j) = & \frac{1}{2} c_{ijkl} u_{ij} u_{kl} + \frac{1}{6} c_{ijklmn} u_{ij} u_{kl} u_{mn} + \\ & + \frac{1}{24} c_{ijklmnpq} u_{ij} u_{kl} u_{mn} u_{pq} - e_{mij} \xi_m u_{ij} - \frac{1}{2} e_{mijkl} \xi_m u_{ij} u_{kl} - \\ & - \frac{1}{6} e_{mijklpq} \xi_m u_{ij} u_{kl} u_{pq} - \frac{1}{2} \gamma_{mn} \xi_m \xi_n - \frac{1}{6} \gamma_{mnp} \xi_m \xi_n \xi_p - \\ & - \frac{1}{24} \gamma_{mnpq} \xi_m \xi_n \xi_p \xi_q - \frac{1}{2} l_{mnij} \xi_m \xi_n u_{ij} - \\ & - \frac{1}{4} l_{mnijpq} \xi_m \xi_n u_{ij} u_{pq} - \frac{1}{6} f_{mnpq} \xi_m \xi_n \xi_p u_{ij} \end{aligned} \quad (2.15)$$

учитывая, что термодинамические напряжения $T_{ij}(u_{kn}, \xi_m)$ и индукция электрического поля $D_i(u_{ij}, \xi_n)$ для анизотропной диэлектрической среды определяются соотношениями

$$T_{ij} = \xi_{i,m} \xi_{j,n} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial u_{mn}}, \quad D_i = E_i - \xi_{i,m} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \xi_m} \quad (2.16)$$

для напряжений Лагранжа и лагранжевой электрической индукции находим

$$L_{ij} = c_{ijmnl} u_{m,n} + \left(\delta_{jm} c_{inlk} + \frac{1}{2} \delta_{km} c_{ijnl} + \frac{1}{2} c_{ijklmn} \right) u_{k,l} u_{m,n} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{2} \delta_{km} \delta_{pj} c_{ijkl} + \frac{1}{4} \delta_{pm} c_{ijklqn} + \frac{1}{4} \delta_{kp} c_{ijqlmn} + \frac{1}{2} \delta_{pj} c_{iqklmn} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{6} c_{ijklmnpq} \right) u_{k,i} u_{m,n} u_{p,q} + e_{mij} \Phi_{,m} - \frac{1}{2} \bar{l}_{mnij} \Phi_{,m} \Phi_{,n} + \quad (2.17) \\
& + (e_{mijkl} + \delta_{kj} e_{mli}) \Psi_{,n} u_{k,i} + \left(\frac{1}{2} e_{mijql} \delta_{kp} + \delta_{pj} e_{miqkl} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} e_{mijklpq} \right) \Phi_{,m} u_{k,i} u_{p,q} - \frac{1}{2} \bar{l}_{m,ijpq} \Phi_{,m} \Psi_{,n} u_{p,q} + \\
& + \frac{1}{6} f_{,nprij} \Phi_{,m} \Phi_{,n} \Phi_{,p}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{l}_{mnij} &= l_{mnij} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{ij} \delta_{mn}), \quad \bar{l}_{m,ijpq} = l_{m,ijpq} + \\
& + 2 \left[\delta_{pq} \left(\delta_{im} \delta_{nj} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{mn} \right) + \delta_{np} \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{mq} - \delta_{im} \delta_{jq} \right) + \delta_{ip} \left(\frac{1}{2} \delta_{mn} \delta_{jq} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \delta_{mq} \delta_{jn} \right) + \delta_{mp} \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{nq} - \delta_{iq} \delta_{nj} \right) \right], \quad \bar{g}_m = -\Phi_{,m} \\
\mathcal{F}_{,m} &= e_{mij} u_{i,j} - e_{mn} \Phi_{,n} + \frac{1}{2} (e_{mni} \delta_{ik} + e_{mijn}) u_{i,j} u_{k,n} + \\
& + \frac{1}{2} \gamma_{mnp} \Phi_{,q} \Phi_{,p} - \bar{l}_{mnij} \Phi_{,n} u_{i,j} + \left(\frac{1}{6} e_{mijknpq} + \right. \quad (2.18) \\
& \left. + \frac{1}{2} \delta_{kp} e_{mijqn} \right) u_{i,j} u_{k,n} u_{p,q} - \frac{1}{2} (\bar{l}_{mnp} \delta_{iq} + \bar{l}_{m,ijpq}) \Phi_{,n} u_{i,j} u_{p,q} + \\
& + \frac{1}{2} f_{,mprij} \Phi_{,n} \Phi_{,p} u_{i,j} - \frac{1}{6} \gamma_{mnpq} \Phi_{,n} \Phi_{,p} \Phi_{,q}
\end{aligned}$$

При получении материальных соотношений (2.17) и (2.18) использованы разложения

$$\begin{aligned}
J &= 1 + u_{p,p} + \frac{1}{2} (u_{m,m})^2 - \frac{1}{2} u_{p,q} u_{q,p} \\
\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} &\approx \delta_{jk} - \delta_{kn} u_{j,n} + \delta_{km} u_{j,n} u_{n,m} \quad (2.19)
\end{aligned}$$

сохраняя члены с квадратичной нелинейностью. В разложении термодинамической функции (2.15) мы ограничивались слагаемыми четвертого порядка по деформациям и электрическому полю. Это позволяет в материальных уравнениях для L_{ij} и \mathcal{F}_k сохранять нелинейные слагаемые до третьего порядка по $u_{i,k}$ и $\Phi_{,n}$. В разложениях тензоров c_{ijkl} , c_{ijklmn} , $c_{ijklmnpq}$ — упругие коэффициенты второго, третьего и четвертого рангов, соответственно, при постоянном электрическом поле. γ_{mn} , γ_{mnp} и γ_{mnpq} — коэффициенты тензоров диэлектрической восприимчивости второго, третьего и четвертого рангов, соответствен-

но, а ε_{mn} , γ_{mnp} и γ_{mnpq} — коэффициенты соответствующих тензоров диэлектрической проницаемости, e_{mij} и f_{mijkl} — линейные и нелинейные пьезокоэффициенты, l_{mnlj} — коэффициенты электрострикции, e_{mijlm} , $e_{mijknprq}$ и l_{mnpqij} — соответственно, электроупругие коэффициенты третьего порядка, нечетные и четные электроупругие постоянные четвертого порядка.

Если диэлектрическая среда обладает центром инверсии (изотропная среда), то кубическая нелинейность является нелинейностью наименьшего порядка для такой среды [9]. Для такой среды, в соотношениях (2.17) и (2.18) квадратичные нелинейности отсутствуют. В этом случае число возможных нелинейных процессов больше, чем в случае среды с квадратичной нелинейностью. Квадратичной нелинейностью обладают среды без центра инверсии (анизотропные среды). Диэлектрики, обладающие пьезоэлектрическим эффектом, являются существенно анизотропными материалами, не имеющие центра инверсии.

3. В граничных условиях (1.8), (2.3) и (2.4) фигурирует электромагнитоупругое поле, определяемое во внешней среде. В случае материальной внешней среды задача электромагнитоупругости решается в материальных переменных x_m , определяя замену переменных от $x_k^{(2)}$ к $x_n(k, n=1, 2, 3)$ аналогично закону движения (1.1). При этом условие контакта на границе раздела материальных сред $u_k^{(1)}(x_1, x_2, x_3, t) = u_k^{(2)}(x_1, x_2, x_3, t)$ обеспечивает отображение точек деформированной границы на недеформированную точно так же, как при отображении (1.1).

Известно, что для нематериальной (вакуумной) неограниченной среды между начальным и текущим состояниями отсутствует закон соответствия типа (1.1). Тогда задачу электромагнетизма в принципе можно сформулировать только в пространственных переменных Эйлера ξ_k . Но когда решается задача электромагнитоупругости ограниченной материальной среды, граничащей с вакуумной областью, необходимо учесть, что с деформированием электромагнитоупругой среды «деформируется» также вакуумная область. Следовательно, ввиду того, что внутренняя задача электромагнитоупругости сформулирована в материальных переменных x_m , тут также необходимо переходить к лагранжевым переменным. При этом проблема выбора закона отображения от пространственных переменных к материальным, разрешается следующим образом:

Деформированная поверхность электромагнитоупругой среды становится координатной поверхностью и в качестве «упругого перемещения» в каждой точке вакуумной области можем брать перемещение соответствующей точки границы электромагнитоупругой среды $u_j^{(2)}(x_1, x_2, x_3, t) = u_j^{(1)}(x_1, x_2, x_3, t) / S$. Закон «движения» для нематериальной среды запишется в следующем виде:

$$\xi_j^{(2)}(x_1, x_2, x_3, t) = u_j^{(1)}(x_1, x_2, x_3, t) + x_j, \quad j=1, 2, 3, \quad (3.1)$$

Из вышеприведенного следует, что для вакуумной области уравнения и граничные условия электромагнетизма сохраняют свой вид.

$$\varepsilon_{rmp} \mathcal{H}_{m,p}^{(e)} = 0, \quad \mathcal{B}_{\alpha,p}^{(e)} = 0, \quad \varepsilon_{rmp} \mathcal{E}_{m,p}^{(e)} = 0, \quad \mathcal{I}_{p,p}^{(e)} = 0 \quad (3.2)$$

где

$$\mathcal{H}_m^{(e)} = H_i^{(e)} \xi_{i,m}^{(e)}, \quad \mathcal{E}_m^{(e)} = E_i^{(e)} \xi_{i,m}^{(e)}, \quad \mathcal{B}_p^{(e)} = J^{(e)} \frac{\partial x_p}{\partial \xi_i^{(e)}} B_i^{(e)}, \quad \mathcal{I}_p^{(e)} = J^{(e)} \frac{\partial x_p}{\partial \xi_i^{(e)}} D_i^{(e)} \quad (3.3)$$

Градиент деформации $\xi_{i,k}^{(e)}$ в этих соотношениях определяется по закону отображения (3.1). В механических граничных условиях (1.8) термодинамические напряжения $T_{ij}^{(e)}$ заменяются напряжениями Максвелла $t_{ij}^{(e)}$ для вакуумной среды ($\sigma_{ij}^{(e)} = 0$).

Введя обобщенный электрический потенциал $\mathcal{E}_m^{(e)} = -\Phi_{,m}^{(e)}$, для индукции электрического поля получим

$$\mathcal{I}_p^{(e)} = -\varepsilon_0 J^{(e)} \frac{\partial x_p}{\partial \xi_i^{(e)}} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_i^{(e)}} \Phi_{,m}^{(e)} \quad (3.4)$$

с учетом зависимости $D_k^{(e)} = \varepsilon_0 E_k^{(e)}$. Пользуясь разложениями (2.19), для внешней вакуумной области получаем материальные соотношения лагранжевой индукции электрического поля

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_p^{(e)} = & -\varepsilon_0 [\Phi_{,p}^{(e)} - (u_{m,p}^{(e)} + u_{p,m}^{(e)}) \Phi_{,m}^{(e)} - (u_{m,l}^{(e)} u_{l,p}^{(e)} + u_{p,l}^{(e)} u_{l,m}^{(e)} - \\ & - u_{p,l}^{(e)} u_{m,l}^{(e)}) \Phi_{,m}^{(e)} + u_{n,n}^{(e)} \Phi_{,p}^{(e)} - (u_{m,p}^{(e)} + u_{p,m}^{(e)}) u_{n,n}^{(e)} \Phi_{,m}^{(e)} + \\ & + \frac{1}{2} (u_{i,i}^{(e)})^2 \Phi_{,p}^{(e)} - \frac{1}{2} u_{n,i}^{(e)} u_{i,n}^{(e)} \Phi_{,p}^{(e)}] \end{aligned} \quad (3.5)$$

С введением «обобщенных» электрических потенциалов Φ и $\Phi^{(e)}$ для внутренней и внешней задач электромагнетизма соответственно, необходимо граничные условия также записать через потенциалы. Условия сопряженности тангенциальной компоненты электрического поля преобразуются к виду

$$\Phi = \Phi^{(e)} \quad (3.6)$$

4. Необходимо обращать внимание на то, что нелинейность проникает в теорию электроупругости по трем путям: а) через тензор деформации Лагранжа $\{u_{ik}\}$, б) через уравнения движения электроупругой сплошной среды и уравнения электромагнетизма, в) через материальные соотношения термодинамических напряжений $T_{ij} = \sigma_{ij} + t_{ij}$ и электрической индукции D_k . При этом в первых двух из перечисленных совокупностей формул учет нелинейных членов обуславливается геометрическими соображениями. В третьей совокупности формул нелинейные члены появляются, если деформации и напряженность электрического поля превосходят по величине некоторые характерные для рассматриваемого материала физические константы (пределы пропорциональности). Поэтому при рассмотрении нелинейных задач принято говорить о нелинейностях двух типов—геометри-

математической и физической. Эти нелинейности связаны друг с другом и в иерархии нелинейностей геометрическая нелинейность занимает более высокую ступень. Но, исходя из физико-механических соображений, их иногда можно считать несвязанными друг с другом. Отсюда в нелинейной теории электромагнитоупругости кроме общего случая нелинейности могут рассматриваться нелинейные задачи двух типов:

— в физически нелинейной, геометрически линейной задаче следует пользоваться линейными уравнениями и граничными условиями электромагнитоупругости

$$T_{ik,k} = \rho_0 \ddot{u}_i, \quad D_{k,k} = 0, \quad \varepsilon_{ijk} E_{i,k} = 0 \quad (4.1)$$

$$N_j [T_{ij}] = 0, \quad N_j [D_j] = 0, \quad \varepsilon_{ijk} N_j [E_k] = 0 \quad (4.2)$$

с учетом нелинейных материальных соотношений для термоупругих напряжений T_{ij} и индукции электрического поля D_m :

$$\begin{aligned} T_{ij} = & c_{ijmnl} u_{m,n} + \frac{1}{2} c_{ijklmnl} u_{k,l} u_{m,n} + \frac{1}{6} c_{ijklmnopq} u_{k,l} u_{m,n} u_{p,q} + \\ & + e_{mij} \Phi_{,m} - l_{mnlj} \Phi_{,m} \Phi_{,n} + e_{mijkl} \Phi_{,m} u_{k,l} + \frac{1}{6} f_{mnpqj} \Phi_{,m} \Phi_{,n} \Phi_{,p} + \\ & + \frac{1}{2} e_{mijklpq} \Phi_{,m} u_{k,l} u_{p,q} - \frac{1}{2} l_{mnlj} \Phi_{,m} \Phi_{,n} u_{p,q} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} D_m = & e_{mij} u_{i,j} - \varepsilon_{mnl} \Phi_{,n} + \frac{1}{2} e_{mijkl} u_{i,j} u_{k,l} + \frac{1}{2} \gamma_{mkp} \Phi_{,n} \Phi_{,p} - \\ & - l_{mnlj} \Phi_{,n} u_{i,j} + \frac{1}{6} e_{mijklpq} u_{i,j} u_{k,l} u_{p,q} - \frac{1}{2} l_{mnlj} \Phi_{,n} u_{i,j} u_{p,q} + \\ & + \frac{1}{2} f_{mnpqj} \Phi_{,n} \Phi_{,p} u_{i,j} - \frac{1}{6} \gamma_{mnpq} \Phi_{,n} \Phi_{,p} \Phi_{,q} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь компоненты тензора деформации u_{ij} определяются формулами $u_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$, а потенциал электрического поля $-E_n = -\Phi_{,n}$:

— в физически линейной, геометрически нелинейной задаче электроупругости следует пользоваться линейными материальными соотношениями для термодинамических напряжений T_{ij} и индукции электрического поля D_i :

$$T_{ij} = c_{ijmnl} u_{m,n} + e_{mij} E_m, \quad D_k = e_{kij} u_{ij} + \varepsilon_{km} E_m \quad (4.5)$$

В этом случае уравнения и граничные условия электромагнитоупругости сохраняют вид

$$L_{ij,i} = \rho_0 \ddot{u}_i, \quad \mathcal{E}_{k,k} = 0, \quad \varepsilon_{ijk} \mathcal{E}_{i,k} = 0 \quad (4.6)$$

$$N_j [L_{ij}] = 0, \quad N_j [\mathcal{E}_j] = 0, \quad \varepsilon_{ijk} N_j [\mathcal{E}_k] = 0 \quad (4.7)$$

При этом выражения для лагранжеевых напряжений L_{ij} и электрических

кой индукции \mathcal{D}_m получаются из (2.17) и (2.18) соответственно, полагив в них

$$\begin{aligned} c_{ijklmn} &= 0, & c_{ijklmnpq} &= 0, & l_{mni j} &= 0, & e_{mijk i} &= 0 \\ e_{mijk lrpq} &= 0, & l_{mni jrpq} &= 0, & f_{mnp i j} &= 0, & \gamma_{map} &= 0, & \gamma_{mnpq} &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Вообще геометрическая и физическая нелинейности в теории электромагнитоупругости взаимосвязаны и при рассмотрении конкретных задач, пренебрежение одной из этих нелинейностей при сохранении другой, должно быть физически обосновано [10].

ABOUT MAIN EQUATIONS OF NONLINEAR ELECTROELASTICITY OF PIEZOELECTRIC DIELECTRIC

A. S. AVETISYAN

ՊԻԵԶՈԷԼԵԿՏՐԻԿ ԳԻԷԼԵԿՏՐՈՄԱԳՆԵՐԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐՈՍՏԱՏՈՒՄԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ս. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Ա մ ֆ ո ֆ ո լ մ

Ստացված են ոչ գծային այրքային հավասարումները և պիեզոէլեկտրիկ կիսատարածույթյան համար եզրային պայմանները՝ անիզոտրոպ միջավայրի երկրաչափական և ֆիզիկական ոչ գծայնությունների հաշվառումով: Հաշվի առնելով, որ էլեկտրատառածողական միջավայրի եզրի ձևափոխումով, ձևափոխվում է նաև ոչ նյութական (վակուում) կիսատարածությունը, ներմուծվել է արտաքին միջավայրի րնթացիկ վիճակը նախնական շձևափոխված վիճակին արտապատկերող ֆունկցիա: Ստացված են երկրաչափական կամ ֆիզիկական ոչ գծայնությունների դեպքում այրքային հավասարումները և եզրային պայմանները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурь А. Н., Махорт Ф. Г. Механика связанных полей в элементах конструкций: т. 3. Акустоэлектромагнитоупругость.—Киев: Наук. думка, 1988. 288 с.
2. Maugin G. A. Nonlinear electromechanical effects and applications. — Singapore: World Sci. Publ., 1985, 168 p.
3. Tourin R. A A dynamical theory of dielectrics. — Int. J. Eng. Sci., 1963, vol. 1, pp. 101—126.
4. Ландоу Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.—М.: Наука, 1982. 620 с.
5. Тамм И. Е. Основы теории электричества.—М.: Наука, 1966. 624 с.
6. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости.—М.: Гостехиздат, 1948. 212 с.
7. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970, 940 с.

8. Красильников В. А., Крылов В. В. Введение в физическую акустику.—М.: Наука, 1984. 400 с.
9. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн.—М.: Наука, 1979. 383 с.
10. Победря Б. Е. О взаимосвязи геометрической и физической нелинейности в теории упругости и о смысле вектора перемещений.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1987, т. 40, с. 15—26.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
18. V. 1989