ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 43, № 4, 1990 Механика

УДК 532.3

ПРОНИКАНИЕ ТОНКОГО КОНУСА В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩУЮ ЖИДКОСТЬ

АВАГЯН С. Г.

В работе [1] решается задача движения конуса в сжимаемой электропроводящей жидкости и указано, как следует решать задачу проникания. Основной результат состоит в получении формулы для давления в главном порядке $\lambda^2 \ln \lambda$, что ограничивает значимость результата. Данная работа содержит полное решение задачи проникания в электропроводящую несжимаемую жидкость. В работе [2] рассматриваются задачи обтекания клина сверхзвуковым потоком. В работе [3] рассматриваются течения идеального газа с бесконечной проводимостью в магнитном поле, параллельном скорости набегающего потока.

В настоящей работе рассматривается задача о проникании тонкого твердого конуса в электропроводящую несжимаемую жидкость, находящуюся в магнитном поле. Жидкость находится в начальном H_0 магнитном поле, которое направлено по оси тела x. Для общности, сначала рассматривается проникание тонкого осесимметричного идеально-проводящего тела в бесконечно электропроводящую несжимаемую жидкость. Уравнение магнитной гидродинамики в случае баротропной невесомой несжимаемой идеальной жидкости в векторной форме имеет вид [4]

$$\operatorname{div}\vec{V} = 0 \tag{1}$$

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\operatorname{grad}P + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\vec{H}\times\vec{H}_0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{V}\times\vec{H}_0), \quad \operatorname{div}\vec{H} = 0 \tag{3}$$

где $\vec{V}$—скорость частиц жидкости, ρ—плотность, P—давление, $\vec{H}$—напряженность магнитного поля, $\vec{H}_0$—начальное магнитное поле. Уравнение (1), (2), (3) можно записать в виде

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{H_0}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial H_r}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial r}\right) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_r}{r}=0,\quad \frac{\partial H_x}{\partial t}=-H_0\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_r}{r}\right),\quad \frac{\partial H_r}{\partial t}=H_0\frac{\partial V_r}{\partial x} \tag{5}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_r}{\partial r}+\frac{H_r}{r}=0$$

Граничные условия на теле и на поверхности жидкости имеют вид [5, 6]

$$r=r_k,\quad V_r=-f'(t)\frac{\partial r_k}{\partial x} \tag{6}$$

$$x=0,\quad P-\frac{H_0}{4\pi}h_x=-\frac{H_0}{4\pi}h_x',\quad H_x=H_0+h_x$$

где h_x' есть возмущенное поле вне жидкости. Первое условие соответствует условию равенства нормальной компоненты скорости жидкой частицы скорости тела по нормали, а второе—равенству нормальных компонент полного тензора напряжения. Кроме этого, на границе $x=0$ для идеально проводящей жидкости [6] имеется непрерывность нормальной компоненты напряженности поля, $h_x=h_x'$ и можно записать $x=0$, $P=0$. При этом (6) совпадают с граничными условиями в отсутствии поля.

Задачу можно было бы решать, следуя методу [1], вводя источники по оси тела и переходя к записи преобразования Лапласа от потенциала источника через интегралы от бесселевой функции, зависящей от r и экспоненты, зависящей от $x-x_1$, где x_1—координата источника. Однако, проще ввести в (4), (5) потенциалы скорости и поля

$$\vec{V}=\mathrm{grad}\,\varphi,\quad \vec{H}=\mathrm{grad}\,\psi \tag{7}$$

При этом уравнения удовлетворяются и получаются уравнения Лапласа

$$\nabla^2\varphi=0,\quad \nabla^2\psi=0,\quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{8}$$

и соотношения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{\rho}P=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial t}=H_0\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{9}$$

где на бесконечности положено, что все функции равны нулю. Уравнение (8) для φ вместе с (6) на теле и свободной поверхности совпадают с уравнениями и граничными условиями задачи проникания тонкого тела в жидкость в отсутствии поля, решение которой имеет вид [5]

$$P=-\rho\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\rho\frac{\partial\varphi_2}{\partial t},\quad \varphi_{1,2}=\frac{1}{2}\int_0^{f(t)}\frac{f'(t)r_k\dfrac{\partial r_k}{\partial x_1}}{\sqrt{(x\mp x_1)^2+r^2}}\,dx_1 \tag{10}$$

Таким образом, давление в жидкости при проникании в нее тонкого тела по направлению нормали к поверхности, совпадающей с начальным магнитным полем H_0, не зависит от поля. В силу свойств идеально проводящей жидкости, вполне приемлемо допущение, что токи концентрируются около границ жидкости, а именно: тела и свободной поверхности. Поэтому принято всюду, кроме указанных мест, $\mathrm{rot}\vec{H}=0$. Отличие полученного в статье решение от [5] состоит в учете поверхностных токов, так же, как и в плоской задаче [6]. По найденному магнитному полю в идеальной жидкости и используя уравнение Лапласа в диэлектрике, можно найти там компоненты h_x, H_r. Однако, поскольку $\mathrm{rot}\,\vec{H}=0$ в области отрицательных x, то сила Лоренца равна нулю. Поэтому, область $x<0$ не рассматривается. С другой стороны, поскольку жидкость идеально проводящая, на границе с телом должен быть токовой слой и скачок давления который, как и в случае обтекания клина [6], имеет вид

$$P_+-P_-=-\frac{1}{8\pi}(H^2_{x_+}-H^2_{x_-})\quad \text{или}\quad P_-=P_++\frac{H_0}{4\pi}(h_{x_+}-h_{x_-})$$

где знак „+" характеризует жидкость, а знак „−" — границу тела, внутри которого можно считать $h_{x_-}=0$, то есть магнитное поле не входит в тело, поскольку жидкость идеально проводящая [1, 6]. Тогда на теле

$$P_-=P+\frac{H_0}{4\pi}h_x \tag{11}$$

где P, h_x — давление и компонента магнитного поля около тела. Из (9) следует

$$\frac{\partial h_x}{\partial t}=H_0\frac{\partial V_x}{\partial x} \tag{12}$$

Из (4) следует $\frac{\partial V_x}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$, откуда получится с учетом (10)

$$V_x=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \tag{13}$$

Тогда

$$\frac{\partial h_x}{\partial t}=H_0\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}\right)$$

Исходя из обозначений $\varphi_{1,2}$ (10), после соответствующих выкладок, для конуса получим ($r_k=\gamma(f-x)$, где 2γ — угол раствора конуса)

$$\frac{\partial h_x}{\partial t}=H_0\frac{f'}{2}\gamma^2\left[\frac{1}{\sqrt{(x+f)^2+r^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-f)^2+r^2}}\right]$$

Отсюда

$$h_x=H_0\frac{\gamma^2}{2}\int_0^f\left[\frac{1}{\sqrt{(x+f)^2+r^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-f)^2+r^2}}\right]df=$$

$$= \frac{H_0\lambda^2}{2}\left[\ln r - 2\ln\left(x+\sqrt{x^2+r^2}\right) + \ln\left(2f+\sqrt{4f^2+r^2}\right)\right]$$

С учетом (11) для давления P (вместо P_-) на теле $r=r_k$ получим

$$P = -\rho\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \rho\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \frac{H_0^2\lambda^2}{8\pi}\left[\ln r - 2\ln\left(x+\sqrt{x^2+r^2}\right) + \ln\left(2f+\sqrt{4f^2+r^2}\right)\right] = \frac{\lambda^2\rho f''}{2}\Bigg[2x - 2(f-x)\ln\lambda + x\ln\frac{f^2-x^2}{4f^2} + f\ln\frac{f+x}{f-x} + f\ln\frac{\lambda^2f^2+4x^2}{f^2}\Bigg] + \frac{\lambda^2\rho f'^2}{2}\left(\ln\frac{\lambda^2f^2+4x^2}{\lambda^2f^2} + \ln\frac{f+x}{f-x} - 2\frac{x}{f} + \frac{2f^2}{\lambda^2f^2+4x^2}\right) + \frac{H_0^2\lambda^2}{8\pi}\left[\ln\lambda + \ln 4f(f-x) - 2\ln\left(x+\sqrt{x^2+\lambda^2(f-x)^2}\right)\right] \quad (14)$$

где f'' — ускорение проникания конуса.

Компоненты магнитного поля получатся в виде

$$H_x = \frac{H_0\lambda^2f^2}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-f)^2+r^2}}\right]$$

$$H_r = H_0\lambda^2f^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{(x-f)^2+r^2}}$$

Перейдем к определению силы сопротивления жидкости, которая через давления определяется по формуле

$$Q = -\int_0^{f(t)} 2\pi P r_k\frac{\partial r_k}{\partial x_1}\,dx$$

Для конуса, имея в виду (14), получим

$$Q = 2\pi\lambda^2\int_0^f (f-x)\Bigg\{\frac{1}{2}\lambda^2\rho f''\Bigg[2x - 2(f-x)\ln\lambda + x\ln\frac{f^2-x^2}{4f^2} + f\ln\frac{f+x}{f-x} + f\ln\frac{\lambda^2f^2+4x^2}{f^2}\Bigg] + \frac{1}{2}\lambda^2\rho f'^2\left(\ln\frac{\lambda^2f^2+4x^2}{\lambda^2f^2} + \ln\frac{f+x}{f-x} - 2\frac{x}{f} + \frac{2f^2}{\lambda^2f^2+4x^2}\right) + \frac{H_0^2\lambda^2}{8\pi}\left[\ln\lambda + \ln 4f(f-x) - 2\ln\left(x+\sqrt{x^2+\lambda^2(f-x)^2}\right)\right]\Bigg\}dx$$

После интегрирования будем иметь

$$Q = -\pi\rho\lambda^4\left[f^2f'^2\ln 2\lambda + f^3f''\left(\frac{2}{3}\ln 2\lambda + \frac{1}{3}\right)\right] +$$

$$+\frac{H_0^2\lambda^4 f^2}{8}\left(\ln\lambda+\frac{5}{2}\right)$$

Как и следует, магнитное поле уменьшает силу сопротивления. Для простоты рассмотрим проникание с постоянной скоростью $\dot{f}=V_0$. Тогда получим

$$Q=-\pi\rho\lambda^4 V_0^4 t^2 \ln 2\lambda+\frac{H_0^2\lambda^4 V_0^2 t^2}{8}\left(\ln\lambda+\frac{5}{2}\right)$$

Отсюда

$$\frac{Q}{\pi\rho\lambda^4 V_0^4 t^2}=\ln\frac{1}{2\lambda}+\varkappa\left(\ln\lambda+\frac{5}{2}\right) \tag{15}$$

где $\varkappa=H_0^2/8\pi\rho V_0^2$

Как следует из (15), сила сопротивления обращается в нуль при

$$\varkappa=\frac{\ln\dfrac{1}{2\lambda}}{\ln\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{5}{2}}, \quad \varkappa>0 \quad \text{для} \quad \lambda<e^{-\frac{5}{2}}.$$

Автор выражает глубокую благодарьость А. Г. Багдоеву за полезное обсуждение работы.

THE THIN CONE PENETRATION INTO ELECTROCONDUCTIVE LIQUID

S. G. AVAGIAN

ԲԱՐԱԿ ԿՈՆԻ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ

Ս. Գ. ԱՎԱԳՅԱՆ

Ամփոփում

Լուծված է էլեկտրահաղորդիչ հեղուկի մեջ բարակ պինդ կոնի թափանցման խնդիրը, մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում։

Ստացված են հեղուկի մեջ ու մարմնի վրա ընկած ճնշումը և հեղուկի դիմադրության ուժը։ Ցույց է տրված, որ հեղուկի մեջ մագնիսական դաշտը ճնշման վրա չի ազդում։ Սակայն մակերևութային հոսանքների առկայությունը փոխում է ճնշումը մարմնի երկայնությամբ։

Ստացված են հեղուկի մեջ մագնիսական դաշտի բաղադրիչների արժեքները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Авакян С. Г., Багдоев А. Г.* Проникание тонкого конуса в магнитогазодинамическую жидкость. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1984, т. 37, №4, с. 3—12.
2. *Куликовский А. Г.* и *Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1962.
3. *Коган М. Н.* Магнитодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью. ПММ, т. XXIII, №1, 1959, с. 70—80.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. I, М.: Наука, 1983, 528 с.
5. *Сагомонян А. Я.* Проникание. Изд-во МГУ, 1974, 299 с.
6. *Калихман Л. Е.* Элементы магнитной гидродинамики. М.: Атомиздат, 1964, 423 с.

Ленинаканский филиал Ереванского
политехнического института им.
К. Маркса

Поступила в редакцию
15.IV.1988