ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 4, 1990 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, НА ГРАНИЦЕ КОТОРОЙ ПРИКЛЕЕНА БЕСКОНЕЧНАЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНАЯ НАКЛАДКА

ГРИГОРЯН Э. Х.

В работе рассматривается задача для упругой полуплоскости, на границе которой приклеена кусочно-однородная бесконечная накладка, состоящая из двух полубесконечных кусков. Полуплоскость деформируется под действием сил, приложенных к накладке. Полагается, что слой клея находится в условиях чистого сдвига, а накладка—в одноосном напряженном состоянии. Задача с помощью преобразования Фурье сводится к решению функционального уравнения на действительной оси относительно трансформантов Фурье контактных касательных напряжений, соответствующих разным частям накладки. Строится замкнутое решение этого функционального уравнения, а потом определяются асимптотические формулы для контактных напряжений. Помимо этого, указывается и другой путь решения задачи, заключающийся в том, что задача сводится к решению фредгольмовских интегральных уравнений второго рода, которые можно решать методом последовательных приближений.

Отметим, что эта задача при отсутствии слоя клея была рассмотрена в [1].

Пусть упругая полуплоскость усилена на своей границе кусочно-однородной бесконечной накладкой, состоящей из двух полубесконечных кусков с модулями упругости E_1 $(x>0)$ и E_2 $(x<0)$. Считается, что накладка приклеена к полуплоскости и к ней приемлема гипотеза об одномерном континууме, то есть под действием горизонтальных сил она находится в одноосном напряженном состоянии [2]. Полуплоскость деформируется под действием сил, приложенных к накладке. Полагая, что слой клея находится в условиях чистого сдвига, будем иметь [3]

$$u^{(1)}(x)-u^{(2)}(x,0)=\frac{h}{G}\tau(x)\qquad(-\infty<x<\infty)\tag{1}$$

где $u^{(1)}(x)$—перемещения точек накладки, $u^{(2)}(x,0)$—перемещения граничных точек упругой полуплоскости, h—толщина слоя, G—модуль сдвига материала клея, $\tau(x)$—интенсивность касательных контактных напряжений.

С другой стороны, в силу вышеуказанного, уравнения равновесия кусочно-однородной накладки запишутся в виде

$$\frac{dU}{dx}=\frac{\tau^+(x)}{E_1H}+\frac{\tau^-(x)}{E_2H}-\frac{Q}{E_2H}\delta(x+a)-\frac{P}{E_1H}\delta(x-b)-u_0'\delta(x) \qquad (2)$$

где

$$\tau^+(x)=\Theta(x)\tau(x),\quad \tau^-(x)=\Theta(-x)\tau(x)$$

$$U(x)=\Theta(x)\frac{du^{(1)}}{dx}+\Theta(-x)\frac{du^{(1)}}{dx},\quad u_0'=\left.\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=-0}-\left.\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=+0}$$

H—толщина накладки, $\Theta(x)$—функция Хевисайда, $\delta(x)$ —функция Дирака; P, Q—интенсивности сосредоточенных сил, приложенных к накладке.

Далее для $du^{(2)}/dx$ имеем

$$\frac{du_2}{dx}(x,0)=\frac{1}{\pi A}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau(s)ds}{s-x},\quad A=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\quad(-\infty<x<\infty) \qquad (3)$$

где E—модуль упругости материала полуплоскости, а ν—коэффициент Пуассона.

Теперь, применив к (1), (2) и (3) обобщенное преобразование Фурье и сопоставляя полученные выражения для определения $\bar\tau^+(\sigma)$ и $\bar\tau^-(\sigma)$, получим следующее функциональное уравнение:

$$(\sigma^2+2\beta|\sigma|+\lambda_1^2)\bar\tau^+(\sigma)+(\sigma^2+2\beta|\sigma|+\lambda_2^2)\bar\tau^-(\sigma)=\bar f_1(\sigma) \qquad (4)$$

$$(-\infty<\sigma<\infty)$$

где

$$\bar\tau^+(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau^+(x)\exp(i\sigma x)dx,\quad \bar\tau^-(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau^-(x)\exp(i\sigma x)dx$$

$$\bar f_1(\sigma)=\frac{G}{h}u_0'+\frac{GP}{E_1Hh}\exp(i\sigma b)+\frac{GQ}{E_2Hh}\exp(-i\sigma a),\quad(-\infty<\sigma<\infty)$$

$$\beta=\frac{G}{2Ah},\quad \lambda_1^2=\frac{G}{E_1hH},\quad \lambda_2^2=\frac{G}{E_2Hh}$$

Функциональное уравнение преобразуем к следующему виду:

$$\bar\Pi(\sigma)\bar\tau^+(\sigma)+\bar\tau^-(\sigma)=\bar f(\sigma)\quad(-\infty<\sigma<\infty) \qquad (5)$$

Здесь

$$\bar\Pi(\sigma)=\frac{\sigma^2+2\beta|\sigma|+\lambda_1^2}{\sigma^2+2\beta|\sigma|+\lambda_2^2}=\frac{(|\sigma|+a_1)(|\sigma|+a_2)}{(|\sigma|+a_3)(|\sigma|+a_4)}$$

$$\bar f(\sigma)=\frac{\bar f_1(\sigma)}{\sigma^2+2\beta|\sigma|+\lambda_2^2}=\frac{\bar f_1(\sigma)}{(|\sigma|+a_3)(|\sigma|+a_4)}$$

$$a_1=\frac{\lambda_1^2}{\beta+\sqrt{\beta^2-\lambda_1^2}},\quad a_2=\frac{\lambda_1^2}{\beta-\sqrt{\beta^2-\lambda_1^2}},\quad a_3=\frac{\lambda_2^2}{\beta+\sqrt{\beta^2-\lambda_2^2}},\quad a_4=\frac{\lambda_2^2}{\beta-\sqrt{\beta^2-\lambda_2^2}}$$

Функциональное уравнение (5) можно решать, рассматривая его как краевую задачу Римана в теории аналитических функций, так как $\overline{\tau}^{+}(\sigma)$ и $\overline{\tau}^{-}(\sigma)$ представляют собой граничные значения аналитических функций $\overline{\tau}^{+}(\alpha)$, $\overline{\tau}^{-}(\alpha)$ $(\alpha=\sigma+it)$, регулярных соответственно при $t>0$ и $t<0$.

Здесь же это уравнение решается следующим образом [1], [4]. Функцию $\overline{\Pi}(\sigma)$ представим в виде

$$\overline{\Pi}(\sigma)=\frac{1+\overline{K}^{+}(\sigma)}{1+\overline{K}^{-}(\sigma)} \tag{6}$$

Ввиду того, что $\overline{\Pi}(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$, получим

$$\overline{K}^{+}(\sigma)=\exp\overline{R}^{+}(\sigma)-1,\quad \overline{K}^{-}(\sigma)=\exp(-\overline{R}^{-}(\sigma))-1$$

$$\ln\frac{(|\sigma|+a_1)(|\sigma|+a_2)}{(|\sigma|+a_3)(|\sigma|+a_4)}=\overline{R}^{+}(\sigma)+\overline{R}^{-}(\sigma),\quad R(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\overline{\Pi}(\sigma)\exp(-i\sigma x)d\sigma$$

Очевидно, что $\overline{K}^{\pm}(\sigma)\to 0$ при $|\sigma|\to\infty$.

Далее, имея в виду (6) известным способом, получим

$$\overline{L}_1^{+}(\sigma)=(1+\overline{K}^{+}(\sigma))\overline{\tau}^{+}(\sigma)-\overline{\varphi}^{+}(\sigma)=\overline{\varphi}^{-}(\sigma)-(1+\overline{K}^{-}(\sigma))\overline{\tau}^{-}(\sigma)=\overline{L}_2^{-}(\sigma) \tag{7}$$

где

$$\overline{\varphi}^{+}(\sigma)=\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(x)\exp(i\sigma x)dx,\ \overline{\varphi}^{-}(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(x)\exp(i\sigma x)dx$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+\overline{K}^{-}(\sigma))\overline{f}(\sigma)\exp(-i\sigma x)d\sigma$$

Из (7) следует, что

$$L_1^{+}(x)=L_2^{-}(x)\quad(-\infty<x<\infty)$$

Но это равенство может иметь место только при [5]

$$L_1^{+}(x)=L_2^{-}(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\delta^{(k)}(x)$$

Следовательно, из (7) получим

$$\overline{L}_1^{+}(\sigma)=\overline{L}_2^{-}(\sigma)=\sum_{k=0}^{n}(-i\sigma)^k a_k$$

Но так как $\overline{L}_1^{+}(\sigma)\to 0$, $\overline{L}_2^{-}(\sigma)\to 0$, при $|\sigma|\to\infty$, то

$$\overline{L}_1^{+}(\sigma)=\overline{L}_2^{-}(\sigma)\equiv 0\quad(-\infty<\sigma<\infty) \tag{8}$$

Тогда из (8) будем иметь

$$\overline{\tau}^{\pm}(\sigma)=\frac{\overline{\varphi}^{\pm}(\sigma)}{1+\overline{K}^{\pm}(\sigma)} \tag{9}$$

Выше имелось в виду, что если $\overline{A}^+(\sigma)\overline{B}^+(\sigma)=\overline{C}_1(\sigma)$, $\overline{A}^-(\sigma)\overline{B}^-(\sigma)=\overline{C}_2(\sigma)$, то $\overline{C}_1(\sigma)=\overline{C}_1^+(\sigma)$, $\overline{C}_2(\sigma)=\overline{C}_2^-(\sigma)$.

Таким образом, интенсивности тангенциальных контактных напряжений $\tau^{\pm}(x)$ определились в замкнутом виде. Теперь приступим к определению асимптотических формул для $\tau^{\pm}(x)$ при $|x|\to\infty$. Для этого, следуя Лайтхиллу [6], рассмотрим разложения $\overline{\tau}^{\pm}(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$. Сначала исследуем следующий интеграл:

$$\overline{L}^{\pm}(\sigma)=\int\limits_0^{\infty}L(u)\exp(\pm i\sigma u)du,\quad L(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1+\frac{d}{|\sigma|}\right)\exp(-i\sigma u)d\sigma$$

где постоянная d может быть и комплексной. Не останавливаясь на подробностях, отметим, что $d\overline{L}^{\pm}(\sigma)/d\sigma$ можно привести к виду

$$\frac{d\overline{L}^{\pm}(\sigma)}{d\sigma}=\mp\frac{i}{\pi d}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\frac{dt}{t\mp i\dfrac{\sigma+i0}{d}}-\frac{1}{2(\sigma\pm i0)}$$

где

$$\lim_{t\to+0}(\sigma\pm it)^{-1}=(\sigma\pm i0)^{-1}=\frac{1}{\sigma}\mp i\pi\delta(\sigma),\quad \lim_{t\to+0}(\sigma\pm it)=\sigma\pm i0=\sigma$$

Тогда, поскольку [7]

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\frac{dt}{t\mp i\dfrac{\sigma+i0}{d}}=\frac{\pm i\dfrac{\pi}{2}\mp i\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\sigma\pm i0}{d}-\ln\dfrac{\sigma\pm i0}{d}}{1-\left(\dfrac{\sigma\pm i0}{d}\right)^2}$$

где $\lim\limits_{t\to+0}\ln(\sigma\pm it)=\ln(\sigma\pm i0)=\ln|\sigma|\pm i\pi\Theta(-\sigma)$

то для $d\overline{L}^{\pm}(\sigma)/d\sigma$ получим следующее выражение:

$$\frac{d\overline{L}^{\pm}(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{1}{2d}\,\frac{\dfrac{\sigma\pm i0}{d}-1\mp\dfrac{2i}{\pi}\ln\dfrac{\sigma\pm i0}{d}}{1-\left(\dfrac{\sigma\pm i0}{d}\right)^2}-\frac{(\sigma\pm i0)^{-1}}{2} \tag{10}$$

Далее, поскольку

$$\left(\frac{1}{|\sigma|+d}\right)^{\pm}=\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-isx)ds}{|s|+d}\exp(\pm isx)dx$$

можно привести к виду

$$\left(\frac{1}{|\sigma|+d}\right)^{\pm}=\frac{1}{\pi d}\int\limits_0^{\infty}\frac{t}{1+t^2}\,\frac{dt}{t\pm i\dfrac{\sigma\pm i0}{d}}$$

то

$$\left(\frac{1}{|\sigma|+d}\right)^{\pm}=\frac{1}{2d}\pm\frac{i(\sigma\pm i0)}{\pi d^2}\,\frac{\pm\dfrac{i\pi}{2}\mp\dfrac{i\pi}{2}\dfrac{\sigma\pm i0}{d}-\ln\dfrac{\sigma\pm i0}{d}}{1-\left(\dfrac{\sigma\pm i0}{d}\right)^2} \tag{11}$$

Имея в виду (10), получим

$$\frac{d\overline{R}^{\pm}(\sigma)}{d\sigma}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}(-1)^k\,\frac{\dfrac{\sigma\pm i0}{a_k}-1\pm\dfrac{2i}{\pi}\ln\dfrac{\sigma\pm i0}{a_k}}{1-\left(\dfrac{\sigma\pm i0}{a_k}\right)^2} \tag{12}$$

Тогда из (12) получим

$$\overline{R}^{\pm}(\sigma)=\ln\sqrt{\frac{(|\sigma|+a_1)(|\sigma|+a_2)}{(|\sigma|+a_3)(|\sigma|+a_4)}}\mp\frac{i}{\pi}\int_0^{\sigma}\sum_{k=1}^{4}(-1)^k\,\frac{\ln\dfrac{|\sigma|}{a_k}\,d\sigma}{a_k\left(1-\left(\dfrac{\sigma}{a_k}\right)^2\right)}$$

которые справедливы и при комплексных a_k. Следовательно,

$$\exp(-\overline{R}^{\pm}(\sigma))=\sqrt{\frac{(|\sigma|+a_4)(|\sigma|+a_3)}{(|\sigma|+a_1)(|\sigma|+a_2)}}\exp\left\{\pm\frac{i}{\pi}\int_0^{\sigma}\sum_{k=1}^{4}(-1)^k\,\frac{\ln\dfrac{|\sigma|}{a_k}\,d\sigma}{a_k\left(1-\left(\dfrac{\sigma}{a_k}\right)^2\right)}\right\}$$

В случае вещественных a_k будем иметь

$$\exp(-\overline{R}^{\pm}(\sigma))=\sqrt{\frac{(|\sigma|+a_3)(|\sigma|+a_4)}{(|\sigma|+a_1)(|\sigma|+a_2)}}\exp\left\{\pm\frac{i}{\pi}\left[\int_{\frac{\sigma}{a_1}}^{\frac{\sigma}{a_2}}+\int_{\frac{\sigma}{a_3}}^{\frac{\sigma}{a_4}}\right]\frac{\ln|s|}{1-s^2}\,ds\right\}$$

Отметим, что разложения $\overline{R}^{\pm}(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$ легко получить, если использовать (12). Имея в виду вышесказанное, при $|\sigma|\to 0$ получим

$$\exp(-\overline{R}^{+}(\sigma))=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}+\frac{2\lambda_2\beta}{\lambda_1}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\frac{i\sigma}{\pi}\left(-\frac{i\pi}{2}+\ln(\sigma+i0)\right)+$$

$$+\frac{2\lambda_2\beta}{\lambda_1\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\sigma^2\left(-\frac{i\pi}{2}+\right.$$

$$\left.+\ln(\sigma+i0)\right)-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{\beta^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)^2\sigma^2\left(-\frac{i\pi}{2}+\ln(\sigma+i0)\right)^2-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\ln a_4}{a_4}-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\frac{i\sigma}{\pi}+\mathrm{const}\,\sigma^2+0(\sigma^3\ln(\sigma+i0))$$

$$\exp(-\overline{R}^{-}(\sigma))=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}\beta\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\frac{i\sigma}{\pi}\left(\frac{i\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)+$$

$$+\frac{2\lambda_2\beta}{\lambda_1\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\sigma^2\left(\frac{i\pi}{2}+\right.$$

$$\left.+\ln(\sigma-i0)\right)-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\beta^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)^2\sigma^2\left(\frac{i\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)^2+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\frac{i\sigma}{\pi}+\mathrm{const}\cdot\sigma^2+O(\sigma^3\ln(\sigma-i0)) \qquad (13)$$

$$\exp\bar{R}^-(\sigma)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\frac{2\lambda_1\beta}{\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\frac{i\sigma}{\pi}\left(i\frac{\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)+$$

$$+\frac{2\lambda_1\beta}{\lambda_2\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\times$$

$$\times\sigma^2\left(\frac{i\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)-\frac{2\lambda_1\beta^2}{\lambda_2\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)^2\sigma^2\left(i\frac{\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)^2-$$

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\frac{i\sigma}{\pi}+$$

$$+\mathrm{const}\cdot\sigma^2+O(\sigma^3\ln(\sigma-i0))$$

Теперь приступим к определению разложений функций $\bar{\varphi}^+(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$. Для этого представим $\bar{\varphi}^+(\sigma)$ в виде

$$\bar{\varphi}^+(\sigma)=\int_0^\infty\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\exp(-\bar{R}^-(s))-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]\bar{f}(s)\exp(-isx)ds\exp(i\sigma x)dx+$$

$$+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\int_0^\infty\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(s)\exp(-isx)ds\exp(i\sigma x)dx$$

Тогда, имея в виду (11) и (13), получим

$$\bar{\varphi}^+(\sigma)=\bar{\varphi}^+(0)+\frac{i\sigma}{2\lambda_1\lambda_2}\left[\Gamma+\frac{B}{\pi}\left(\frac{2\beta}{\lambda_1^2}\psi(1)-\frac{2\beta}{\lambda_2^2}\psi(1)+\frac{\ln a_4}{a_4}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}+\frac{\lambda_2^2}{\sqrt{\beta^2-\lambda_2^2}}\left(\frac{\ln a_3}{a_3^2}-\frac{\ln a_4}{a_4^2}\right)\right]+ \qquad (14)$$

$$+\frac{2\beta B}{\lambda_1\lambda_2^3}\frac{i\sigma}{\pi}\left(i\frac{\pi}{2}+\psi(2)-\ln(\sigma+i0)\right)+O(\sigma^2\ln(\sigma+i0))$$

Поступая аналогичным образом для $\bar{\varphi}^-(\sigma)$, будем иметь

$$\bar{\varphi}^-(\sigma)=\bar{\varphi}^-(0)+\frac{i\sigma}{2\lambda_1\lambda_2}\left[\Gamma+\frac{B}{\pi}\left(\frac{2\beta}{\lambda_1^2}\psi(1)-\frac{2\beta}{\lambda_2^2}\psi(1)+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\right.\right.$$

$$-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}-\frac{\lambda_2^2}{\sqrt{\beta^2-\lambda_2^2}}\left(\frac{\ln a_3}{a_3^2}-\frac{\ln a_4}{a_4^2}\right)\Bigg)\Bigg|+\frac{2\beta B}{\lambda_2\lambda_1^3}\frac{i\sigma}{\pi}\Bigg(i\frac{\pi}{2}- \tag{15}$$

$$-\psi(2)+\ln(\sigma-i0)\Bigg)+0(\sigma^2\ln(\sigma-i0))$$

Здесь $\psi(z)$ — известная функция Пси,

$$\Gamma=\lambda_1^2bP-\lambda_2^2aQ,\quad B=\frac{G}{h}u_0^1+\lambda_1^2P+\lambda_2^2Q$$

$$\bar\varphi^+(0)=\frac{P+Q-\dfrac{B}{\lambda_2^2}}{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}},\quad \bar\varphi^-(0)=\frac{P+Q-\dfrac{B}{\lambda_1^2}}{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Использовав (14), (15) и (13), для $\bar\varphi(\sigma)$ получим

$$\bar\varphi(\sigma)=\bar\varphi^+(\sigma)+\bar\varphi^-(\sigma)-\frac{2B\beta^2}{\lambda_1\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)^2\frac{\sigma^2}{\pi^2}\left(i\frac{\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)^2+$$

$$+\frac{2\beta}{\pi\lambda_1\lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\left(\Gamma+\frac{B}{\pi}\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\right)\times \tag{16}$$

$$\times\sigma^2\left(i\frac{\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)-\frac{2\beta}{\lambda_1\lambda_2^3}\left(\Gamma+\frac{B}{\pi}\left(\frac{2\beta}{\lambda_2^2}-\frac{2\beta}{\lambda_1^2}+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\right)i\sigma|\sigma|+\frac{4B\beta^2}{\pi\lambda_1\lambda_2^3}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)i\sigma|\sigma|\left(i\frac{\pi}{2}+\ln(\sigma-i0)\right)+$$

$$+\mathrm{const}\,\sigma^2+0(\sigma^3\ln|\sigma|)\quad \text{при } |\sigma|\to 0$$

Подставляя разложения (13) — (16) в (9) и проводя обратное преобразование Фурье, получим следующие асимптотические формулы:

$$\tau^+(x)=\frac{2\beta}{\pi}\bar\tau(0)(\lambda_1x_+)^{-2}+\frac{4\lambda_1\beta}{\pi^2}\Bigg\{\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}\right)\Bigg(\Gamma+$$

$$+\frac{B}{\pi}\left(\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\right)\Bigg)+\frac{\pi}{\lambda_2^2}\left(\Gamma+\frac{2B\beta}{\pi}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\right)+$$

$$+\frac{B}{2}\left(1-\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\Bigg|\frac{1}{\sqrt{\beta^2-\lambda_2^2}}\left(\frac{\ln a_3}{a_3^2}-\frac{\ln a_4}{a_4^2}\right)-\frac{2\beta}{\lambda_2^2}\Bigg(\frac{\psi(1)}{\lambda_1^2}+$$

$$+\frac{3+\psi(1)+4\ln\lambda_1}{\lambda_2^2}\Bigg)\Bigg|-\bar\tau(0)\Bigg|2\beta(\psi(1)-\ln\lambda_1)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}-\frac{1}{\lambda_2^2}\right)+\frac{\ln a_4}{a_4}+$$

$$+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\Bigg|\Bigg\}(\lambda_1x_+)^{-2}+\frac{8\lambda_1\beta^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)\Bigg[\bar\tau(0)+$$

$$+\frac{B}{\lambda_2^2}\Bigg](\lambda_1x_+)^{-2}\ln(\lambda_1x)_++0(x_+^{-4}\ln^2x_+)\quad \text{при } |x|\to\infty$$

$$\tau^{-}(x)=\frac{2\beta\lambda_1^2}{\pi\,\lambda_2^2}\,\bar{\tau}(0)(\lambda_1 x_-)^{-2}-\frac{4\beta\lambda_1^3}{\pi^2\lambda_2^2}\Big\{\frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}\Big)\Big(\Gamma+$$

$$+\frac{B}{\pi}\Big(\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\Big)\Big)+\frac{\pi}{\lambda_1^2}\Big(\Gamma+\frac{2\beta B}{\pi}\Big(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\Big)\Big)+$$

$$+\frac{B}{2}\Big(1-\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\Big)\Big[\frac{1}{\sqrt{\beta^2-\lambda_2^2}}\Big(\frac{\ln a_3}{a_3^2}-\frac{\ln a_4}{a_4^2}\Big)-\frac{2\beta}{\lambda_2^2}\Big(\frac{\psi(1)+2}{\lambda_1^2}+$$

$$+\frac{\psi(2)+4\ln\lambda_1}{\lambda_2^2}\Big)\Big]-\bar{\tau}(0)\Big[2\beta(\psi(1)-\ln\lambda_1)\Big(\frac{1}{\lambda_1^2}-\frac{1}{\lambda_2^2}\Big)+$$

$$+\frac{\ln a_4}{a_4}+\frac{\ln a_3}{a_3}-\frac{\ln a_2}{a_2}-\frac{\ln a_1}{a_1}\Big]\Big\}(\lambda_1 x_-)^{-3}-$$

$$-\frac{8\beta^2\lambda_1^3}{\pi^2\lambda_2^2}\Big(\frac{1}{\lambda_2^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}\Big)\Big[\bar{\tau}(0)+\frac{B}{\lambda_1^2}\Big](\lambda_1 x_-)^{-3}\ln(\lambda_1 x)_-+$$

$$+O(x_-^{-4}\ln^2 x_-)\quad \text{при}\quad |x|\to\infty$$

где

$$x_+=\Theta(x)x,\quad x_-=\Theta(-x)|x|$$

Значение функции $\tau(x)$ в точке $x=0$ конечно и равно

$$\tau(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(1+\bar{K}^{-}(\sigma))\,\bar{f}(\sigma)\,d\sigma$$

Отметим, что при отсутствии слоя клея $\tau(x)$ в точке $x=0$ имеет логарифмическую особенность [1].

Теперь рассмотрим тот частный случай задачи, когда модуль упругости основания принимается бесконечным. В этом случае имеем

$$\bar{\tau}^{+}(\sigma)=\frac{iu_0^1 G}{h(\lambda_1+\lambda_2)(\sigma+i\lambda_1)}+\frac{iGQ\exp(-\lambda_2 a)}{E_2 hH(\lambda_1+\lambda_2)(\sigma+i\lambda_1)}-$$

$$-\frac{iGP}{E_1 hH(\lambda_1+\lambda_2)}\Big[\frac{(\sigma+i\lambda_2)(\exp(i\sigma b)-\exp(-\lambda_1 b))}{\lambda_1^2+\sigma^2}-\frac{\exp(i\sigma b)}{\sigma+i\lambda_1}\Big]$$

$$\bar{\tau}^{-}(\sigma)=-\frac{iu_0^1 G}{h(\lambda_1+\lambda_2)(\sigma-i\lambda_2)}-\frac{iGP\exp(-\lambda_1 b)}{E_1 hH(\lambda_1+\lambda_2)(\sigma-i\lambda_2)}-$$

$$-\frac{iGQ}{E_2 hH(\lambda_1+\lambda_2)}\Big[\frac{\exp(-i\sigma a)}{\sigma-i\lambda_2}-\frac{(\sigma-i\lambda_1)(\exp(-i\sigma a)-\exp(-\lambda_2 a))}{\lambda_2^2+\sigma^2}\Big]$$

Отсюда после применения обратного преобразования Фурье, получим

$$\tau^{+}(x)=\frac{G}{h(\lambda_1+\lambda_2)}\Big\{\Big[\Big(u_0^1+\frac{Q\exp(-\lambda_2 a)}{E_2 H}\Big)\Theta(x)+\frac{P}{2E_1 H}\Big(\Big(1+$$

$$+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big)\exp(\lambda_1 b)\Theta(x-b)+\Big(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big)\exp(-\lambda_1 b)\Theta(x)\Big)\Big]\exp(-\lambda_1 x)+$$

$$+\frac{P}{2E_1H}\Big(1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big)\exp(-\lambda_1 b)(\Theta(b-x)-\Theta(-x))\exp(\lambda_1 x)\Big\}$$

$$\tau^-(x)=\frac{G}{h(\lambda_1+\lambda_2)}\Big\{\Big[\Big(u_0^1+\frac{P\exp(-\lambda_1 b)}{E_1H}\Big)\Theta(-x)+\frac{Q}{2E_2H}\Big(\Big(1+$$

$$+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)\exp(\lambda_2 a)\Theta(-x-a)+\Big(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)\exp(-\lambda_2 a)\Theta(-x)\Big)\Big]\exp(\lambda_2 x)+$$

$$+\frac{Q}{2E_2H}\Big(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)\exp(-\lambda_2 a)(\Theta(x+a)-\Theta(x))\exp(-\lambda_2 x)\Big\}$$

Постоянная u_0^1 определяется из условия равновесия накладки

$$\tau(0)=P+Q$$

и в данном частном случае имеет вид

$$u_0^1=\frac{(P+Q)\lambda_1\lambda_2 h}{G}+\frac{P}{E_1H}\Big(\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\Big)\exp(-\lambda_1 b)-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big)+$$

$$+\frac{Q}{E_2H}\Big(\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\Big)\exp(-\lambda_2 a)-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)$$

Следует отметить, что исследуемую задачу можно свести к решению фредгольмовских интегральных уравнений второго рода, допускающих решение методом последовательных приближений. Так как выражение (9) содержит функции сложной структуры, этот метод дает возможность определить численные значения $\tau^+(x)$ сравнительно просто.

Действительно, применив к (5) обратное преобразование Фурье, получим

$$\tau(x)+(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\int_0^\infty K_{\lambda_2}(x-s)\tau(s)ds=f_{\lambda_2}(x)\quad(-\infty<x<\infty) \tag{17}$$

где

$$K_{\lambda_2}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\sigma x)d\sigma}{\sigma^2+2\beta|\sigma|+\lambda_2^2},\quad f_{\lambda_2}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{f}_1(\sigma)\exp(-i\sigma x)d\sigma}{\sigma^2+2\beta|\sigma|+\lambda_2^2}$$

Теперь потребовав, чтобы x изменялся в интервале $0<x<\infty$, получим искомое интегральное уравнение

$$\tau(x)+(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\int_0^\infty K_{\lambda_2}(x-s)\tau(s)ds=f_{\lambda_2}(x)\quad(0<x<\infty) \tag{18}$$

После определения $\tau(x)$ из (18) значения $\tau(x)$ при $-\infty < x < 0$ определятся из (17).

Нетрудно видеть, что достаточное условие разрешимости интегрального уравнения (18) в пространстве суммируемых функций будет следующим:

$$|\lambda_1^2-\lambda_2^2|\int_0^\infty K_{\lambda_2}(x-s)dx<1 \tag{19}$$

поскольку

$$0<K_{\lambda_2}(x)=\frac{1}{2\pi(a_4-a_3)}\int_0^\infty\frac{t}{1+t^2}(\exp(-a_3xt)-\exp(-a_4xt))dt$$

Тогда нетрудно увидеть, что

$$\sup_{0<s<\infty}\int_0^\infty K_{\lambda_2}(x-s)dx=\frac{1}{\lambda_2^2}$$

Из (19) получим условие разрешимости (18) в виде

$$0<\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}<2$$

Таким образом, в этом случае уравнение (18) можно решить методом последовательных приближений.

Далее из (4) можно получить интегральное уравнение

$$\tau(x)+(\lambda_2^2-\lambda_1^2)\int_{-\infty}^0 K_{\lambda_1}(x-s)\tau(s)ds=f_{\lambda_1}(x)\quad(-\infty<x<0)$$

которое допускает решение с помощью метода последовательных приближений при $0<\lambda_2^2/\lambda_1^2<2$. Из условий $0<\lambda_1^2/\lambda_2^2<2$ и $0<\lambda_2^2/\lambda_1^2<2$ следует, что мы фактически определяем $\tau(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ при любых значениях $0<\lambda_1, \lambda_2<\infty$. Здесь значение $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$ не входят, поскольку при этих значениях имеем

$$\lambda_1^2\int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda_1}(t)dt=\lambda_2^2\int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda_2}(t)dt=1$$

CONTACT PROBLEM FOR ELASTIC SEMI-PLANE AT BOUNDARY OF WHICH THE INFINITE STEP-HOMOGENEOUS STRINGER IS GLUED

E. KH. GRIGORIAN

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵԶՐԻՆ ԱՄՐԱՑՎԱԾ (ՍՈՍՆՁՎԱԾ) ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ՎԵՐԱԴԻՐՈՎ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է առաձգական կիսահարթության համար խնդիր, որը իր եզրով ուժեղացված է երկու կիսաանվերջ կտորներից բաղկացած կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ վերադիրով: Կիսահարթությունը դեֆորմացվում է վերադիրին կիրառված ուժի ազդեցության տակ։

Ենթադրվում է, որ սոսնձի շերտը գտնվում է մաքուր սահքի վիճակում, իսկ վերադիրը միառանցք լարվածային վիճակում է։ Խնդիրը Ֆուրյեի ձևափոխությունների օգնությամբ բերվում է կոնտակտային շոշափող լարումների տրանսֆորմանտների նկատմամբ։ Իրական առանցքի վրա ֆունկցիոնալ անհավասարման լուծմանը։ Այդ ֆունկցիոնալ հավասարման համար կառուցված է փակ լուծում, այնուհետև կոնտակտային լարումների համար ստացված է ասիմպտոտիկ բանաձևեր։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорян Э. Х.* Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости.—Уч. записки ЕГУ, 1979, №3.
2. *Melan E.* Ein Beitrag Theorie geschweisster Verbindungen Ingenieur Archiv. Band III, s. 123, 1932.
3. *Benthem J. P.* On the diffusion of a load from a semi-infinite stringer bonded to a sheet. Contr. Th. Atrer. Struct., 1972. p. 117—131.
4. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве.—М.: Наука, 1971.
5. Функциональный анализ. Ср.: Справочная математическая библиотека. М., 1972.
6. *Lightill M. J.* An introduction to Fourieranalysis and generalised functions.—Camb Univ. Press, 1959.
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды.—М.: Наука, 1981.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию
19.IX.1989