

УДК 539.3; 62.50

О КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

ГУКАСЯН А. А., САРКИСЯН С. В.

Исследование динамики механических систем, содержащих упругий элемент в виде стержней, пластин, оболочек и т. д., является актуальной задачей, поскольку колебание упругих элементов во время движения существенно влияет на динамику всей системы. Стремясь повысить эффективность функционирования таких систем, необходимо в системе управления учитывать те дополнительные условия, которые обусловлены упругими элементами [1—8 и др.]

В работе исследуется вращательное движение упругой изотропной прямоугольной пластины в вертикальной плоскости, одна сторона которой жестко закреплена, а остальные свободны. В рамках линейной теории упругости получены уравнение движения и уравнение упругих колебаний пластины. Исследована задача кинематического управления движением пластины, определены упругие колебания и дополнительное усилие, обусловленные упругостью пластины. В конце работы обсуждается одна постановка задачи оптимального управления движением пластины.

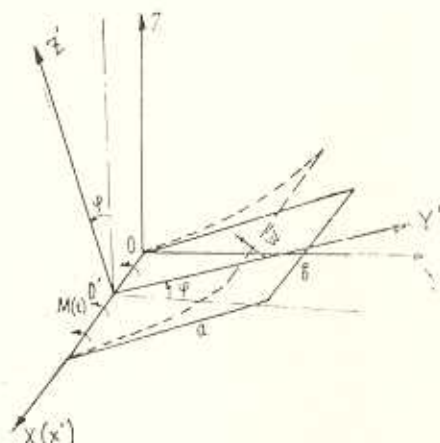
1. *Описание механической системы.* Рассмотрим изотропную прямоугольную пластинку ($a \times b$), одна сторона которой жестко закреплена, а другие свободны. Пластинка постоянной толщины h характеризуется цилиндрической жесткостью на изгиб D и плотностью ρ . Принимается гипотеза недеформируемых нормалей [9]. Колебательное движение происходит в вертикальной плоскости YOZ (фиг. 1) и оно осуществляется вращательным моментом $M(t)$, приложенным к оси OX . Обозначим обобщенную координату движения системы через φ , где φ —угол между плоскостью XOY и плоскостью, проходящей через неподвижную прямую OX и являющейся касательной к срединной поверхности деформируемой пластины в любой точке оси OX . Вектор упругих поперечных смещений точек срединной плоскости пластины в момент времени t обозначим через $\vec{w}(t, x, y)$. Радиус-вектор точек пластины относительно точки O' обозначим через

$$\vec{R}(t, x, y) = \vec{R}_0(t, x, y) + \vec{w}(t, x, y) \quad (1.1)$$

где $\vec{R}_0(t, x, y)$ —вектор состояния недеформированной пластины относительно точки O' .

Векторы \vec{R}_0 и \vec{w} в инерциальной системе координат $OXYZ$ имеют следующие координатные представления:

$$\vec{R}_0(t, x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \cos \varphi \\ y \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{w}(t, x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -w(t, x, y) \sin \varphi \\ w(t, x, y) \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Кинетическая энергия движения пластины имеет вид

$$K = \frac{\rho h}{2} \iint_{\Omega} |\dot{\vec{R}}(t, x, y)|^2 d\Omega \quad (1.3)$$

где $d\Omega$ —элемент срединной плоскости пластины.

Суммарная потенциальная энергия пластины, состоящая из потенциальной энергии силы тяжести и упругой деформации, представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi = & \rho g h \iint_{\Omega} [y \sin \varphi + w(t, x, y) \cos \varphi] d\Omega + \\ & + \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, E —модуль упругости материала, ν —коэффициент Пуассона.

Исследования проводятся в рамках линейной теории упругости, где имеют место следующие предположения: упругое поперечное смещение пластины мало $(\max |w(t, x, y)| / \min(a, b) \sim \varepsilon, \varepsilon \ll 1)$, а цилиндрическая жесткость на изгиб велика ($D \sim \varepsilon^{-1}$). Предполагается также, что поворот пластины вокруг оси OX конечный ($\varphi \sim 1$), а отношение времени колебательного движения к максимальному периоду собственных упругих колебаний пластины имеет порядок $T/T_0 \sim \varepsilon^{-1/2}$. Из этих предположений следует, что $\dot{\varphi} \sim \sqrt{\varepsilon}$ и $\ddot{\varphi} \sim \varepsilon$.

Согласно формулам (1.1) — (1.3) для кинетической энергии движения пластины получим:

$$K = \rho \frac{h}{2} \iint_{\Omega} [y^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{w}^2(t, x, y) + 2y \dot{\varphi} \dot{w}(t, x, y)] d\Omega \quad (1.5)$$

В (1.5) сохранены только те члены, порядок которых не превышает ε^2 .

2. *Уравнения динамики.* Для получения уравнения движения и уравнения упругих колебаний пластины воспользуемся вариационным принципом механики Гамильтона-Остроградского:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(K - \Pi + A) dt = 0 \quad (2.1)$$

где δK — вариация кинетической энергии; $\delta \Pi$ — вариация потенциальной энергии; $\delta A = M(t) \delta \varphi$ — элементарная работа вращающегося момента $M(t)$ на виртуальных изменениях угла поворота φ ; t_1 и t_2 — соответственно начало и конец движения; причем $\delta \varphi = \delta w(t, x, y) = 0$ при $t = t_1, t_2$.

Подставляя значения (1.4) и (1.5) в (2.1) и вычисля вариации кинетической и потенциальной энергий с использованием принципа независимых вариаций, получим линейное интегро-дифференциальное уравнение движения

$$\rho h \iint_{\Omega} y [y \ddot{\varphi} + \ddot{w}(t, x, y)] d\Omega = M(t) - \rho g h \iint_{\Omega} (y \cos \varphi - w \sin \varphi) d\Omega \quad (2.2)$$

и уравнение упругих колебаний пластины

$$\frac{D}{\rho h} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -y \ddot{\varphi} - g \cos \varphi \quad (2.3)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} w(t, x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial w(t, x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=a} = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=a} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0,b} = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=0,b} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Согласованные с крайними условиями (2.4), начальные условия задачи представим в виде

$$\varphi(0) = \varphi^0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}^0 \quad (2.5)$$

$$w(0, x, y) = F_1(x, y), \quad \dot{w}(0, x, y) = F_2(x, y)$$

3. *Решение краевой задачи (2.3) — (2.5).* Решение уравнения (2.3)

с заданной правой частью представим в виде ряда по собственным формам однородной краевой задачи

$$w(t, x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty} \Theta_{mn}(t) X_m(x) Y_n(y) \quad (3.1)$$

Функции $X_m(x)$ и $Y_n(y)$ представляют собой собственные формы колебаний однородных балок. $X_m(x)$ удовлетворяет краевым условиям балки со свободными концами:

$$X_m'(0) = X_m'''(0) = 0, \quad X_m(b) = X_m'(b) = 0$$

а $Y_n(y)$ удовлетворяет краевым условиям для балки, жестко заделанной на конце $y=0$ и со свободным правым концом $y=a$:

$$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0, \quad Y_n(a) = Y_n''(a) = 0$$

Эти функции полностью удовлетворяют кинематическим граничным условиям и частично (в точках с координатами $(0, a)$, (b, a)) динамическим краевым условиям пластины. Применение разложения (3.1) по балочным функциям при решении задачи колебания прямоугольной пластины со свободными и одним заделанным краями является приближенным способом решения исходной краевой задачи [9, 10].

Балочные функции $X_m(x)$ и $Y_n(y)$ имеют следующий вид:

$$X_m(x) = A_m \left[S(\lambda_m x) - \frac{T(\lambda_m b)}{U(\lambda_m b)} T(\lambda_m x) \right] \quad (3.2)$$

$$Y_n(y) = B_n \left[U(\lambda_n y) - \frac{V(\lambda_n a)}{S(\lambda_n a)} V(\lambda_n y) \right]$$

где $S(\cdot)$, $T(\cdot)$, $U(\cdot)$, $V(\cdot)$ — функции Крылова [9].

λ_m и λ_n определяются из следующих трансцендентных уравнений:

$$\operatorname{ch} \lambda_m b \cdot \cos \lambda_m b - 1 = 0 \quad (3.3)$$

$$\operatorname{ch} \lambda_n a \cdot \cos \lambda_n a + 1 = 0 \quad (3.4)$$

В формуле (3.2) произвольные постоянные A_m и B_n определяются из условий ортогональности собственных функций:

$$\int_0^b X_m(x) X_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq k \\ a_m^2 & \text{при } m = k \end{cases}$$

$$\int_0^a Y_n(y) Y_k(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq k \\ a_n^2 & \text{при } n = k \end{cases} \quad (3.5)$$

Подставляя (3.1) в уравнение (2.3) и учитывая условие ортогональности (3.5), получим следующую бесконечную систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\Theta}_{mn}(t) + k_{mn}^2 \Theta_{mn}(t) = \Phi_{mn}[t] \quad (3.6)$$

где $k_{mn}^2 = D[(\gamma_m^4 + \gamma_n^4)x_m^2 x_n^2 + 2C_{mn}] / \rho h a_m^2 a_n^2$

$$C_{mn} = \int_{\Omega} X_m(x) Y_n(y) X_m(x) Y_n(y) d\Omega$$

$$\Phi_{mn}[t] = -\frac{1}{\gamma_m^2 \gamma_n^2} \int_{\Omega} (y\ddot{\varphi} + g \cos \varphi) X_m(x) Y_n(y) d\Omega$$

(скобки [t] означают неявную зависимость функции Φ_{mn} от времени).

Общее решение уравнения (3.6) имеет вид

$$\Theta_{mn}(t) = C_{mn}^1 \sin k_{mn} t + C_{mn}^2 \cos k_{mn} t + \frac{1}{k_{mn}} \int_0^t \Phi_{mn}[\tau] \sin k_{mn}(t-\tau) d\tau \quad (3.7)$$

Постоянные C_{mn}^1 и C_{mn}^2 определяются из второго начального условия (2.5)

$$C_{mn}^1 = \frac{1}{k_{mn} a_m^2 a_n^2} \int_{\Omega} F_2(x, y) X_m(x) Y_n(y) d\Omega \quad (3.8)$$

$$C_{mn}^2 = \frac{1}{\gamma_m^4 \gamma_n^4} \int_{\Omega} F_1(x, y) X_m(x) Y_n(y) d\Omega$$

$k_{mn} = \sqrt{D[(\gamma_m^4 + \gamma_n^4)x_m^2 x_n^2 + 2C_{mn}] / \rho h a_m^2 a_n^2}$ — частоты собственных гармонических колебаний пластины; $T_0 = \max_{m,n} 2\pi / k_{mn}$ — максимальный период собственных упругих колебаний пластины.

Следовательно, упругие колебания пластины во время движения определяются по закону

$$\begin{aligned} \omega(t, x, y) = & \sum_{m,n=1}^{\infty} \left[C_{mn}^1 \sin k_{mn} t + C_{mn}^2 \cos k_{mn} t + \right. \\ & \left. + \frac{1}{k_{mn}} \int_0^t \Phi_{mn}[\tau] \sin k_{mn}(t-\tau) d\tau \right] X_m(x) Y_n(y) \end{aligned} \quad (3.9)$$

4. Колебательное движение пластины с учетом сопротивления среды. Пусть во время движения пластины на систему действует сила сопротивления среды пропорционально скорости движения

$$\vec{F}(t, x, y) = -\beta \vec{v}(t, x, y) \quad (4.1)$$

где β — коэффициент пропорциональности, $\vec{v}(t, x, y)$ — скорость движения точек срединной плоскости пластины.

Элементарная работа силы сопротивления \vec{F} на виртуальном перемещении точек пластины имеет вид

$$\delta A_1 = \vec{F}^T(t, x, y) \delta \vec{R}^T(t, x, y) \quad (4.2)$$

где $\vec{R}(t, x, y)$ определяется из (1.1). Символ T означает транспонирование.

Подставляя (1.1), (4.1), в (4.2), получим с точностью до ε^2 ($\varepsilon \ll 1$) следующие выражения для элементарной работы силы сопротивления:

$$\delta A_1 = -\beta [(y^2 \dot{\varphi} + y \dot{w}) \delta \varphi + (y \dot{\varphi} + \dot{w}) \delta w] \quad (4.3)$$

Диссипативная функция Релея имеет вид

$$R = \frac{\beta}{2} (y^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{w}^2 - 2y \dot{\varphi} \dot{w}) \quad (4.4)$$

а обобщенные силы сопротивления—

$$Q_1 = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}} = -\beta(y^2 \dot{\varphi} + y \dot{w}), \quad Q_2 = -\frac{\partial R}{\partial \dot{w}} = -\beta(\dot{w} + y \dot{\varphi}) \quad (4.5)$$

Для получения уравнения движения и уравнения упругих колебаний пластины в сопротивляющейся среде необходимо в (2.1) вместо $\delta A = M \delta \varphi$ подставить следующее выражение для элементарных работ всех сил на виртуальных перемещениях:

$$\delta A = M \delta \varphi - \beta(y^2 \dot{\varphi} + y \dot{w}) \delta \varphi - \beta(y \dot{\varphi} + \dot{w}) \delta w \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в (2.1) и производя необходимые вычисления, получим линейное интегро-дифференциальное уравнение движения

$$\begin{aligned} \rho h \iint_{\Omega} y [y \ddot{\varphi} + \ddot{w} + \beta(y \dot{\varphi} + \dot{w})] d\Omega = M(t) - \\ - g \rho h \iint_{\Omega} (y \cos \varphi - w \sin \varphi) d\Omega \end{aligned} \quad (4.7)$$

и уравнение упругих колебаний пластины

$$\begin{aligned} \frac{D}{\rho h} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial t} = \\ = -y(\ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi}) - g \cos \varphi \end{aligned} \quad (4.8)$$

с граничными условиями (2.4).

Краевая задача (4.8), (2.4) решается по методике, изложенной в п. 3.

Для коэффициентов $\theta_{mn}(t)$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\theta}_{mn}(t) + 2N_{mn} \dot{\theta}_{mn}(t) + k_{mn}^2 \theta_{mn}(t) = \Phi_{mn}^1[t] \quad (4.9)$$

$$\theta_{mn}(0) = \frac{1}{\alpha_m^2 \alpha_n^2} \iint_{\Omega} F_1(x, y) X_m(x) Y_n(y) d\Omega \quad (4.10)$$

$$\dot{\theta}_{mn}(0) = \frac{1}{k_{mn} \alpha_m^2 \alpha_n^2} \iint_{\Omega} F_2(x, y) X_m(x) Y_n(y) d\Omega$$

Здесь $\Phi_{mn}^1[t]$ имеет вид

$$\Phi_{mn}^1[t] = - \frac{1}{\alpha_m^2 \alpha_n^2} \iint_{\Omega} [y(\ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi}) + g \cos \varphi] X_m(x) Y_n(y) d\Omega$$

а $2N_{mn} = \beta / \alpha_m^2 \alpha_n^2$

Решение уравнения (4.9) при заданных $\Phi_{mn}^1[t]$ и при $N_{mn} < k_{mn}$ (при малом сопротивлении) имеет вид

$$\begin{aligned} \theta_{mn}(t) = & e^{-N_{mn}t} \left[\theta_{mn}(0) \cos k_{mn}^* t + \frac{N_{mn} \theta_{mn}(0) + \dot{\theta}_{mn}(0)}{k_{mn}^*} \sin k_{mn}^* t \right] + \\ & + \frac{1}{k_{mn}^*} \int_0^t \Phi_{mn}^1[\tau] e^{-N_{mn}(t-\tau)} \sin k_{mn}^*(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $k_{mn}^* = \sqrt{k_{mn}^2 - N_{mn}^2}$ — круговая частота колебаний,

$T_0 = \max_{m,n} 2\pi \sqrt{k_{mn}^2 - N_{mn}^2}$ — максимальный период затухающего колебания.

В выражении для $\theta_{mn}(t)$ первое слагаемое

$$\theta_{mn}^1(t) = \exp(-N_{mn}t) \left[\theta_{mn}(0) \cos k_{mn}^* t + \frac{N_{mn} \theta_{mn}(0) + \dot{\theta}_{mn}(0)}{k_{mn}^*} \sin k_{mn}^* t \right]$$

определяет колебание пластины в сопротивляющейся среде, а второе

$$\theta_{mn}^2(t) = \frac{1}{k_{mn}^*} \int_0^t \Phi_{mn}^1[\tau] \exp(-N_{mn}(t-\tau)) \sin k_{mn}^*(t-\tau) d\tau$$

— вынужденное колебание под действием силы $\Phi_{mn}^1[t]$.

Из первого слагаемого следует, что при наличии силы сопротивления свободные колебания пластины со временем затухают

$\theta_{mn}^1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а решение уравнения (4.9) стремится к $\theta_{mn}^2(t)$.

При больших силах сопротивления, то есть при $N_{mn} \gg k_{mn}$ решение уравнения (4.9) имеет вид

$$\begin{aligned} \theta_{mn}^*(t) = & \exp(-N_{mn}t) (C_{mn}^1 \operatorname{ch} t \sqrt{N_{mn}^2 - k_{mn}^2} + C_{mn}^2 \operatorname{sh} t \sqrt{N_{mn}^2 - k_{mn}^2}) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{N_{mn}^2 - k_{mn}^2}} \int_0^t \Phi_{mn}^1[\tau] \exp(-N_{mn}(t-\tau)) \operatorname{sh} \sqrt{N_{mn}^2 - k_{mn}^2} (t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.12)$$

($N_{mn} > k_{mn}$)

$$\vartheta_{mn}^{**}(t) = \exp(-N_{mn}t)(C_{mn}^1 + C_{mn}^2 t) + \int_0^t \Phi_{mn}^1 |\dot{\tau}| \exp(-N_{mn}(t-\tau))(t-\tau) d\tau$$

$$(N_{mn} = k_{mn}) \quad (4.13)$$

где C_{mn}^1 и C_{mn}^2 определяются из начальных условий (4.10).

Следовательно, колебание пластины во время движения в сопротивляющейся среде имеет, соответственно, следующие виды:

$$w(t, x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \vartheta_{mn}(t) X_m(x) Y_n(y)$$

$$(N_{mn} < k_{mn}) \quad (4.14)$$

$$w^*(t, x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \vartheta_{mn}^*(t) X_m(x) Y_n(y)$$

$$(N_{mn} > k_{mn}) \quad (4.15)$$

$$w^{**}(t, x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \vartheta_{mn}^{**}(t) X_m(x) Y_n(y)$$

$$(N_{mn} = k_{mn}) \quad (4.16)$$

где $\vartheta_{mn}(t)$, $\vartheta_{mn}^*(t)$, $\vartheta_{mn}^{**}(t)$ определяются из (4.11), (4.12), (4.13) соответственно.

5. *Задача кинематического управления движением упругой пластины.* Пусть задан закон изменения угла $\varphi = \varphi(t)$ как функция времени, который реализуется в системе некоторыми техническими средствами. Таким образом, управление задано кинематически. Требуется найти движение упругой пластины и момент $M(t)$, обеспечивающий это движение (не колебательное) для упругой модели пластины.

Из уравнений (2.2), (4.7) следует, что управляющий момент $M(t)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых [2]:

$$M(t) = M_1^0(t) + M_1^*(t) \quad (5.1)$$

$$M(t) = M_2^0(t) + M_2^*(t) \quad (5.2)$$

где $M_1^0(t)$, $M_2^0(t)$ соответствуют движениям (с учетом и без учета силы сопротивления среды) абсолютно жесткой модели пластины и определяются следующим образом:

$$M_1^0(t) = \rho h \int_{\Omega} |y^{\ddot{\varphi}} + g \cos \varphi| d\Omega \quad (5.3)$$

$$M_2^0(t) = \rho h \int_{\Omega} y [y^{\ddot{\varphi}} + \dot{\varphi}^2 y + g \cos \varphi] d\Omega \quad (5.4)$$

а $M_1^*(t)$, $M_2^*(t)$ обусловлены упругой податливостью пластины и имеют вид

$$M_1^0(t) = \rho h \int_{\Omega} (y\dot{w} - gws \sin \varphi) d\Omega \quad (5.5)$$

$$M_2^0(t) = \rho h \int_{\Omega} (y\dot{w} + y\beta\dot{w} - gws \sin \varphi) d\Omega \quad (5.6)$$

Из (5.3) — (5.6) следует, что при сделанных выше (п. 1) предположениях относительно малости характерных величин движения упругой модели пластины, компоненты управляющего момента имеют порядок малости ϵ .

При решении задачи кинематического управления движением упругой модели пластины, когда задано движение жесткой модели $\varphi(t)$, управляющие моменты $M_1^0(t)$, $M_2^0(t)$ определяются непосредственно подстановкой $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\ddot{\varphi}(t)$ в (5.3), (5.5). Дополнительные управляющие моменты $M_1^1(t)$, $M_2^1(t)$, которые зависят от упругих колебаний пластины, определяются после решения уравнений (2.3), (4.8) при заданных правых частях. Из решений этих задач следует, что дополнительные управляющие моменты, которые необходимо учитывать в системе управления, имеют колебательный характер:

$$M_1^1(t) = \rho h \int_{\Omega} \sum_{m,n=1}^{\infty} [y\dot{\theta}_{mn}(t) - g \sin \varphi \dot{\theta}_{mn}(t)] X_m(x) Y_n(y) d\Omega \quad (5.7)$$

$$M_2^1(t) = \rho h \int_{\Omega} \sum_{m,n=1}^{\infty} [y\dot{\theta}_{mn}(t) + y\beta \dot{\theta}_{mn}(t) - g \sin \varphi \dot{\theta}_{mn}(t)] X_m(x) Y_n(y) d\Omega \quad (5.8)$$

где в (5.7) $\theta_{mn}(t)$ определяется из (3.7), а $\dot{\theta}_{mn}(t)$ в (5.8) — из (4.11), (4.12), (4.13), соответственно.

6. *Задача динамического управления.* Требуется найти программно-управляющий момент $M(t) \in \{M\}$ или в форме синтеза $M = M[t, \varphi^0, \dot{\varphi}^0, F_1(x, y), F_2(x, y)]$, обеспечивающее приведение системы за время $T < \infty$ из начального состояния:

$$\varphi(0) = \varphi^0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}^0$$

$$w(0, x, y) = F_1(x, y), \quad \dot{w}(0, x, y) = F_2(x, y)$$

в заданное конечное состояние

$$\varphi(T) = \varphi^T, \quad \dot{\varphi}(T) = 0$$

$$w(T, x, y) = F_3(x, y), \quad \dot{w}(T, x, y) = 0$$

с торможением движения и гашением упругих колебаний пластины в конце процесса движения. В конечном условии учтено, что в положении равновесия пластина имеет статический прогиб, обусловленный действием силы тяжести.

В связи с техническим требованием задачи управления и физико-механических характеристик пластины, возможно упрощение исходной задачи управления, то есть ограничиться гашением упругих колебаний пластины в конце процесса.

Множество $\{M\}$ описывает ограничения на управляющий момент $M(t)$ и характеризует технические возможности системы управления. Момент окончания процесса управления T может быть задан заранее или определяться в процессе решения задачи. Подставленная задача имеет множество решений. Для выделения единственного решения или, по крайней мере, существенного сужения этого множества, необходимо дополнительное условие, например, требование оптимальности управления по какому-нибудь критерию [5]. В частности,

$$J = J[M] \rightarrow \min_{M \in \Omega},$$

характеризующее качество управления.

ON VIBRATING MOTION OF A RECTANGULAR PLATE

A. A. GUKASIAN, S. V. SAKISIAN

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ՏԱՏԱՆՈՂԱԿԱՆ ՇԱՐՃՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ա. ԴՈՒՍԱՅԱՆ, Ս. Վ. ՍԱԿԻՍԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Ուսումնասիրված է առաձգական, իզոտրոպ ուղղանկյուն սալի պատական շարժումը ուղղաձիգ հարթության մեջ, որի մի կողմը ամրակցված է, իսկ մնացածներն ազատ են: Առաձգականության գծային տեսության սահմաններում ստացված են սալի շարժման և առաձգական տատանումների հավասարումները: Հետազոտված է սալի շարժման կինեմատրիկական ղեկավարման խնդիրը, որոշված են առաձգական տատանումները և սալի առաձգականության պայմանավորված լրացուցիչ ուժերը: Աշխատանքի վերջում քննարկված է սալի շարժման օպտիմալ ղեկավարման խնդրի մի դրվածք:

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами.—ИММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 34—42.
2. Черноусько Ф. Л. Динамика систем с упругими элементами большой жесткости.—Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 101—113.
3. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями.—М.: Наука, 1980, 382 с.
4. Акуленко Л. Д. Асимптотические методы оптимального управления.—М.: Наука, 1987, 365 с.

5. Акуленко Л. Д., Гукасян А. А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора.—МТТ, 1983, №5, с. 33—41.
6. Дегтярев Г. Л., Сиразетдинов Т. К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами.—М.: Машиностроение, 1986. 204 с.
7. Заведеев Л. И. Системы управления ориентацией космическими аппаратами с упругими элементами конструкции.—В сб.: Вопросы управления космическими аппаратами. М., Мир, 1975, с. 130—165.
8. Хьюз. Динамика ориентации КА с гибкими панелями солнечных батарей.—Вопросы ракетной техники, №12, 1974, с. 68—78.
9. Бабаков И. М. Теория колебаний.—М.: Наука, 1968. 559 с.
10. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем.—М.: Машиностроение, 1970. 733 с.

Ереванский государственный
университет

Поступила в редакцию
15. VI. 1989