

К УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ И ВЯЗКОУПРУГОЙ
 АНИЗОТРОПНОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ

МОВСИСЯН Լ. Ա.

Существуют различные способы составления многослойных сред [1—3] и др. При решении конкретных задач в большинстве своем рассматривается такой пакет, чтобы главные направления упругости (если композит, то направления армирования) совпадали с координатными осями. Это имеет то преимущество, что задачи решаются сравнительно просто. Но, наилучшее ли это расположение? Как решать задачу в общем случае? Что понимать под наилучшим для упругой и вязкоупругой задач. Некоторые аспекты этих вопросов будут обуждены в настоящей работе.

1. Пусть имеется вязкоупругий ортотропный материал (например, армированный композит на полимерной основе) с операторами вязкоупругости $\bar{A}_{ij} = A_{ij} - \Gamma_{ij}^*$. Создается многослойная пластинка из $2n$ слоев общей толщиной $2h$ следующим образом: k -тые слои в обоих направлениях относительно срединной плоскости имеют одинаковую толщину h_k (геометрическая симметрия) и слои повернуты друг относительно друга на некоторый угол в их плоскости. Причем рассматриваются два случая:

- а) k -тые слои в обе стороны от срединной плоскости относительно координатных осей Ox, Oy повернуты на один и тот же угол φ_k ;
- б) в одном направлении от срединной плоскости, если k -тый слой повернут на φ_k , то в другом направлении соответствующий слой повернут на $-\varphi_k$.

В первом случае пакет многослойной пластинки назовем симметричным, а во втором — антисимметричным.

В системе координат (xy) определяющие уравнения для k того слоя запишутся в виде

$$\tau_{ij}^{(k)} = \bar{B}_{ij}^{(k)} e_j \quad (1.1)$$

где формулы пересчета новых операторов через \bar{A}_{ij} выразятся следующим образом:

$$\bar{B}_{11}^{(k)} = \bar{A} + \bar{B} \cos 2\varphi_k + \bar{C} \cos^2 2\varphi_k$$

$$\bar{B}_{22}^{(k)} = \bar{A} - \bar{B} \cos 2\varphi_k + \bar{C} \cos^2 2\varphi_k$$

$$\tilde{B}_3^{(k)} = \tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{00} = \tilde{D} - 3\tilde{C}\cos^2 2\varphi_k$$

$$\tilde{B}_{16}^{(k)} = \left(\frac{1}{2} \tilde{B} + \tilde{C}\cos 2\varphi_k \right) \sin 2\varphi_k$$

(1.2)

$$\tilde{B}_{26}^{(k)} = \left(\frac{1}{2} \tilde{B} - \tilde{C}\cos 2\varphi_k \right) \sin 2\varphi_k$$

$$\tilde{B}_{ij}^{(k)} = B_{ij}^{(k)} - R_{ij}^{(k)}, \quad \tilde{A} = \frac{1}{4} (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{22} + 2\tilde{A}_3)$$

$$\tilde{B} = \frac{1}{2} (\tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{22}), \quad \tilde{C} = \frac{1}{4} (\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{22} - 2\tilde{A}_3)$$

$$D = \frac{1}{4} |3(\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{22}) - 2\tilde{A}_3|, \quad \tilde{A}_3 = \tilde{A}_{12} + 2\tilde{A}_{00}$$

Принимая гипотезу прямых нормалей для усилий и моментов, будем иметь:

$$\begin{aligned} T_x &= \tilde{C}_{11}\varepsilon_1 + \tilde{C}_{12}\varepsilon_2 + \tilde{C}_{16}\varepsilon_{12}, & M_x &= \tilde{D}_{11}\chi_1 + \tilde{D}_{12}\chi_2 + D_{16}\chi_{12} \\ T_y &= \tilde{C}_{12}\varepsilon_1 + \tilde{C}_{22}\varepsilon_2 + \tilde{C}_{26}\varepsilon_{12}, & M_y &= \tilde{D}_{12}\chi_1 + \tilde{D}_{22}\chi_2 + \tilde{D}_{26}\chi_{12} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$T_{xy} = \tilde{C}_{16}\varepsilon_1 + \tilde{C}_{26}\varepsilon_2 + \tilde{C}_{66}\varepsilon_{12}, \quad M_{xy} = \tilde{D}_{16}\chi_1 + \tilde{D}_{26}\chi_2 + \tilde{D}_{66}\chi_{12}$$

в симметричном случае, и

$$\begin{aligned} T_x &= \tilde{C}_{11}\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{C}_{12}\tilde{\varepsilon}_2 + \tilde{K}_{16}\chi_{12}, & M_x &= \tilde{D}_{11}\chi_1 + \tilde{D}_{12}\chi_2 + \tilde{K}_{16}\varepsilon_{12} \\ T_y &= \tilde{C}_{12}\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{C}_{22}\tilde{\varepsilon}_2 + \tilde{K}_{26}\chi_{12}, & M_y &= \tilde{D}_{12}\chi_1 + \tilde{D}_{22}\chi_2 + \tilde{K}_{26}\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$T_{xy} = \tilde{C}_{66}\tilde{\varepsilon}_{12} + \tilde{K}_{16}\chi_1 + \tilde{K}_{26}\chi_2, \quad M_{xy} = \tilde{D}_{66}\chi_{12} + \tilde{K}_{16}\varepsilon_1 + \tilde{K}_{26}\varepsilon_2$$

в антисимметричном случае.

Приведенные жесткости определяются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ij} &= 2 \sum_{k=1}^n \tilde{B}_{ij}^{(k)} (h_k - h_{k-1}), & \tilde{K}_{ij} &= \sum_{k=1}^n \tilde{B}_{ij}^{(k)} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ \tilde{D}_{ij} &= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n \tilde{B}_{ij}^{(k)} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$h_k - h_{k-1}$ — толщина k -того слоя, $h_n = h$, а компоненты деформации

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.6)$$

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{12} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

где u , v , w — компоненты перемещения соответственно по направлениям x , y и z .

К системам (1.3)—(1.6) должны быть присоединены уравнения устойчивости, которые в общем случае будут иметь вид

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2T_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

Как видно из (1.3)—(1.7), в симметричном случае (1.7) распадается на отдельные системы, так что уравнением устойчивости является только третье уравнение из этой системы, в то время как при антисимметричном случае уравнения связаны, то есть плоская задача и изгиб возмущенного состояния взаимосвязаны.

Какой из пакетов лучше—симметричный или антисимметричный? Как повернуть слои друг относительно друга и какие брать толщины, чтобы критическое усилие было наибольшим? В последующих трех пунктах рассматриваются упругие задачи.

2. Предположим, что начальное напряженное состояние прямоугольной пластинки осуществляется следующим образом: один край неподвижен, на другом задано перемещение, то есть $u_0 = 0$ при $x = 0$ и $u_0 = -C$ при $x = a$. Тогда $T_x^0 = -C_{11} \frac{C}{a} = P$, $T_y^0 = -C_{12} \frac{C}{a}$, $T_{xy}^0 = 0$.

Если подставить (1.4) и (1.6) в (1.7), то полученная система относительно перемещений для прямоугольной пластинки допускает разделения переменных при граничных условиях: $u = T_{xy} = w = M_x = 0$ при $x = 0$, $x = a$ и $v = T_{xy} = w = M_y = 0$ при $y = 0$, $y = b$. При этом для критической силы получается выражение (из-за громоздкости не приводится), которое в главном имеет характерные черты задачи цилиндрического изгиба. Поэтому приведем выражение критической нагрузки последней задачи:

$$P_{кр} = D_{11} \left(1 - \frac{K_{16}^2}{C_{11} C_{66}} \right) \frac{\pi^2}{a^2} \quad (2.1)$$

Отсюда видно, что если формально принять $K_{16} = 0$, то значение критического усилия увеличится, то есть пренебрежение влиянием плоской задачи на изгиб приводит к увеличению критической нагрузки, причем разница может быть очень существенной. Например, для материала (4.3), при $n = 1$ второе слагаемое равно 0,5285 при $\varphi = 30^\circ$ и 0,4423—при $\varphi = 45^\circ$. Такой же качественный результат получен и в [4], но там взаимноперпендикулярно-армированные слои располагаются по координатным осям и коэффициенты взаимодействия изгиба и плоской задачи K_{11} , K_{12} , K_{22} появляются от антисимметричности и нерегулярности расположения слоев.

3. В случае симметричного пакета плоская задача и изгиб рас-

падают и в уравнении устойчивости перемещения u и v не участвуют. При одноосном сжатии по x интенсивностью P имеем

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(D_{12} + 2D_{16}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$+ 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1)$$

Прежде чем решить уравнение (3.1) в общем случае, рассмотрим один частный, но важный, случай.

Наличие коэффициентов D_{16} не позволяет разделить переменных уравнений (3.1). Рассмотрим такой вопрос. Нельзя ли расположить слои так, чтобы коэффициенты D_{16} и D_{26} обратились в нули? Среди армированных композитов есть один класс, когда $A_{11} = A_{22}$ (так будет, например, если в взаимноперпендикулярных направлениях число волокон одинаковые). Тогда, для того, чтобы D_{16} равнялись нулю, достаточно слои расположить следующим образом ($D_{16} = 0$, когда $A_{11} - A_{33} = 0$, но это очень частный случай)

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k (1 - \lambda_k) \sin 4\varphi_k = 0, \quad \alpha_k = (h_k/h_n)^3, \quad \lambda_k = (h_{k-1}/h_k)^3 \quad (3.2)$$

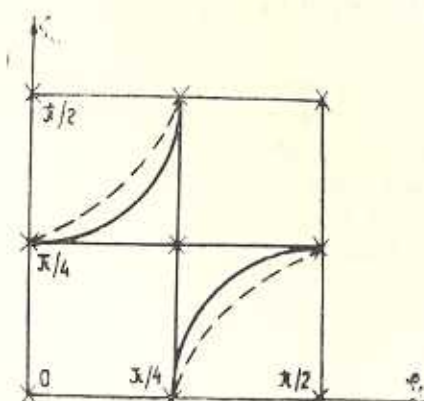
В n -мерном пространстве решение (3.2) дает поверхность. Значения φ_k , взятые на этой поверхности, обеспечивают условия $D_{16} = 0$

Для наглядности рассмотрим случай $n=2$. Тогда уравнение (3.2) превращается в

$$\sin 4\varphi_1 + \gamma \sin 4\varphi_2 = 0 \quad (3.3)$$

где параметр γ характеризует отношение толщин слоев.

На плоскости (φ_1, φ_2) кроме точек вершин квадрата $\pi/2 \times \pi/2$, решением уравнения (3.2) будут сплошные кривые и точка $(\pi/4, \pi/4)$ (фиг. 1).



Фиг. 1.

При отсутствии D_{16} для шарнирно опертой пластинки минимальная критическая нагрузка достигается при $a/b=m$ ($m=1, 2, \dots$) и она равна [1]

$$P_{кр} = \frac{2\pi^2}{b^2} (D_{11} + D_3) \quad (3.4)$$

Здесь и в дальнейшем имеется в виду значение критической нагрузки, которое имеет минимум по a/b и максимум по φ_k .

Кстати, для антисимметричного пакета слоев можно расположить так, чтобы $K_{16} = 0$. При тех же h_k , что в предыдущем, уравнение будет вида (3.3), но с новым γ (заштрихованные кривые фиг. 1).

Если в выражение (3.4) подставить (1.2) (упругие части) с учетом (3.3), можно показать, что точки, отмеченные крестиками на фиг. 1, являются стационарными точками. Причем:

а) если $A_{11} > A_3$, то (3.4) достигает абсолютного максимума в точке $(\pi/4, \pi/4)$, а на вершинах квадрата достигает минимума.

б) если же $A_{11} < A_3$, то в точках $(\pi/4, \pi/4)$ $P_{кр}$ достигает минимума.

В дальнейшем покажем, что это будет иметь место и в общем случае.

Итак, наибольшая и наименьшая критические нагрузки в случае а) определяются формулами

$$P_{кр}^{(max)} = \frac{8\pi^2 h^2}{3b^2} A_{11}, \quad P_{кр}^{(min)} = \frac{4\pi^2 h^2}{3b^2} (A_{11} + A_3) \quad (3.5)$$

В случае б) будет наоборот.

Таким образом, максимальная и минимальная критические нагрузки получаются для однослой, то есть если слои не повернуты относительно друг друга и в зависимости от упругих постоянных, главные направления упругости (направление армирования) или совпадают с координатными осями, или составляет 45° .

Когда же $A_{11} \neq A_{22}$, то нельзя расположить слои так, чтобы одновременно D_{16} и D_{26} обратились в нули кроме случая (точки вершин квадрата фиг. 1), когда главные направления упругости совпадают с координатными линиями. Однако и здесь можно выбором толщины слоев добиться наибольшей критической нагрузки среди этих четырех возможных случаев ($n=2$). Если значение минимальной критической нагрузки при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ (или $\pi/2$) есть

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 h^3}{3b^2} (\sqrt{A_{11} A_{22}} + A_3) \quad \text{при} \quad \frac{a}{b} = m \sqrt[3]{\frac{A_{11}}{A_{22}}} \quad (3.6)$$

то для $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$ максимальное значение минимальной критической нагрузки получается при $h_1/h_2 = 1/\sqrt[3]{2}$ и оно равно

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 h^3}{3b^2} \left[\frac{1}{2} (A_{11} + A_{22}) + A_3 \right] \quad \text{при} \quad \frac{a}{b} = m \sqrt[3]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \quad (3.7)$$

4. Теперь перейдем к рассмотрению общего случая, когда $D_{16} \neq 0$. В [5] такая задача решена на основе метода малого параметра, в качестве которого берется $D_{16}^2/D_{11}D_{22}$. Здесь выбран отличный от [5] путь. В случае, когда все стороны пластинки оперты ($w=M_x=0$ при $x=0, x=a, w=M_y=0$ при $y=0, y=b$), то неизвестные функции можно брать в виде рядов

$$w = \sum_{m,n} a_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad M_x = \sum_{m,n} b_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (4.1)$$

$$M_y = \sum_{m,n} c_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}$$

которые удовлетворяют граничным условиям. Подставляя (4.1) в (1.3), (1.6) и в третье уравнение (1.7), при этом представляя

$$M_{xy} = \sum_{m,n} d_{mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y$$

и учитывая

$$\cos \alpha_m x \cos \beta_n y = \sum_{p,q} \bar{\varphi}_{mnpq} \sin \alpha_p x \sin \beta_q y$$

$$\bar{\varphi}_{mnpq} = \frac{4}{ab} \frac{(-1)^{m+n+p+q} mn pq}{(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)}, \quad m \neq p, \quad n \neq q$$

в окончательном виде для a_{mn} получим систему

$$\Omega_{mn} a_{mn} = \sum_{p,q} e_{mnpq} a_{pq} \quad (4.2)$$

где

$$\Omega_{mn} = D_{11} \alpha_m^4 + 2D_{12} \alpha_m^2 \beta_n^2 + D_{22} \beta_n^4 - P \alpha_m^2$$

$$e_{mnpq} = 2[D_{16}(\alpha_m^2 + \alpha_p^2) + D_{26}(\beta_n^2 + \beta_q^2)] \bar{\varphi}_{mnpq}$$

Критическая нагрузка определяется как наименьшее собственное значение матрицы системы (4.2).

В качестве примера взята квадратная пластинка ($a=b$) с толщинами слоев $h_2=2h_1=h$; материал пластинки есть боропластик [6] с объемной долей наполнителя 0,5:

$$E_1 = 201 \text{ ГПа}, \quad G = 5,4 \text{ ГПа} \quad (4.3)$$

$$E_2 = 21,7 \text{ ГПа}, \quad \mu_{12} = 0,018, \quad \mu_{21} = 0,17$$

В таблице 1 приведены значения критических нагрузок

$\bar{P}_{кр} = \frac{3a^2}{2\pi^2 h^3} F_{кр}$ в ГПа, вычисленные во втором приближении. Таблица симметрична относительно $\varphi_1 = \varphi_2 = 45^\circ$, поэтому для $\varphi_k > 45^\circ$ значения $\bar{P}_{кр}$ не приводятся

Таблица 1

| $\varphi_1 \backslash \varphi_2$ | 0 | 30° | 45° |
|----------------------------------|------|------|------|
| 0 | 2015 | 3008 | 3350 |
| 30° | 2155 | 3149 | 3490 |
| 45° | 2203 | 3199 | 3527 |

В табл. 2 приведены $\bar{P}_{кр}$ для однослойной пластинки, вычисленные в трех приближениях.

| φ | 0 | 30° | 45° |
|-----------|-------|-------|-------|
| I | 251,9 | 427,5 | 446 |
| II | 251,9 | 423,3 | 441,3 |
| III | 251,9 | 422,8 | 440,7 |

Из табл. 2 видно, как быстро сходится процесс определения критической нагрузки.

Анализ полученных формул и приведенных таблиц показывает:

а) Как и в п. 2, «ортотропное решение» (формальное приравнение $D_{11} = D_{22} = 0$) приводит к повышенным значениям критических нагрузок. Однако здесь разница не такая большая, как в п. 2.

б) Подобно п. 3, если $A_{11} + A_{22} > 2A_3$, максимальное значение критической нагрузки получится при однослое (все слои повернуты на 45°).

Таким образом, если материал такой, что $A_{11} + A_{22} > 2A_3$, то наибольшая критическая нагрузка по φ получается, если повернуть главные направления упругости по отношению координатных линий на 45°. Тогда «ортотропное решение» дает формулу

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 h^3}{3b^2} (A_{11} + A_{22}) \quad (4.4)$$

На самом же деле, истинное решение меньше (4.4). Поэтому, если разговор идет об армировании в взаимноперпендикулярных направлениях, то лучше, чтобы $A_{11} = A_{22}$. Тогда «ортотропное решение» будет и истинным решением при $\varphi = 45^\circ$ и критическая нагрузка получится наибольшей (3.5) среди возможных ($A_{11} + A_{22} = \text{const}$).

Но здесь необходимо сделать одно замечание. До сих пор разговор шел о минимальной по a/b критической нагрузке и максимальной по φ_k . Естественно, что для других a/b эти выводы могут быть не совсем верными. Например, для малых a/b , когда потеря устойчивости происходит в виде цилиндрического изгиба, максимальная критическая нагрузка получается для φ_k , при котором наибольшее A_{11} (для материала (4.3) $\varphi = 0$). Однако можно утверждать, что практически уже при $a/b \geq 1$ вывод относительно формул (3.5) и (4.4) верный.

То что наибольшая критическая нагрузка получается при угле поворота на 45°, можно показать и иначе. Представим, что слои настолько тонкие, что можно принять неоднородность по толщине непрерывной. Тогда в выражении критической нагрузки

$$P_{кр} = \frac{2\pi^2}{b^2} (\sqrt{D_{11}D_{22}} + D_3) \quad (4.5)$$

где в выражениях коэффициентов D_{ij} , которые определяются по (1.5),

а \bar{B}_{ij} по (1.2), можно перейти к пределу и вопрос определения наилучшего расположения слоев сведется определению такой функции $f(z)$, которая сообщает максимум функционалу

$$S(f) = \left\{ \left[\int_0^h (A + Cf^2) z^2 dz \right]^2 - \left[\int_0^h Bfz^2 dz \right]^2 \right\}^{1/2} + \int_0^h (D - 3Cf^2) z^2 dz \quad (4.6)$$

Можно показать, что в (4.6) максимум достигается при $f=0$, то есть при $\varphi_0 = \varphi = 45^\circ$, если $A_{11} + A_{22} > 2A_1$.

5. Как известно, для изотропных вязкоупругих материалов существует понятие критической нагрузки мгновенной и длительной. По аналогии с изотропными материалами для анизотропных материалов также вводится понятие этих двух нагрузок [7]. Если мгновенная критическая нагрузка для ортотропного материала определяется формулой (4.5), то для длительной критической нагрузки в (4.5) нужно заменить D_{ij} на D_{ij}^{st} , где $D_{ij}^{st} = \bar{D}_{ij} \cdot 1(t \rightarrow \infty)$. Однако, следует отметить, что для анизотропных, в частности, для ортотропных пластин помимо этих нагрузок есть еще третья критическая нагрузка. Если пластинка сжата в своей плоскости (плоская задача — невозмущенное движение) через «бесконечное» долгое время, не все вязкоупругие операторы превратятся в константы. В частности, для ортотропного материала будут константами A_{11}^{st} , A_{22}^{st} и A_{12}^{st} . Теперь, если такой пластинке сообщить возмущение и рассмотреть устойчивость, то в новой временной шкале будет существовать мгновенная критическая нагрузка, которая определится формулой

$$D_{кр}^{st} = \frac{2\pi^2}{b^2} (\sqrt{12A_{11}^{st}D_{22}^{st}} + D_{12}^{st} + 2D_{66}^{st}) \quad (5.1)$$

так как оператор \bar{D}_{66} при невозмущенном состоянии не «работал».

Второе обстоятельство, на которое следует обратить внимание, следующее. Вопрос о наилучшем расположении слоев пластинки, который обсуждался в предыдущих пунктах для упругой пластинки, имеет смысл, конечно, и для вязкоупругой пластинки. Но надо заметить, что, то что лучше для упругой стадии работы пластинки, может быть вовсе не лучшим для вязкоупругой. Покажем это на частной модели вязкоупругости. Некоторые композиты в направлениях армирования почти не проявляют свойства ползучести, а по отношению касательных напряжений проявляют. Закон напряжения-деформация для таких материалов записывается следующим образом:

$$\tau_x = A_{11}e_x + A_{12}e_y, \quad \sigma_y = A_{12}e_x + A_{22}e_y, \quad \tau_{xy} = \hat{A}_{66}e_{xy} \quad (5.2)$$

Значение мгновенных критических нагрузок для такой пластинки ($A_{11} = A_{22}$) при углах поворота направлений армирования соответственно на 45° и 0° приведены в (3.5). Причем, интересно, что для угла $\varphi = 45^\circ$ длительная нагрузка такая же, что и мгновенная.

Для материала же $A_3 > A_{11}$, если для мгновенной устойчивости лучше $\varphi = 0^\circ$, то для длительной может оказаться, что $\varphi = 45^\circ$. Например, для перекрестно-армированного стеклопластика с данными [6].

$$E_1 = E_2 = 17 \text{ ГПа}, \quad G = 12,5 \text{ ГПа}, \quad \nu_{12} = 0 \quad (5.3)$$

если принять, что длительный модуль сдвига $G^{22} = 0,5G$, то получается

$$P_{кр}^{22} = P_{кр}^{33} = \frac{68\pi^2 h^3}{b^2} \text{ ГПа} \quad \text{при} \quad \varphi = 45^\circ \quad (5.4)$$

$$P_{кр}^{11} = \frac{81\pi^2 h^3}{b^2} \text{ ГПа}, \quad P_{кр}^{31} = \frac{59\pi^2 h^3}{b^2} \text{ ГПа} \quad \text{при} \quad \varphi = 0^\circ$$

Это явление тем более может иметь место и в общем случае вязкоупругости.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
18.V.1989

ON STABILITY OF ELASTIC AND VISCOELASTIC ANIZOTROPIC MULTI-LAYERED PLATE

L. A. MOVSISIAN

ԱՌՈՂԳՈՎԱՆ ԵՎ ԱՌՈՂԳՈՄԱՅՈՒՅՑԻԿ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ԲԱԶՄԱՇԵՐՑ
ՍԱՂԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Դիտարկված է առաձգական և առաձգամածուցիկ բազմաշերտ սաղի կաշու նությունը: Շերտերի նյութը օրթոտրոպ է, որոնցից յուրաքանչյուրը որոշ անկյունով շրջած է սաղի միջին հարթության նկատմամբ, այնպես, որ փախեթի համար անհրաժեշտագիտի ընդհանուր դեպք է ստացվում: Ուսումնասիրված է շերտերի ու նրանց հաստություն այն չափազանց բաշխման հարցը, որի դեպքում կրիտիկական բեռնվածությունն առավելագույնը կլինի:

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластики, М.: ГИИЛ, 1957, 463 с.
2. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974, 446 с.
3. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982, 334 с.
4. Джонс. Устойчивость и колебания прямоугольных несимметричных слоистых пластинок с перекрестным армированием.—Ракетная техника и космонавтика (AIAA Journal), 1973, т. 12, №12, с. 32—40.
5. Саркисян В. С., Мовсисян Л. А. Об одном способе определения критических наг-

рубок анизотропных пластинок.—Инженерный журнал, 1965, т. V, вып. 4, с. 777—782.

6. *Федосьев В. И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986, 512 с.

7. *Потапов В. Д.* Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. М.: Стройиздат, 1986, 312 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
11.X.1989