ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 43, № 3, 1990 Механика

УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ ВОЛНОВЫХ ЭФФЕКТАХ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕДАХ

ЕРОФЕЕВ В. И., ПОТАПОВ А. И.

1. Динамическое поведение континуума Коссера в случае, когда в нем распространяется вдоль оси x плоская продольная волна, а частицы среды могут совершать поворот лишь относительно собственной оси, ориентированной вдоль направления распространения волны, описывается следующими уравнениями [1]:

$$\rho u_{,tt}-(\lambda+2\mu)u_{,xx}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\nu_1}{2}+3\nu_2+4\nu_3\right)u_{,x}^2+2\delta_1\Psi^2+\sigma_0\Psi_{,x}^2\right]=0 \qquad (1.1)$$

$$J\Psi_{,tt}-(\beta+2\gamma)\Psi_{,xx}+4\alpha\Psi+4\delta_1\Psi u_{,x}-\frac{\partial}{\partial x}\left[2\sigma_0\Psi_{,x}u_{,x}\right]=0 \qquad (1.2)$$

где $u(x,t)$ — продольное перемещение частиц среды; $\Psi(x, t)$ — отличная от нуля компонента вектора микровращения; λ, μ, $\nu_{1,2,3}$ — константы Ламе второго и третьего порядков; α, β, γ — линейные микроупругие константы [2], δ_1 и $\sigma_0=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$ — нелинейные микроупругие константы [1]; ρ — плотность, а J — динамическая характеристика среды, равная произведению момента инерции частицы вещества вокруг любой оси, проходящей через ее центр тяжести, на число частиц в единице объема.

Предположим, что на входе в среду ($x=0$) задана продольная волна частоты ω и волна микровращения (спиновая волна) частоты Ω_1. Тогда из (1.1) и (1.2) следует, что спиновая волна разностной частоты будет генерироваться в процессе взаимодействия этих волн. Это можно осуществить, например, в ферромагнетике с помощью переменного магнитного поля на основе эффекта Эйнштейна—де Газа [3]. Решение будем искать в виде трех бегущих волн с медленно меняющимися в пространстве амплитудами и фазами:

$$\begin{aligned} u&=a(\varkappa x)[\exp(i(\omega t-kx+\varphi(\varkappa x)))+\text{к. с.}], \quad (\varkappa\ll 1)\\ \Psi&=b_1(\varkappa x)[\exp(i(\Omega_1 t-K_1x+\theta_1(\varkappa x)))+\text{к. с.}]+\\ &+b_2(\varkappa x)[\exp(i(\Omega_2 t-K_2x+\theta_2(\varkappa y)))+\text{к. с.}] \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Их частоты и волновые числа связаны дисперсионными соотношениями

$$\omega = c_l k, \quad \Omega_{1,2} = \sqrt{c_\psi^2 K_{1,2}^2 + \frac{4\alpha}{J}} \tag{1.4}$$

где $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ — скорость распространения продольных волн в среде, $c_\psi = \sqrt{(\beta + 2\gamma)/J}$ — характерная скорость спиновых волн.

Если эти волны удовлетворяют также условиям фазового синхронизма

$$\Omega_1 = \omega + \Omega_2, \quad K_1 = k + K_2 \tag{1.5}$$

и граничным условиям

$$a(0) = a_0, \quad b_1(0) = b_0, \quad b_2(0) = 0 \tag{1.6}$$

тогда для амплитуд и фаз из (1.1) и (1.2) получается система укороченных уравнений

$$\frac{da}{dx} = -\frac{G}{(\lambda + 2\mu)k} b_1 b_2 \cos\Theta, \quad \frac{db_{1,2}}{dx} = \pm \frac{G}{(\beta + 2\gamma)K_{1,2}} a b_{2,1} \cos\Theta$$

$$\frac{d\Theta}{dx} = G\left[\frac{b_1 b_2}{(\lambda + 2\mu)ka} + \frac{a b_1}{(\beta + 2\gamma)K_1 b_2} - \frac{a b_2}{(\beta + 2\gamma)K_2 b_1}\right]\sin\Theta \tag{1.7}$$

где $G = k|2\delta_1 + \nu_0 K_1 K_2|$ — коэффициент нелинейного взаимодействия; $\Theta = \varphi + \Theta_2 - \Theta_1$; $(c_l < c_\psi)$.

Если накачка задается по продольной волне (ω), то амплитуда возбуждаемой волны вращения (Ω_2) изменяется по закону:

$$b_2(x) = b_0 \sqrt[4]{\frac{J\Omega_1^2 - 4\alpha}{J\Omega_2^2 - 4\alpha}} \sin|\Gamma| x$$

$$|\Gamma| = \frac{G a_0}{\sqrt[4]{(J\Omega_1^2 - 4\alpha)(J\Omega_2^2 - 4\alpha)(\beta + 2\gamma)^2}} \tag{1.8}$$

а ее максимум равен

$$b_2^{\max}(x) = b_0 \sqrt[4]{\frac{J\Omega_1^2 - 4\alpha}{J\Omega_2^2 - 4\alpha}} \tag{1.9}$$

и достигается на расстоянии $L = \pi/2|\Gamma|$. В выражение (1.9) кроме известных частот $(\Omega_{1,2})$, входят линейные константы микрополярной среды (α, J).

Следовательно, если удастся экспериментально измерить максимум волны вращения, то можно определить одну из комбинаций линейных микроупругих констант $(J\Omega_1^2 - 4\alpha)/(J\Omega_2^2 - 4\alpha)$.

Кроме того, по периоду пространственных биений $(2L)$ можно вычислить комбинацию, включающую в себя и нелинейные константы микроупругости $(\nu_{1,2,3}, \delta_1)$

$$\frac{\pi}{2L}=\frac{\omega a_0\left[2\delta_1+\frac{(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{(\beta+2\gamma)}\sqrt{(J\Omega_1^2-4\alpha)(J\Omega_2^2-4\alpha)}\right]}{c_t\sqrt[4]{(J\Omega_1^2-4\alpha)(J\Omega_2^2-4\alpha)(\beta+2\gamma)^2}} \tag{1.10}$$

2. Частным случаем модели континуума Коссера является среда со стесненным вращением частиц (псевдоконтинуум Коссера), когда вектор перемещений связан с вектором микровращения следующим соотношением [2]:

$$\vec{\Psi}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{u} \tag{2.1}$$

Одномерные волновые процессы в псевдоконтинууме Коссера описываются уравнениями [1]:

$$u_{,tt}-c_l^2u_{,xx}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[3g_1u_{,x}^2+g_2|\vec{W}_{,x}|^2\right] \tag{2.2}$$

$$\vec{W}_{,tt}-c_t^2\vec{W}_{,xx}+\frac{(\gamma+\varepsilon)}{4\rho}\vec{W}_{,xxxx}-\frac{J}{4\rho}\vec{W}_{,xxtt}=$$

$$=\frac{2g_2}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{,x}\vec{W}_{,x}\right) \tag{2.3}$$

Здесь $\vec{W}=\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ —вектор поперечных перемещений, $c_t=\sqrt{\beta/\rho}$ —скорость сдвиговых волн, $g_1=\frac{\nu_1}{6}+\nu_2+\frac{4}{3}\nu_3$, $g_2=\frac{\nu_2}{2}+\nu_3$ — комбинации из констант Ламе третьего порядка, ε — еще одна нелинейная микроупругая константа.

Рассмотрим трехволновое взаимодействие продольной и сдвиговых волн

$$u=A(\varkappa x,\varkappa t)\exp(i(\Omega t-Kx+\varphi^{(0)}))+\text{к. с.}$$

$$\begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix}=\sum_{j=1}^{2}B_j(\varkappa x,\varkappa t)\begin{Bmatrix} 1/2 \\ i/2 \end{Bmatrix}\exp(i(\omega_jt-k_jx+\theta_j^{(0)}))+\text{к. с.} \tag{2.4}$$

где A, $B_{1,2}$ — комплексные амплитуды, а $\varphi^{(0)}$ и $\theta_j^{(0)}$ — начальные сдвиги фаз. Считаем, что частоты и волновые числа этих волн связаны условиями синхронизма

$$\Omega=\omega_1\pm\omega_2,\quad K=k_1\pm k_2 \tag{2.5}$$

и удовлетворяют дисперсионным соотношениям

$$\Omega=c_lK,\qquad \omega_j=c_tk_j\left[\frac{1+\frac{(\gamma+\varepsilon)k_j^2}{4\rho c_t^2}}{1+\frac{Jk_j^2}{2\rho}}\right]^{1/2},\quad (j=1,2) \tag{2.6}$$

Рассмотрим случай, когда высокочастотной является продольная волна (то есть $\Omega=\omega_1+\omega_2$) — только она в данной системе может быть распадной.

Укороченные уравнения для определения комплексных амплитуд взаимодействующих волн имеют вид:

$$A_{,t}+c_l A_{,x}=-\frac{\Gamma B_1 B_2}{\Omega}\exp(i\Theta),\quad B_{1,t}+\frac{d\omega_1}{dk_1}B_{1,x}=\frac{\Gamma A B_2^*}{G_1\omega_1}\exp(-i\Theta)$$

$$B_{2,t}+\frac{d\omega_2}{dk_2}B_{2,x}=\frac{\Gamma A B_1^*}{G_2\omega_2}\exp(-i\Theta) \tag{2.7}$$

где $\Gamma=-\dfrac{k_1 k_2 K}{2}g_2,\quad G_j=1+\dfrac{J}{2\rho}k_j^2,\quad \Theta=\Theta_1^{(0)}-\Theta_2^{(0)}-\varphi^{(0)}$

Система (2.7) обладает интегралом движения, имеющим смысл закона сохранения энергии [1], и для нее выполняются частотно-энергетические соотношения, аналогичные полученным в [4].

В стационарном случае ($\partial/\partial t=0$) при граничных условиях

$$a(0)=a_0,\quad b_1(0)=b_0,\quad b_2(0)=0 \tag{2.8}$$

где $b_{1,2}$, a — действительные амплитуды сдвиговых и продольной волн ($A=ae^{i\varphi}$, $B_{1,2}=b_{1,2}\exp(i\Theta_{1,2})$), решения системы (2.7) имеют вид:

$$a(x)=a_0 sn\xi,\quad b_1(x)=\left(\frac{c_l\Omega}{G_1\omega_1\frac{d\omega_1}{dk_1}}\right)^{1/2}\frac{a_0}{s}\,dn\xi$$

$$b_2(x)=\left(\frac{c_l\Omega}{G_2\omega_2\frac{d\omega_2}{dk_2}}\right)^{1/2}a_0 cn\xi,\quad \varphi-\Theta_1-\Theta_2=-\frac{\pi}{2}=\text{const}$$

$$\xi=K+\frac{a_0\Gamma x}{s\left(G_1G_2\frac{d\omega_1}{dk_1}\frac{d\omega_2}{dk_2}\omega_1\omega_2\right)^{1/2}} \tag{2.9}$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода;

$s=a_0(c_l\Omega)^{1/2}\Big/\sqrt{G_1\frac{d\omega_1}{dk_1}\omega_1(b_0)^2+c_l\Omega(a_0)^2}$ — модуль эллиптической функции.

Они показывают, что в нелинейной микрополярной среде продольная волна неустойчива относительно низкочастотных сдвиговых возмущений и распадается на две сдвиговые волны. При этом распределение энергии между сдвиговыми волнами описывается следующим выражением:

$$U_{1,2}=\frac{\omega_{1,2}c_l}{\Omega\left(\frac{d\omega_{1,2}}{dk_{1,2}}\right)}U_0 \tag{2.10}$$

Процесс взаимодействия имеет характер пространственных биений.

Некоторые комбинации из линейных микроупругих констант могут быть определены, если удастся измерить максимум амплитуды возбуждаемой волны (ω_2)

$$b_2^{\max}(x)=\frac{c_i\Omega}{G_2\omega_2\frac{d\omega_2}{dk_2}} \tag{2.11}$$

а также характерное расстояние резонансного взаимодействия (полупериод пространственных биений)

$$L=2Ks\left(G_1G_2\frac{d\omega_1}{dk_1}\cdot\frac{d\omega_2}{dk_2}\omega_1\omega_2\right)^{1/2}\Big/\Gamma a_0 \tag{2.12}$$

В заключение заметим, что в модель континуума Коссера, учитывающую квадратичную нелинейность, входят пять (включая J) констант микроупругости второго порядка и пять констант третьего порядка. Поэтому для определения всех этих констант по отдельности необходимо соответствующее количество независимых экспериментальных измерений. Для получения нужного количества таких измерений, кроме рассмотренного эффекта трехволнового взаимодействия, можно использовать эксперименты, основанные на других волновых эффектах, которые имеют место в таких средах (дисперсия сдвиговых волн [5], и поверхностных волн Рэлея [6], особенности поведения волн Лэмба в пластинах из микрополярного материала [7], формирование солитонов [1, 8] и другие).

ON SOME WAVE EFFECTS IN NON-LINEAR ELASTIC MICROPOLAR MEDIA

V. I. EROFEEV, A. I. POTAPOV

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԻԿՐՈԲԵՎԵՌԱՅԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ ՄԻ ՔԱՆԻ ԱԼԻՔԱՅԻՆ ԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Ի. ԵՐՈՖԵԵՎ, Ա. Ի. ՊՈՏԱՊՈՎ

Ուսումնասիրված են միկրոբևեռային միջավայրերում տարբեր տիպի առաձգական ալիքների ոչ գծային ռեզոնանսային փոխազդեցությունները։

Ցույց է տրված, որ ուսումնասիրված երևույթները կարող են հիմք հանդիսանալ միկրոկառուցվածք ունեցող միջավայրերի համար երկրորդ և երրորդ կարգի միկրոառաձգական հաստատունների որոշ կոմբինացիաների որոշման համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ерофеев В. И., Потапов А. И., Солдатов И. Н.* Нелинейные волны в упругих телах с пространственной дисперсией.—Монография.—Горький, Горьк. ун-т, 1986.—224 с. Деп. в ВИНИТИ в 1986, № 5440—В86.

2. *Новацкий В.* Теория упругости.—М.: Мир, 1975. 872 с.
3. Физический энциклопедический словарь.—М.: Сов. энциклопедия, 1984. 944 с.
4. *Ерофеев В. И., Потапов А. И.* Трехчастотные резонансные взаимодействия продольных и изгибных волн в стержне.—Межвуз. сб.: Динамика систем / Горьк. ун-т, 1985, с. 75—84.
5. *Пальмов В. А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости.—ПММ, 1964, т. 28, №3, с. 401—408.
6. *Лялин А. Е., Пирожков А. А., Степанов Р. Д.* О распространении поверхностных волн в среде Коссера.—Акуст. журн., 1982, т. 28, №6, с. 838—840.
7. *Gauthier R. D., Jahsman W. E.* A quest for micropolar elastic constants. Part II. —Arch. Mech., 1981, v. 33, № 5, p. 717—737.
8. *Ерофеев В. И., Потапов А. И., Солдатов И. В.* Солитоны в упругих микрополярных средах. В кн.: Волны и дифракция, т. 2.—М.—Тбилиси: АН СССР, 1985, с. 150—153

Горьковский филиал Института машиноведения
АН СССР

Поступила в редакцию
17.III.1989