

УДК 539.37

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ
 КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, РАБОТАЮЩЕЙ В
 УСЛОВИЯХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

ИШХАНОВ С. И.

Рассматриваются вопросы проектирования прямоугольной слоистой пластинки, слои которой изготовлены из композиционного материала. В качестве критерий оптимальности рассматриваются: максимальное удаление центра области первого (главного) параметрического резонанса, минимум амплитуд установившихся резонансных колебаний.

1. Пусть прямоугольная, шарнирно-опертая по краям пластинка размерами (a, b, h) , слои которой изготовлены из монослоев ортотропного композиционного материала, подвержена действию параметрических усилий $T_{ii}^0 = P_{0i} + P_{1i} \cos \Theta t$ в срединной плоскости.

Предполагается, что ортотропные слои пластинки симметрично расположены относительно срединной плоскости пластинки и для всего пакета пластинки в целом справедлива гипотеза недеформируемых нормалей [1].

Пластинка отнесена к декартовой системе координат (o, x, y, z) так, что плоскость $z=0$ совпадает со срединной плоскостью.

В работе [2] получены следующие формулы для амплитуд установившихся резонансных колебаний и границ главной области параметрического резонанса шарнирно-опертой по краям ортотропной слоистой пластинки:

$$f_{mn}^{(i)} = \left(\frac{\Theta^2 - \Theta_{,mn}^{(i)2}}{3\gamma_{mn}} \right)^{1/2}; \quad \Theta_{,mn}^{(i)} = 2\Omega_{mn} [1 + (-1)^i \mu_{mn}]^{1/2} \quad (1)$$

соответственно для нижней и верхней границ области $(i=1, 2)$.

Формулы (1) являются обобщением известных результатов [3] для однородной изотропной пластинки.

Здесь введены обозначения:

$$\Omega_{mn} = \omega_{mn} \left(1 - \frac{P_{01} P_{2,mn} + P_{02} P_{1,mn}}{P_{1,mn} P_{2,mn}} \right)^{1/2} \quad (2)$$

— частота собственных колебаний пластинки, загруженной по краям усилиями P_{0i} , где $i=1, 2$ — соответственно для краев $x=0, x=a$ и $y=0, y=b$

$$\mu_{mn} = \frac{1}{2} \frac{P_{11}P_{2,mn} + P_{12}P_{1,mn}}{P_{1,mn}P_{2,mn} - P_{01}P_{2,mn} - P_{02}P_{1,mn}} \quad (3)$$

-коэффициент возбуждения

$$\omega_{mn}^2 = \frac{K_{mn}}{m_0}; \quad P_{1,mn} = \frac{K_{mn}}{l_m^2}; \quad P_{2,mn} = \frac{K_{mn}}{\mu_n^2} \quad (4)$$

—соответственно квадрат частоты свободных собственных колебаний, $P_{1,mn}$ —критические значения усилий T_{ii}^0 при их независимом статическом действии

$$K_{mn} = D_{11}l_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})l_m^2\mu_n^2 + D_{22}\mu_n^4, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b}$$

m, n —число полуволи по направлениям OX и OY

$$\gamma_{mn} = \frac{512}{9} \frac{1}{m_0 a^2 b^2} \frac{l_m^2 \mu_n^2}{a_{11}l_m^4 + (a_{66} - 2a_{12})l_m^2\mu_n^2 + a_{22}\mu_n^4} \quad (5)$$

Для коэффициентов a_{ik} имеются формулы:

$$a_{11} = \frac{C_{11}}{\Omega}, \quad a_{22} = \frac{C_{22}}{\Omega}, \quad a_{12} = \frac{C_{12}}{\Omega}, \quad a_{66} = \frac{1}{C_{66}}, \quad \Omega = C_{11}C_{22} - C_{12}^2$$

C_{ik} —жесткости на растяжение (сжатие)

$$C_{ik} = 2 \left[B_{ik}^{j+1} \delta_{j+1} + \sum_{s=1}^j B_{ik}^s (\delta_s - \delta_{s+1}) \right] \quad (6)$$

D_{ik} —жесткости на изгиб

$$D_{ik} = \frac{2}{3} \left[B_{ik}^{j+1} \delta_{j+1}^3 + \sum_{s=1}^j B_{ik}^s (\delta_s^3 - \delta_{s+1}^3) \right] \quad (7)$$

$2j+1$ слойной пластинки

$$m_0 = 2 \left[\rho_{j+1} \delta_{j+1} + \sum_{s=1}^j \rho_s (\delta_s - \delta_{s+1}) \right] \quad (8)$$

δ_s —расстояние s -го слоя от срединной плоскости пластинки, которая является также срединной плоскостью среднего $(j+1)$ -го слоя, ρ_s —плотность материала s -го слоя.

Следует отметить, что через $f_{mn}^{(i)}$ прогибы $W_i(x, y, t)$ пластинки определяются следующим образом:

$$W^{(1)}(x, y, t) = f_{mn}^{(1)} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \cos \frac{\theta t}{2} \quad (9)$$

$$W^{(2)}(x, y, t) = f_{mn}^{(2)} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \sin \frac{\theta t}{2}$$

Пусть каждый s -ый слой пластинки образуется укладкой монослоев ортотропного композиционного материала, уложенных поочередно под углами $\pm \varphi_s$ к оси OX .

Тогда

$$B_{11}^s = B_{11}^0 \cos^4 \varphi_s + 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0) \cos^2 \varphi_s \sin^2 \varphi_s + B_{22}^0 \sin^4 \varphi_s$$

$$B_{22}^s = B_{11}^0 \sin^4 \varphi_s + 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0) \cos^2 \varphi_s \sin^2 \varphi_s + B_{22}^0 \cos^4 \varphi_s$$

$$B_{12}^s = B_{12}^0 + [B_{11}^0 + B_{22}^0 - 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0)] \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s$$

$$B_{66}^s = B_{66}^0 + [B_{12}^0 + B_{22}^0 - 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0)] \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s$$

где B_{ik}^0 — упругие характеристики монослоя, которые выражаются через технические постоянные следующим образом:

$$B_{11}^0 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad B_{22}^0 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad B_{66}^0 = G_{12}, \quad B_{12}^0 = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

в этом случае $m_0 = \rho h$.

Ставятся следующие две задачи проектирования оптимальной пластинки из композиционного материала:

1. Найти структурные параметры пакета пластинки φ_s и $\alpha_s = \frac{h_s}{h}$ ($s = 1, 2, \dots, j+1$) так, что $\min_{(m,a)} \frac{\Omega_{mn}(\bar{x})}{\bar{x}} \rightarrow \max$, где $\bar{x} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{j+1}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j+1}\}$ — вектор управляемых параметров слоистой пластинки из композиционного материала, $0 \leq \varphi_s \leq 90^\circ$, $0 \leq \alpha_s \leq 0,5$ — соответственно угол армирования и относительная толщина s -ого слоя, причем

$$\alpha_{j+1} = 1 - 2 \sum_{s=1}^j \alpha_s$$

что получается из условия постоянства веса пластинки;

2. Для m_n и n_n , при которых достигается низшая частота собственных колебаний, найти φ_s и α_s так, что

$$\max_{x,y,\theta,t} W_{m_n n_n}(x, y, \theta, t) \rightarrow \min_x$$

где $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq t < \infty$, $\Theta_{mn}^{(1)} \leq \Theta \leq \Theta_{mn}^{(2)}$, Θ — частота возбуждающего усилия. Очевидно, что решение первой задачи обеспечивает возможно наибольшее удаление центра области параметрического резонанса.

Решение второй задачи обеспечивает наибольшую жесткость пластинки в области главного параметрического резонанса.

В качестве примера рассматривается прямоугольная пластинка при $P_{01} = P_{02} = 0$, $P_{11} = P$, $P_{12} = 0$, и при различных отношениях сторон пластинки $\lambda = a/b$. Рассматриваются три варианта композиционного материала со следующими характеристиками:

- I. $B_{22}^0 = 0,1 B_{11}^0$, $B_{12}^0 = 0,03 B_{11}^0$, $B_{66}^0 = 0,033 B_{11}^0$;
- II. $B_{22}^0 = 0,025 B_{11}^0$, $B_{12}^0 = 0,0066 B_{11}^0$, $B_{66}^0 = 0,012 B_{11}^0$;
- III. $B_{22}^0 = 0,62 B_{11}^0$, $B_{12}^0 = 0,12 B_{11}^0$, $B_{66}^0 = 0,16 B_{11}^0$.

Результаты расчета слоистых пластинок показывают, что для прямоугольной пластинки, сжатой усилием

$$T_{11}^0 = P \cos \theta t$$

оптимальные проекты достигаются для однослойных пластинок, то есть изменение угла армирования θ к толщине не улучшает проект.

Отметим, что в рассмотренном случае первая (нижняя) частота собственных колебаний достигается при $m_x = n_x = 1$, а наибольшие прогибы установившихся резонансных колебаний достигаются при $x = 0,5 a$, $y = 0,5 b$ и при $\theta = \theta_{*2}$ в зоне главного параметрического резонанса.

Таблица 1

$\lambda = a/b$	I материал		II материал		III материал	
	$\varphi_1^0; \bar{f}_{11}$	$\varphi_2^0; \bar{f}_{11}$	$\varphi_1^0; \bar{f}_{11}$	$\varphi_2^0; \bar{f}_{11}$	$\varphi_1^0; \bar{f}_{11}$	$\varphi_2^0; \bar{f}_{11}$
0,5	1,03 0°; 16,77	0,46 90°; 12,04	1,01 0°; 31, 03	0,32 90°; 19,6	1,12 0°; 7,13	0,95 90°; 6,44
0,75	1,16 35°; 5,38	0,72 90°; 8,13	1,12 35°; 8,18	0,61 90°; 13,73	1,4 40°; 3,25	1,2 90°; 3,91
1,00	1,48 45°; 2,7	1,14 0°; 90°; 6,39	1,43 45°; 2,79	1,04 0°; 90°; 11,08	1,8 45°; 2,25	1,58 0°; 90°; 2,92
1,25	1,9 50°; 2,7	1,24 0°; 4,91	1,84 50°; 3,62	1,08 0°; 8,35	2,3 50°; 1,9	1,97 0°; 2,33
1,5	2,44 60°; 3,28	1,39 0°; 4,03	2,36 60°; 5,42	1,12 0°; 6,73	2,89 54°; 1,76	2,47 0; 1,99
2,00	4,11 90°; 4,19	1,83 0°; 3,01	4,03 90°; 7,76	1,28 0°; 4,9	4,49 90°; 1,78	3,8 0°; 1,61
3,00	9,1 90°; 3,66	3,29 0°; 2,11	9,03 90°; 6,98	1,9 0°; 3,26	9,46 90°; 1,52	7,69 0°; 1,3

В табл. 1 приведены результаты расчета оптимального угла армирования для первой задачи. Приводится $\omega_1 = \max \bar{\omega}_{11}(\varphi)$, соответствующее оптимальному углу φ_1 и амплитуде установившегося резонансного колебания $\max f_{11}(\varphi_1)$. Для оценки эффекта оптимизации приводится также значение $\omega_2 = \min \bar{\omega}_{11}(\varphi)$, соответствующее углу армирования φ_2 и амплитуде установившихся резонансных колебаний $\bar{f}_{11}(\varphi_2)$. Сравнение наилучших и наихудших проектов показывает существенное преимущество оптимальных проектов в смысле первой задачи.

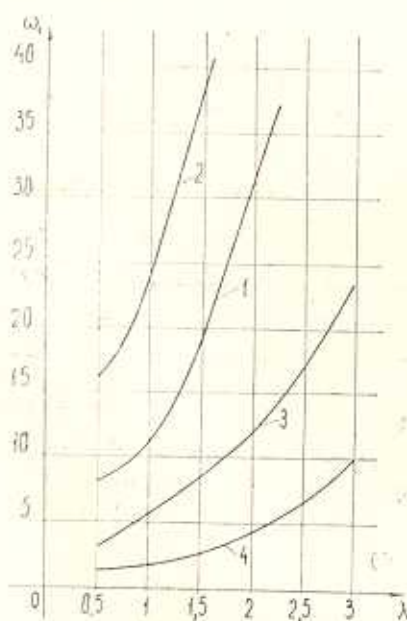
Оптимальный угол армирования φ_1 в зависимости от λ изменяется от 0° до 90°, причем при $\lambda = 1$, $\varphi_{opt} = 45^\circ$.

В табл. 2 приводятся проекты оптимальных пластинок по критерию минимума наибольших амплитуд установившихся резонансных колебаний.

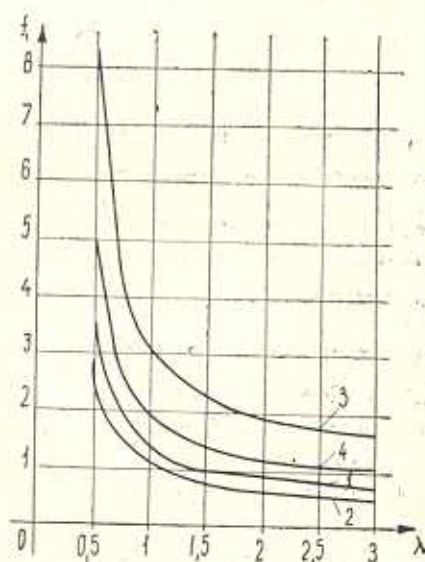
Таблица 2

$\lambda = a/b$	I материал		II материал		III материал	
	f_1 φ_1^{opt}	f_2 φ_2^{opt}	f_1 φ_1^{opt}	f_2 φ_2^{opt}	f_1 φ_1^{opt}	f_2 φ_2^{opt}
0,5	6,84 65°; 0,65	16,77 0°; 1,03	7,08 65°; 0,57	31,03 0°; 1,01	5,86 65°; 1,01	7,13 0°; 1,12
0,75	3,78 55°; 1,07	9,26 0°; 1,07	3,95 55°; 1,02	16,5 0°; 1,02	3,18 50°; 1,38	4,03 0°; 1,3
1,00	2,7 45°; 1,48	6,39 0°; 90°; 1,14	2,79 45°; 1,43	11,08 0°; 90°; 1,04	2,25 45°; 1,8	2,92 0°; 90°; 1,58
1,25	2,23 40°; 2,23	5,43 90°; 1,69	2,32 40°; 1,77	9,62 90°; 1,6	1,86 40°; 2,28	2,41 90°; 2,11
1,5	1,97 35°; 2,15	4,85 90°; 2,36	2,04 35°; 2,04	8,73 90°; 2,29	1,67 35°; 2,8	2,11 90°; 2,77
2,00	1,71 25°; 2,59	4,19 90°; 4,11	1,77 25°; 2,29	7,76 90°; 4,03	1,47 25°; 4,03	1,78 90°; 4,49
3,00	1,46 20°; 4,08	3,66 90°; 9,1	1,51 20°; 3,15	6,98 90°; 9,03	1,27 15°; 7,74	1,52 90°; 9,46

Наряду с $f_1 = \min_{\varphi} \bar{f}_{11}(\varphi)$ приводятся также и $\bar{f}_2 = \max_{\varphi} \bar{f}_{11}(\varphi)$, соответствующие углам армирования φ_1 , φ_2 и частоте собственных колебаний $\omega_{11}(\varphi_1)$ и $\omega_{11}(\varphi_2)$. Как и в предыдущем случае, существенный выигрыш от оптимизации очевиден и амплитуды установившихся колебания можно существенно уменьшить. Оптимальный угол армиро-



Фиг. 1



Фиг. 2

вания φ_1 в рассмотренном диапазоне изменений λ меняется от 65° до 20° , причем при $\lambda = 1$, $\varphi_{opt} = 45^\circ$, что указывает на то, что при $\lambda = 1$ угол $\varphi = 45^\circ$ является оптимальным для обеих рассмотренных задач.

Отметим, что в табл. 1 и 2 приведены безразмерные параметры:

$$\bar{\omega}_{11} = \frac{2a^2}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{3\rho_0}{B_{11}^0}} \omega_{11}, \quad \bar{f}_{11} = \frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{128 B_{11}^0 h}{3\rho}} f_{11}$$

Для иллюстрации преимуществ композиционных материалов по сравнению с металлом на фиг. 1 и 2 приводятся зависимости $\max \omega_1$, $\min f_1$ от λ : для рассмотренных трех вариантов материала кривые 1-3 и для стали кривая 4.

Здесь $\omega_1 = \beta \bar{\omega}_{11}$, $f_1 = \alpha \bar{f}_{11}$, где $\alpha = \sqrt{\frac{B^0}{B_{11}^0 \rho_0}}$, $\beta = \sqrt{\frac{B_{11}^0 \rho_0^3}{B^0 \rho^3}}$
 $B^0 = \frac{E}{(1-\nu^2)}$, ρ_0 - характеристика металла, причем в случае стали получается: $\alpha_1 = 0,524$, $\alpha_2 = 0,406$, $\alpha_3 = 1,414$, $\beta_1 = 7,63$, $\beta_2 = 16,43$, $\beta_3 = 2,52$ соответственно для первого, второго и третьего материалов. Таким образом, на фиг. 1, 2 приведены характеристики пластинок одного веса и одинаково обезразмеренных.

Из фиг. 1 видно, что все рассмотренные варианты композиционных материалов имеют существенное преимущество по сравнению со сталью в смысле достижения резонансных колебаний при возможно больших частотах. Амплитуды установившихся резонансных колебаний для пластинок из композиционных материалов первого и второго варианта существенно меньше, чем для пластинки из стали одинакового веса.

THE PROJECT OF OPTIMAL PLATE OF COMPOSITE MATERIAL, WORKING IN CONDITIONS OF PARAMETRIC RESONANCE

S. I. ISHKHANOV

ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՌԵԶՈՆԱՆՍԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ԱՆԵԱՏՈՂ ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ
ՆՅՈՒԹՅՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱՅԻ ՕՓՏԻՄԱԼ ՍԱԽԻ ԿԱՆԱԳՄՈՒՄԸ

Ս. Ի. ԻՏԽԱՆՈՎ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Քիսաժոր պարամետրական ռեզոնանսի տիրույթի կենտրոնի մաքսիմալ հեռացման և հաստատված ռեզոնանսային աստանոսմների ամպլիտուդների մինիմումի հաշտանիշներով բերված են կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված սպտիմալ սալի նախագծման խնդիրների զրգամքները: Ուղղանկյուն սալի կողմերի տարրեր հարաբերությունների համար որոշված են օրթաարոպ կոմպոզիցիոն նյութի տարրական շերտերի դարապորման սպտիմալ անկյունները և ցույց է տրված սալի շահագործման բնութագրիչների էական մեծացման հնարավորությունը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек.—М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
2. Гурьян В. Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек.—Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 1960, т. 13, № 1, с. 47—58.
3. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем.—М.-Л.: ГИТТЛ, 1956. 600 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
13.III.1989