

УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК

ГЛУШИ В. И.

В работе приводится анализ амплитудно-частотных зависимостей гибких пластинок и оболочек. Рассматриваются прямоугольные в плане ($a \times b$) гибкие оболочки двойной кривизны k_1, k_2 , толщиной h , изготовленные из изотропного материала с характеристиками упругости E, ν и плотностью ρ .

Пусть оболочка отнесена к ортогональной криволинейной системе координат $Oxyz$ так, что координатная поверхность $z=0$ совпадает со срединной поверхностью оболочки и координатные линии ($y=\text{const}, z=0$) и ($x=\text{const}, z=0$) совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности.

В случае шарнирно опертой по контуру и свободной от внешних нагрузок оболочки, пренебрежением влияния друг на друга различных гармоник в представлении для прогиба оболочки

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1)$$

для определения $w_{mn}(t)$ получается нелинейное дифференциальное уравнение [1-3]

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + \omega_{0mn}^2 w_{mn} - \gamma_{mn} w_{mn}^3 + \beta_{mn} w_{mn}^5 = 0 \quad (2)$$

Здесь введены обозначения: $i = a/b$,

$$\omega_{0mn} = \frac{\pi^2 h}{2a^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)} \left[(m^2 + i^2 n^2)^2 + \frac{12(1-\nu^2)a^4}{\pi^4 h^2} \frac{(k_2 m^2 + k_1 i^2 n^2)^2}{(m^2 + i^2 n^2)^2} \right]}$$

— частота собственных линейных колебаний,

$$\gamma_{mn} = \frac{16Ei^2}{\rho a^2} \frac{mn(k_2 m^2 + i^2 k_1 n^2)}{(m^2 + i^2 n^2)^2}, \quad \beta_{mn} = \frac{512Ei^4}{9\rho a^4} \frac{m^2 n^2}{(m^2 + i^2 n^2)^3}$$

Следует отметить, что предпоследний нелинейный член в уравнении (2) обусловлен кривизной оболочки и показывает неоднаковость сопротивления оболочки к возмущениям (прогибам, сравнимых с толщиной), приложенных к оболочке со стороны вогнутости и выпуклости [2].

В случае пластинки ($k_1 = k_2 = 0$) из (2) в первом приближении

$$\omega_{mn}(t) = f_{mn} \cos \omega_{mn} t \quad (3)$$

получается следующая зависимость частоты собственных нелинейных колебаний ω_{mn} от амплитуды колебания f_{mn} :

$$\omega_{mn} = \sqrt{\omega_{0mn}^2 + \frac{3}{4} \beta_{mn} f_{mn}^2} \quad (4)$$

где

$$\omega_{0mn} = \frac{\pi^2 h}{2a^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}} (m^2 + \nu^2 n^2)$$

— частота собственных линейных колебаний пластинки. Из (4) для квадратной в плане ($\lambda = 1$) пластинки при $\nu = 0,3$ получается

$$\omega_{mn} = \omega_{0mn} \sqrt{1 + 4,78 \frac{m^2 n^2}{(m^2 + n^2)^2} \left(\frac{f_{mn}}{h}\right)^2}$$

и нетрудно показать, что ω_{mn} принимает свое наименьшее значение при $m = n = 1$.

В случае оболочек, в первом приближении решение уравнения (2) представляется в виде

$$\omega_{mn}(t) = f_{0mn} + f_{1mn} \cos \omega_{mn} t \quad (5)$$

и для определения частот собственных нелинейных колебаний оболочки получается формула

$$\omega_{mn}^2 = \omega_{0mn}^2 - 2\alpha_{mn} f_{0mn} + 3\beta_{mn} f_{0mn}^2 + \frac{3}{4} \beta_{mn} f_{1mn}^2 \quad (6)$$

где f_{0mn} определяется из кубического уравнения

$$f_{0mn}^3 - \frac{\alpha_{mn}}{\beta_{mn}} f_{0mn}^2 + \left(\frac{\omega_{0mn}^2}{\beta_{mn}} + \frac{3}{2} f_{1mn}^2 \right) f_{0mn} - \frac{\alpha_{mn}}{2\beta_{mn}} f_{1mn}^2 = 0 \quad (7)$$

для каждой пары m, n и f_{1mn} .

В случае оболочек, в отличие от случая пластинок, когда учет влияния амплитуд колебаний приводит к увеличению значений собственных частот, возможно также уменьшение частот собственных нелинейных колебаний.

Для численного анализа характера амплитудно-частотных зависимостей рассмотрим квадратную в плане ($\lambda = 1$) цилиндрическую оболочку радиуса R . В этом случае из (6) и (7) получаются соответственно

$$\bar{\omega} = (a_1 - a_4 \bar{x} + a_5 \bar{x}^2 + 0,25 a_5 \bar{y}^2)^{1/2} \quad (8)$$

$$\bar{x}^3 - a_1 \bar{x}^2 + (a_2 + 1,5 \bar{y}^2) \bar{x} - 0,5 a_1 \bar{y}^2 = 0 \quad (9)$$

где введены обозначения

$$\bar{\omega}(m, n) = \frac{2a^2}{\pi^2 h} \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)^2}{E} \omega_{m,n}}, \quad \bar{x} = \frac{f_{0mn}}{h}, \quad \bar{y} = \frac{f_{1mn}}{h}$$

$$a_1 = \frac{9km}{32n}, \quad a_2 = \frac{3\pi^4}{2048(1-\nu^2)} \left[\frac{(m^2+n^2)^4}{m^2 n^2} + \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} k^2 \frac{m^2}{n^2} \right]$$

$$a_3 = (m^2+n^2)^2 + \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} k^2 \frac{m^4}{(m^2+n^2)^2}$$

$$a_4 = \frac{384(1-\nu^2)}{\pi^4} \frac{m^3 n}{(m^2+n^2)^2}, \quad a_5 = \frac{2048(1-\nu^2)}{\pi^4} \frac{m^2 n^2}{(m^2+n^2)^2}$$

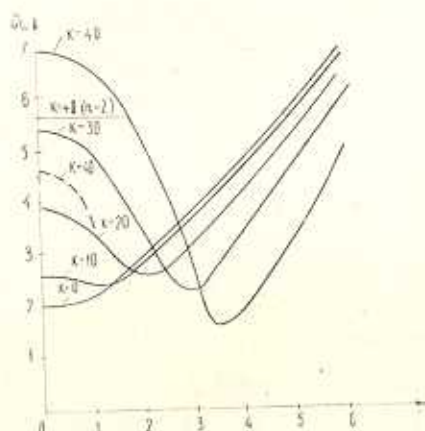
$k = a^2/Rh$ — параметр кривизны оболочки.

Ставится задача нахождения

$$\bar{\omega}_* = \inf_{(m,n)} \bar{\omega}(m, n), \quad (m, n \in N)$$

то есть первую (наименьшую по m, n) частоту собственных нелинейных колебаний.

На фиг. 1 при $\nu=0,3$ приведены графики зависимостей $\bar{\omega}_*$ от \bar{y} для различных значений параметра кривизны k . Как видно, частоты собственных нелинейных колебаний пластинки возрастают с



Фиг. 1

увеличением амплитуды возмущения нелинейных колебаний. С увеличением кривизны k и амплитуд возмущений \bar{y} наблюдается уменьшение частот колебаний $\bar{\omega}_*$ до некоторого значения $\bar{\omega}_*^0$. При дальнейшем увеличении амплитуд частоты нелинейных колебаний возрастают. В табл. 1 приведены наименьшие значения $\bar{\omega}_*$ в зависимости от параметра кривизны k и соответствующие \bar{y}_* .

Таблица 1

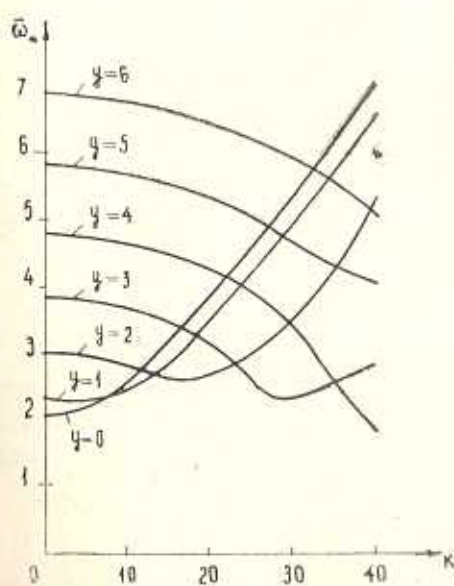
$k \backslash y$	0	10	20	30	40
$\bar{\omega}_0$	2.1	2.4	2.5	2.3	1.6
y_*	0.0	1.0	2.0	3.0	3.5

Следует отметить, что при $k=40$ и $0 \leq y \leq 1,0$ уравнение (9) допускает три действительных корня для \bar{x} . В табл. 2 приведены значения \bar{x}_i , соответствующие $\bar{\omega}_{*i}$.

Таблица 2

$y \backslash \bar{x}_i \bar{\omega}_{*i}$	\bar{x}_1	$\bar{\omega}_{*1}$	\bar{x}_2	$\bar{\omega}_{*2}$	\bar{x}_3	$\bar{\omega}_{*3}$
0.0	0	6.99	4.62	3.85 /	6.63	4.61
0.5	0.05	6.89	4.66	3.77 /	6.55	4.39
1.0	0.11	6.59	4.80	3.39 /	6.26	3.60

Частоты колебаний при $\bar{x} = \bar{x}_2$ минимые, то есть соответствующие нелинейные колебания неустойчивы. Здесь возможны нелинейные колебания с частотами $\bar{\omega}_{*1}$ и $\bar{\omega}_{*3}$, причем $\bar{\omega}_{*2} < \bar{\omega}_{*1}$. На фиг. 1 пунктирными линиями обозначены $\bar{\omega}_{*1}$.



Фиг. 2

Следует отметить, что кроме случаев $k=40$ и $0 \leq y \leq 1,5$ первые частоты собственных нелинейных колебаний, в рассматриваемых пре-

делах изменения k и \bar{y} , достигают при $m=n=1$. В случае же $k=40$ и $0 \leq \bar{y} \leq 1,5$, $\bar{\omega}_*$ достигаются при $m=1, n=2$. В этом случае частоты собственных колебаний слабо зависят от \bar{y} и $\bar{\omega}_* \approx 5,6$ (на фиг. 1 — тонкая линия), что больше соответствующих $\bar{\omega}_{*1}$.

На фиг. 2 приведены графики зависимостей $\bar{\omega}_*$ от параметра кривизны оболочки k для различных \bar{y} . В отличие от частот собственных линейных колебаний ω_0 , значения частот собственных нелинейных колебаний могут уменьшаться с увеличением кривизны средней поверхности оболочки.

SELF-VIBRATION OF FLEXIBLE SHELLS

V. TS. GNUNY

ՀԱՌՈՒՆ ԹԱԳԱՆՔՆԵՐԻ ՍԵՓԱՆԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Վ. Յ. ԳՆՈՒՆՅ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ. Ա

Աշխատանքում ուսումնասիրված են ճկուն թաղանթների սեփական ու զծային տատանումների հարցերը: Հողակապրեն ամրացված եզրերով կրկնա- կի կորույթյան ճկուն թաղանթի համար ստացված են ամպլիտուդա—հաճա- խականություն կապերը և բերված է նրանց ուսումնասիրությունը՝ կախված թաղանթի կորույթյան բնութագրիչի մեծությունից:

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем.—М.: ГИИТЛ, 1956. 600 с.
2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек.—М.: Наука, 1972. 432 с.
3. Ониксвили О. Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек.: Изд. АН СССР, 1957.—196 с.

Институт механики
АН Армянской ССР.

Поступила в редакцию
19.XII.1988