ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, №3, 1990 Механика

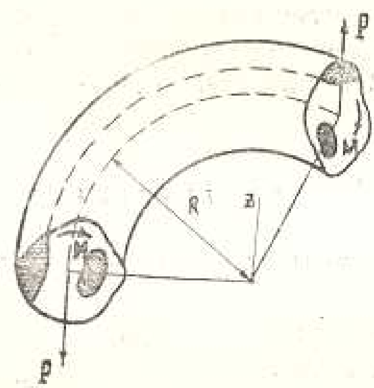
УДК 539.376

# НЕЛИНЕЙНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ МНОГОСЛОЙНОГО СЕКТОРА КРУГОВОГО КОЛЬЦА ПРИ КРУЧЕНИИ

ПОЛАДЯН Ф. М.

Рассматривается задача о кручении составного сектора кругового кольца (кривой стержень), поперечное сечение которого состоит из $N$ различных областей $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$, материалы которых обладают свойством нелинейной наследственной ползучести [1], с различными мерами ползучести и модуля мгновенного сдвига.

Пусть рассматриваемый сектор кругового кольца с постоянным поперечным сечением находится под воздействием перерезывающих сил и крутящих моментов $PR$ ($R$ — радиус сектора кольца), приложенных на торцевых сечениях (фиг. 1). Подобное напряженное состояние возникает в пружине с малым шагом при ее центральном сжатии. Такая задача в постановке теории упругости рассматривалась в работах [2—6]. Аналогичная задача за пределом упругости для неупрочняющегося материала исследована в [7—8]. Пластическое кручение однородных кривых стержней исследовано в работе [9]. Кручение однородных кривых стержней при нелинейной ползучести исследовано в [10—11]. Кручение составного сектора кругового кольца с круговым поперечным сечением при ползучести рассмотрено в [12—13].

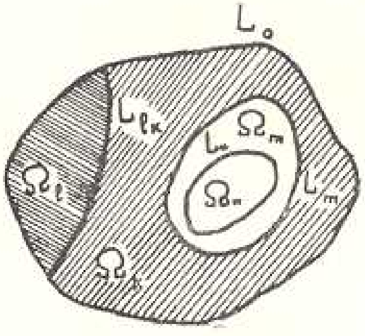



Фиг. 1

*§ 1. Основные уравнения задачи.* Обозначим через $L_0$ внешний контур области всего поперечного сечения сектора кругового кольца,

через $L_m$ контур области $\Omega_m$, а через $L_{lk}$ — линию раздела смежных областей $\Omega_l$ и $\Omega_k$ (фиг. 2).

Принимаем, что в области $\Omega_m$ между компонентами деформаций ползучести и напряжениями имеют место соотношения Н. Х. Арутюняна [1]:




Фиг. 2

$$2G_m\varepsilon_{ij}^{(m)} = s_{ij}^{(m)} - \int_{\tau_1}^{t} s_{ij}^{(m)} f_m[\sigma_0^{(m)}(\tau)] K_m(t, \tau)d\tau, \quad (m=1, 2,\ldots, N) \qquad (1.1)$$

где $G_m = E_m/3$, $E_m$ принимается постоянным, $s_{ij}^{(m)} = \sigma_{ij}^{(m)} - \delta_{ij}\sigma^{(m)}$, $\delta_{ij}$ — символ Кронекера, $\sigma^{(m)}$ — среднее давление, $f_m[\sigma_0^{(m)}(t)]$ — функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести, $\sigma_0^{(m)}(t)$ — интенсивность тензора напряжений в области $\Omega_m$. $K_m(t, \tau) = 3G_m \dfrac{\partial C_m(t, \tau)}{\partial\tau}$; здесь $G_m$ — модуль сдвига, а $C_m(t, \tau)$ — мера ползучести в области $\Omega_m$.

Для компонентов деформаций в цилиндрических координатах будем иметь [14].

$$\varepsilon_r^{(m)} = \frac{\partial u^{(m)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_\vartheta^{(m)} = \frac{u^{(m)}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial\vartheta}$$

$$2\varepsilon_{r\vartheta}^{(m)} = \frac{\partial v^{(m)}}{\partial r} - \frac{v^{(m)}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^{(m)}}{\partial\vartheta}, \quad \varepsilon_z^{(m)} = \frac{\partial w^{(m)}}{\partial z}$$

$$2\varepsilon_{z\vartheta}^{(m)} = \frac{\partial v^{(m)}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w^{(m)}}{\partial\vartheta}, \quad 2\varepsilon_{rz}^{(m)} = \frac{\partial u^{(m)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(m)}}{\partial r} \qquad (1.2)$$

$$(m=1, 2,\ldots, N).$$

Из (1.2) перемещения представим в виде

$$u^{(m)} = u_0^{(m)} + \int \left[2r\varepsilon_{r\vartheta}^{(m)} - r\frac{\partial v^{(m)}}{\partial r} + v^{(m)}\right] d\vartheta, \quad v^{(m)} = v_0^{(m)} + \int [2\varepsilon_\vartheta^{(m)} r - u^{(m)}] d\vartheta$$

$$w^{(m)} = w_0^{(m)} + \int \left[2r\varepsilon_{z\vartheta}^{(m)} - r\frac{\partial v^{(m)}}{\partial z}\right] d\vartheta, \quad (m=1, 2\ldots N) \qquad (1.3)$$

где $u_0^{(m)}$, $v_0^{(m)}$, $w_0^{(m)}$ —произвольные функции от $r$, $z$ и $t$.

Примем, аналогично задаче кручения однородных кривых стержней, что все компоненты напряжения, за исключением $\sigma_{r\theta}^{(m)}$, $\sigma_{z\theta}^{(m)}$, равны нулю. Тогда из уравнений равновесия [14] остается

$$\frac{\partial}{\partial r}[r^2\sigma_{r\theta}^{(m)}]+\frac{\partial}{\partial z}[r^2\sigma_{z\theta}^{(m)}]=0 \qquad (m=1,2 \ldots N) \tag{1.4}$$

а из остальных следует, что напряженное состояние сектора кольца не зависит от $\theta$, следовательно, тензор деформации также не зависит от $\theta$.

Подставляя (1.3) в (1.2) и учитывая указанное обстоятельство, будем иметь

$$\varepsilon_r^{(m)}=\frac{\partial u_0^{(m)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_z^{(m)}=\frac{\partial w_0^{(m)}}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz}^{(m)}=\frac{\partial u_0^{(m)}}{\partial z}+\frac{\partial w_0^{(m)}}{\partial r}, \quad (m=1,2,\ldots,N) \tag{1.5}$$

и

$$2\varepsilon_{r\theta}^{(m)}=\frac{\partial v_0^{(m)}}{\partial r}-\frac{v_0^{(m)}}{r}, \quad 2\varepsilon_{z\theta}^{(m)}=\frac{\partial v_0^{(m)}}{\partial z}-\frac{D(t)}{r}, \quad (m=1,2,\ldots,N) \tag{1.6}$$

где $D(t)$—произвольная функция от $t$.

Из соотношения (1.6) исключая $v_0^{(m)}$, получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\varepsilon_{z\theta}^{(m)}}{r}\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\varepsilon_{r\theta}^{(m)}}{r}\right]=\frac{D(t)}{r^3} \quad (m=1,2,\ldots N) \tag{1.7}$$

Полагая в (1.5) равными нулю все компоненты деформации, получим систему относительно $u_0^{(m)}$, $w_0^{(m)}$. Решая эту систему и пользуясь (1.3), для перемещения получим

$$u^{(m)}=a(t)z\sin\theta, \quad v^{(m)}=v_0^{(m)}+a(t)z\cos\theta, \quad w^{(m)}=-D(t)\theta-a(t)r\sin\theta$$

где $a(t)$—произвольная функция от $t$, которая определяется из условия закрепления сектора кольца.

В каждой области $\Omega_m$, вводя функцию напряжений $\Phi_m(r, z, t)$

$$\sigma_{r\theta}^{(m)}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi_m}{\partial z}, \quad \sigma_{z\theta}^{(m)}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi_m}{\partial r}, \quad (m=1,2,\ldots, N) \tag{1.8}$$

при помощи соотношения (1.1) и уравнения (1.7) получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi_m}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi_m}{\partial z}\right)-\int_{\tau_1}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{f_m(\sigma_0^{(m)})}{r^3}\frac{\partial\Phi_m}{\partial r}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{f_m(\sigma_0^{(m)})}{r^3}\frac{\partial\Phi_m}{\partial z}\right]\right\}K_m(t,\tau)d\tau=-\frac{D(t)G_m}{r^3}, \quad (m=1,2,\ldots,N) \tag{1.9}$$

где

$$\sigma_0^{(m)}=\sigma_0^{(m)}(t)=r^{-2}\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi_m}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_m}{\partial z}\right)^2}, \quad (m=1,2,\ldots, N) \tag{1.10}$$

Пользуясь тем, что боковая поверхность сектора кольца свободна от внешних сил, получим

$$\Phi(r, z, t)=C_0^*(t) \quad \text{на } L_0 \tag{1.11}$$

где $C_0^*(t)$ – произвольная функция, зависящая от $t$.

Из условия равновесия бесконечно малого элемента, находящегося в окрестности линии раздела $L_{lk}$ смежных областей $\Omega_l$ и $\Omega_k$, получим

$$\Phi_l(r, z, t)=\Phi_k(r, z, t)+C_{lk}^* \quad \text{на } L_{lk} \tag{1.12}$$

где $C_{lk}^*=C_{lk}^*(t)$ — произвольная функция от $t$.

Не нарушая общности, произвольные функции $C_0^*(t)$ и $C_{lk}^*(t)$ можно принять равными нулю.

Приближаясь к линии раздела $L_{lk}$ со стороны области $\Omega_l$ и $\Omega_k$, пользуясь (1.1)—(1.3), (1.8) и принимая во внимание непрерывность перемещения $w^{(m)}$, находим условия, которым должны удовлетворять нормальные производные функции напряжений $\Phi(r, z, t)$ на линиях раздела $L_{lk}$:

$$\frac{1}{G_l}\frac{\partial\Phi_l}{\partial n}-3\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial\Phi_l}{\partial n}f_l[\tau_0^{(l)}(\tau)]\frac{\partial C_l(t, \tau)}{\partial\tau}d\tau=$$

$$=\frac{1}{G_k}\frac{\partial\Phi_k}{\partial n}-3\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial\Phi_k}{\partial n}f_k[\tau_0^{(k)}(\tau)]\frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial\tau}d\tau \tag{1.13}$$

где $n$—нормаль к $L_{lk}$.

Крутящий момент выражается формулой

$$M=\sum_{j=1}^{N}\iint_{\Omega_j}[(r-R)\tau_{z\theta}^{(j)}-z\tau_{r\theta}^{(j)}]d\Omega \tag{1.14}$$

Подставляя (1.8) в (1.14), принимая формулу Грина-Остроградского и учитывая $C_0^*(t)=0$, получим

$$M=2R\sum_{j=1}^{N}\iint_{\Omega_j}\frac{\Phi_j}{r^3}d\Omega \tag{1.15}$$

§ 2. Пусть $L_*$ —замкнутая кривая, целиком лежащая в одной из областей $\Omega_m$ ($m=1, 2, \ldots N$) поперечного сечения скручиваемого сектора кольца. Область, ограниченную этим контуром, обозначим $\Omega_*$ (фиг. 2). Интегрируя обе части уравнения (1.9) в области $\Omega_*$ и переходя к контурному интегралу, получим

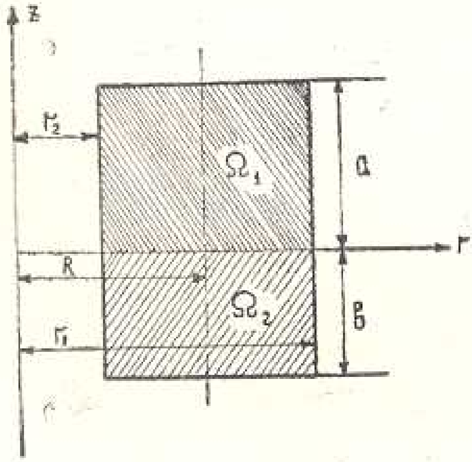
$$\int_{L_*}\frac{1}{r^3}\left\{\frac{\partial\Phi_m}{\partial n}-\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial\Phi_m}{\partial n}f_m[\tau_0^{(m)}(\tau)]K_m(t, \tau)d\tau\right\}ds=$$

$$= \frac{D(t)G_m}{2} \int\limits_{L_*} \frac{dz}{r^2} \tag{2.1}$$

где $n$ — направление внешней нормали к контуру $L_*$, а $s$ — дуга этого контура. Интегральное уравнение (2.1) обобщает теорему Бредта о циркуляции касательных напряжений при кручении составного сектора кругового кольца при нелинейной ползучести.

Справедливость формулы (2.1) можно доказать [15] и в случае, когда контур $L_*$ проходит через несколько областей $\Omega_m (m = 1, 2, \ldots, s \leqslant N)$, пересекая их линии раздела $L_{jk}$.

§ 3. *Прямоугольное сечение.* Рассмотрим случай, когда поперечное сечение состоит из двух прямоугольных областей (фиг. 3). Пусть в




Фиг 3

области $\Omega_1$ материал обладает свойством нелинейной ползучести, а в области $\Omega_2$ справедлив закон Гука. На основе вышеизложенного функция $\Phi_1(r, z, t)$ в области $\Omega_1$ удовлетворяет уравнению (1.9), а функция $\Phi_2(r, z, t)$ в области $\Omega_2$ — уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right) = -\frac{D(t)G_2}{r^3} \tag{3.1}$$

Имеем следующие контурные условия (1.11) и условия на линии контакта (1.12), (1.13):

$$\Phi_i(r_1, z, t) = \Phi_i(r_2, z, t) = \Phi_1(r, -b, t) =$$
$$= \Phi_2(r, a, t) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad \Phi_1(r, 0, t) = \Phi_2(r, 0, t) \tag{3.2}$$

$$\frac{G_1}{G_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} f_1[\sigma_0^{(1)}(\tau)] K_1(t, \tau) d\tau \quad \text{при} \quad z = 0$$

Полагаем, что $f_1[\sigma_0^{(1)}(t)]$ содержит физический параметр $\lambda$, нулевое значение которого соответствует линейной ползучести, то есть $f_1[\sigma_0^{(1)}(t)]=1$ при $\lambda=0$.

Положим

$$f_1[\sigma_0^{(1)}(t)]=1+\lambda[\sigma_0^{(1)}(t)]^2 \tag{3.3}$$

Решение уравнений (1.9) и (3.1) ищем в виде

$$\Phi_i(r, z, t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\Phi_{in}(r, z, t), \quad (i=1, 2) \tag{3.4}$$

где $\Phi_{10}(r, z, t)$ соответствует области линейно-упругого материала. Подставляя (3.4) в (1.9) и (1.10), приходим к системе рекуррентных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2\Phi_{1n}}{\partial r^2}-\frac{3}{r}\frac{\partial\Phi_{1n}}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi_{1n}}{\partial z^2}=-Q_n(r, z, t), \quad (n=0, 1, \ldots) \tag{3.5}$$

здесь

$$Q_0(t)=G_1\left[D(t)+\int_{\tau_1}^{t}D(\tau)R_1(t, \tau)d\tau\right]$$

$$Q_n(r, z, t)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\tau_1}^{t}N_1(t, \tau)[\mathrm{grad}\Phi_{1k}\mathrm{grad}\Phi_{1,n-1-k}-\omega_k Q_{n-1-k}]d\tau \quad (n=1, 2, \ldots) \tag{3.6}$$

$$N_1(t, \tau)=K_1(t, \tau)+\int_{\tau}^{t}R_1(t, \xi)K_1(\xi, \tau)d\xi, \quad \omega_n=r^{-4}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{grad}\Phi_{1k}\mathrm{grad}\Phi_{1,n-k},$$

$R_1(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_1(t_1, \tau)$. Для меры ползучести

$$C_1(t, \tau)=\varphi_1(\tau)[1-\exp(-\gamma_1(t-\tau))]$$

имеем

$$R_1(t, \tau)=\gamma_1-\eta_1(\tau)+[\eta_1'(\tau)+\eta_1''(\tau)-\gamma_1\eta_1(\tau)]\exp(\eta_1(\tau))\int_{\tau}^{t}\exp(-\eta_1(x))dx$$

где

$$\eta_1(t)=\gamma_1\int_{\tau_1}^{t}[1+3G_1\varphi_1(\tau)]d\tau, \quad \varphi_1(\tau)=C_{0,1}+\frac{A_{11}}{\tau}$$

здесь $\gamma_1$, $C_{0,1}$, $A_{11}$ — постоянные, характеризующие свойства ползучести материала.

Функции $\Phi_{in}(r, z, t)$ представим в виде рядов [15, 16]

$$\Phi_{in}(r, z, t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}^{n}(z, t)W_2(\mu_k r), \quad (i=1,2) \tag{3.7}$$

Здесь

$$W_n(\mu_k r) = \frac{J_n(\mu_k r)}{J_2(\mu_k r_2)} - \frac{Y_n(\mu_k r)}{Y_2(\mu_k r_2)} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

где $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ — функции Бесселя от действительного аргумента $n$-го порядка соответственно первого и второго рода, а $\{\mu_k\}$ — корни уравнения $W_2(\mu r_1) = 0$.

Для функции $W_n(\mu_k r)$ справедливы следующие формулы:

$$\int_{r_1}^{r_2} r W_1(\mu_k r) W_1(\mu_p r) dr = \frac{\mu_k}{\mu_p} \int_{r_1}^{r_2} r W_2(\mu_k r) W_2(\mu_p r) dr = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p \neq k \\ \omega_k^* & \text{при} \quad p = k \end{cases}$$

где

$$\omega_k^* = 0.5\{[r_2 W_1(\mu_k r_2)]^2 - [r_1 W_1(\mu_k r_1)]^2\}$$

Функции $W_i(x)$ удовлетворяются теми же рекуррентными формулами, что и функции $J_n(x)$, $Y_n(x)$.

Пользуясь (3.2) и (3.7), получим граничные условия для функции $a_{ik}^n(z, t)$:

$$a_{1k}^n(-b, t) = a_{2k}^n(a, t) = 0, \quad a_{1k}^n(0, t) = a_{2k}^n(0, t)$$

$$\frac{G_1}{G_2} \frac{\partial a_{2k}^n(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial a_{1k}^n(z, t)}{\partial z} - \int_{\tau_1}^{t} \frac{\partial a_{1k}^n(t, \tau)}{\partial z} K_1(t, \tau) d\tau + \tag{3.8}$$

$$+ F_k^n(z, t) \quad \text{при} \quad z = 0,$$

где

$$F_k^0(z, t) = 0, \text{ а при } n \geqslant 1 \quad F_k^n(z, t) =$$

$$= \frac{1}{\omega_k^*} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{r_1}^{r_2} \left[ \int_{\tau_1}^{t} \omega_j \frac{\partial \Phi_{1, n-1-j}}{\partial z} K_1(t, \tau) d\tau \right] r W_2(\mu_k r) dr$$

Коэффициенты $a_{ik}^n(z, t)$, удовлетворяющие условиям (3.8), определяются следующими формулами:

$$a_{1k}^n(z, t) = \left\{ \frac{C_{1k}^n(z, t)}{\mu_k^2 \operatorname{ch} \mu_k b} + \operatorname{th} \mu_k b \left[ \tilde{h}_k^n(z, t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \nu_k \int_{\tau_1}^{t} \tilde{h}_k^n(z, \tau) R_1(t, \tau) d\tau \right] \right\} \operatorname{ch} \mu_k z + \left[ \tilde{h}_k^n(z, t) + \right.$$

$$\left. + \nu_k \int_{\tau_1}^{t} \tilde{h}_k^n(z, \tau) R_1(t, \tau) d\tau \right] \operatorname{sh} \mu_k z - \frac{C_{1k}^n(z, t)}{\mu_k^2}$$

$$a_{2k}(z, t) = \left\{ \frac{C_{1k}^n(z, t)}{\mu_k^2 \operatorname{ch} \mu_k b} - \frac{1}{\mu_k^2} [C_{1k}^n(z, t) - C_{2k}^n(t)] + \right.$$

$$+\mu_k b\left[\bar{h}_k^n(z,t)+\nu_k\int_{\tau_1}^{t}\bar{h}_k^n(z,\tau)R_1(t,\tau)\right]\Bigg|\operatorname{ch}\mu_k z+\Bigg\{m_k^n(z,t)+$$

$$+n_k\left[h_k^n(z,t)+\nu_k\int_{\tau_1}^{t}h_k^n(z,\tau)R_1(t,\tau)d\tau\right]\Bigg|\operatorname{sh}\mu_k z-\frac{C_{2k}^n(t)}{\mu_k^2}$$

Здесь

$$C_{1k}^n(z,t)=(\omega_k^*)^{-1}\int_{r_1}^{r_2}Q_n(r,z,t)r^{-1}W_1(\mu_k r)dr$$

$$C_{2k}^0(t)=(\omega_k^*)^{-1}D(t)G_2\int_{r_1}^{r_2}r^{-1}W_1(\mu_k r)dr,\quad C_{2k}^n(t)=0\quad n\geq 1$$

$$\bar{h}_k^n(z,t)=\frac{G_1 m_k^n(z,t)-G_2F_k^n}{G_2-n_kG_1},\quad \nu_k=\frac{G_2}{G_2-n_kG_1}$$

$$n_k=-\frac{\operatorname{th}\mu_k b}{\operatorname{th}\mu_k a},\quad m_k^n(z,t)=\frac{C_{1k}^n(t)}{\mu_k^2\operatorname{sh}\mu_k a}+$$

$$+\frac{1}{\mu_k^2\operatorname{sh}\mu_k a}\left[C_{1k}^n(z,t)-C_{2k}^n(t)\right]\operatorname{ch}\mu_k a-\frac{C_{1k}^n(z,t)\operatorname{ch}\mu_k a}{\mu_k^2\operatorname{sh}\mu_k a\operatorname{ch}\mu_k b}$$

Для существования решения задачи вводим норму

$$\|X\|=\max_{A\in\Omega_m}|X(A)|+\sup_{A,B\in\Omega_m}\frac{|X(A)-X(B)|}{|AB|^{\delta}},\quad 0<\delta<1.$$

Применяя априорные оценки Шаудера и принцип максимума [17], которые в данном случае запишутся в виде $\|D^2\Phi_{mn}\|\leq c_m^*\|Q_{mn}\|$, где $c_m^*$ —постоянная, зависящая от формы области, аналогично [4, 5] показывается, что ряд (3.4) и ряды, составленные из производных $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n D\Phi_{mn}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n D^2\Phi_{mn}(m=1,2)$ сходятся абсолютно и равномерно с некоторыми радиусами сходимости.

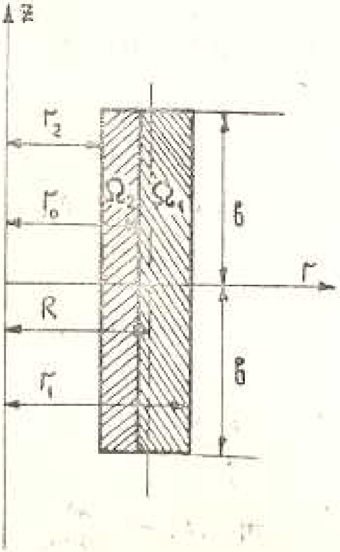
§ 4. *Тонкостенный составной сектор кругового кольца открытого профиля.* Рассмотрим сектор кольца, составленного из двух слоев различной толщины с сечением в виде узкого прямоугольника, вытянутого по направлению оси $z$ (фиг. 4). Из уравнений (1.9) и (3.1), пренебрегая производными по $z$ и интегрируя, получим:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}-\int_{\tau_0}^{t}f_1[\sigma_0^{(1)}(\tau)]\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}K_1(t,\tau)d\tau=\frac{D(t)G_1}{2}r+B_1(t)^{-1}$$

$$\Phi_2(r,t)=\frac{D(t)G_2}{4}r^2+B_2(t)\frac{r^4}{4}+D_2(t)\qquad(4.1)$$

где $B_1(t)$, $B_2(t)$, $D_2(t)$ —неизвестные функции от $t$.

Пользуясь вышеизложенным методом и ограничиваясь только первыми двумя приближениями, решение нелинейного интегрального уравнения (4.1) можно представить в виде




Фиг. 4

$$\Phi_2(r, t)=f(r, t)+D_1(t)+0(\lambda^2) \tag{4.2}$$

где
$$f(r, t)=\int_{r_1}^{r}\left\{H_0(t, r)+\lambda\left[H_2(t, r)+\int_{\tau_1}^{t}H_2(\tau, r)R_1(t, \tau)d\tau\right]\right\}dr$$

$$H_0(t, r)=\frac{D(t)G_1}{2}r+B_1(t)r^3+\int_{\tau_1}^{t}\left[\frac{D(\tau)G_1}{2}r+B_1(\tau)r^3\right]R_1(t, \tau)d\tau$$

$$H_2(t, r)=r^{-2}\int_{\tau_1}^{t}[H_0(\tau, r)]^2K_1(t, \tau)d\tau$$

$D_1(t)$ —неизвестная функция.

К этим уравнениям нужно присоединить условия (3.2), которые примут следующий вид:

$$\Phi_1(r_2, t)=\Phi_2(r_2, t)=0, \quad \Phi_1(r_0, t)=\Phi_2(r_0, t)$$

$$\frac{G_1}{G_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}=\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}-\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}f_1[\sigma_0^{(1)}(\tau)]K_1(t, \tau)d\tau \quad \text{при} \quad r=r_0 \tag{4.3}$$

Подставляя значения $\Phi_1(r, t)$, $\Phi_2(r, t)$ из (4.1), (4.2) в (4.3) и пользуясь (1.15), получим

$$D_2(t)=0 \tag{4.4}$$

$$D(t)=b_3+b_2f(r_0, t)+b_4\int_{r_0}^{r_1}\frac{f(r, t)}{r^3}dr \tag{4.5}$$

$$B_2(t)=c_1+c_2f(r_0,t)+c_3\int\limits_{r_0}^{r_1}\frac{f(r,t)}{r^3}\,dr \tag{4.6}$$

$$D_2(t)=d_1+d_2f(r_0,t)+d_3\int\limits_{r_0}^{r_1}\frac{f(r,t)}{r^3}\,dr \tag{4.7}$$

где

$$b_1=\frac{G_2}{4}\ln\frac{r_2}{r_0}+\frac{1}{8}a_2(r_2^2-r_0^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)a_3$$

$$b_2=\frac{1}{b_1}\left|\frac{1}{8}a_1(r_2^2-r_0^2)+\frac{1}{2}a_4\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\right|,\quad b_3=-\frac{M}{4bb_1R}$$

$$b_4=-1/b_1,\quad a_1=-a_1r_2^4/4,\quad a_2=-G_2(r_0^2+r_2^2)$$

$$a_3=a_2r_0^2r_2^2/4,\quad a_4=-a_1r_2^4/4,\quad c_1=a_2b_3,\quad c_2=a_1+a_2b_2$$

$$c_3=a_2b_4,\quad d_1=a_3b_3,\quad d_2=a_4+a_3b_2,\quad d_3=a_3b_4$$

Подставляя выражения $D_1(t)$, $D_2(t)$, $B_2(t)$ и $D(t)$ в уравнение (4.3) и пользуясь (4.2), получим нелинейное интегральное уравнение относительно $B_1(t)$. Решая это уравнение методом Крылова-Боголюбова [18], определяем неизвестную функцию $B_1(t)$.

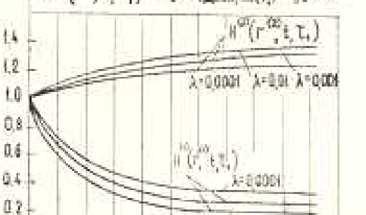
Пользуясь формулами (1.8), (4.1) и (4.2), напряжения в областях $\Omega_1$ и $\Omega_2$ можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{z\theta}^{(i)}(r,t,\tau_1)=H^{(i)}(r,t,\tau_1)\sigma_{z\theta}^{(i)}(r,\tau_1)\quad(i=1,2)$$

Функции $H^{(1)}(r,t,\tau_1)$ и $H^{(2)}(r,t,\tau_1)$ представляют коэффициенты затухания и нарастания касательных напряжений $\sigma_{z\theta}^{(1)}(r,t,\tau_1)$ и $\sigma_{z\theta}^{(2)}(r,t,\tau_1)$ во времени для составного сектора кругового кольца при кручении.

На ЭВМ «ЕС—1022» при значениях параметров

$3C_{0,1}=2{,}25\cdot10^{-5}$; $3A_{11}=12{,}05\cdot10^{-5}$; $G_1=8\cdot10^{9}$ Па; $G_2=8\cdot10^{10}$ Па $R=4{,}5$ см; $r_{1,2}=R\pm0{,}5$; $b=5(r_1-r_2)$, $r_0=R-1{,}8$ дано численное решение задачи.




Фиг. 5

На (фиг. 5) показаны изменения $H^{(1)}(r^{(1)},t,\tau_1)$ и $H^{(2)}(r^{(2)},t,\tau_1)$ при различных значениях $\lambda$, где $r^{(i)}=(r_0+r_i)/2$, $(i=1,2)$.

Аналогично можно получить решение и для составного сектора кругового кольца с сечением в виде узкого прямоугольника, вытянутого по направлению $r$.

## NON-LINEAR CREEP OF MULTILAYER SECTOR OF A CIRCULAR RING UNDER TORSION

F. M. POLADIAN

## ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՕՂԱԿԻ ՍԵԿՏՈՐԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԸ ՈԼՈՐՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ֆ. Մ. ՓՈԼԱԴՅԱՆ

Ամփոփում

*Ուսումնասիրվում է ժառանգական, միմյանցից տարբեր ոչ գծային սողքի հատկություններ ունեցող նյութերից կազմված շրջանային օղակի սեկտորի ոլորման խնդիրը։*

*Խնդիրը բերվում է յուրաքանչյուր տիրույթում խառը եզրային պայմաններով ոչ գծային ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրմանը։*

*Ուսումնասիրվում է ուղղանկյուն ընդլայնական հատույթի երկու դեպք, երբ բաժանման գծերը համապատասխանաբար զուգահեռ են կոորդինատական առանցքներին։*

*Շրջանային օղակի բարակապատ բաղադրյալ սեկտորի դեպքում կառուցված են լարումների բաղադրիչների գրաֆիկները։*

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести.—М.—Л.: ГИТТЛ, 1952.
2. *Göhner O.* Spannugsverteilung in einem an den Endquerschnitten belasteten Ringstab sector. —Ingr-Arch., 1931, Bd 2.
3. *Freiberger W.* The unifrom torsion of an incomplete tore. —Austral. J. Scient. Res. Ser. A, 1949, vol. 2, № 3.
4. *Stein I.* Strees analysis of a helical coil. —Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech. 1963, vol. 30, № 1. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1963, т. 30, № 1).
5. *Солянин-Красса К. В.* К расчету винтовых пружин.—Тр. Ленинград. политех. ин-та, 1950, № 2.
6. *Рабинович А. Л.* Кручение элемента кругового кольца. Исследования по механике и прикладной математике.—Тр. Моск. физ.-тех. ин-та, 1958, вып. 1.
7. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. 3-е изд. М.: Высшая школа, 1969.
8. *Freiberger W.* Elastic-plastic torsion of circular ring sector. —Quart. Appl. Math. 1956, vol. 14, № 3.
9. *Задоян М. А.* Пластическое кручение неполного тора.—Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 2.

10. *Задоян М. А., Поладян Ф. М.* Задача нелинейной ползучести кривого стержня при кручении.—Докл. АН Арм. ССР, 1980, т. *71*, № 23.
11. *Поладян Ф. М.* Кручение кривой разностенной трубы при нелинейной ползучести.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1981, т. *34*, № 2.
12. *Задоян М. А., Поладян Ф. М.* Ползучесть кривого составного стержня при кручении.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1983, т. *36*, № 5.
13. *Поладян Ф. М.* Ползучесть составного сектора кругового кольца с поперечным сечением, ограниченным тремя неконцентрическими окружностями при кручении.—Докл. АН Арм. ССР, 1985, т. *80*, № 4.
14. *Новожилов В. В.* Теория упругости. М.-Л.: Судстройиздат, 1962.
15. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел.—М.: Физматгиз, 1963
16. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Т. *1*. М.: ИЛ, 1949.
17. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: «Мир», 1965.
18. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа.—Л.-М.: Физматгиз, 1962.

Ереванский политехнический институт

Поступила в редакцию
15.III.1989