ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 43, № 2, 1990 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ ЗАДАЧЕ МАГНИТОУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ С ТОКОМ

ИСАБЕКЯН Н. Г., КАЗАРЯН К. Б.

В работе рассмотрена задача магнитоупругой устойчивости токонесущего консольного стержня, находящегося в продольном магнитном поле. На основе уравнений, полученных в [1], показано, что краевая задача консольного стержня является несамосопряженной, а также, что стержень не теряет устойчивости в рамках статического подхода. Для определения вопроса устойчивости в рамках динамического подхода был использован вариационный метод, развитый в работах [2, 3] и связанный с рассмотрением сопряженной краевой задачи. Определено критическое значение силы Ампера, превышение которой приводит к потере упругой устойчивости консольного стержня.

§ 1. Рассматривается тонкий упругий стержень круглого поперечного сечения радиуса r и длины L. По стержню протекает электрический ток силы J_0. Стержень находится во внешнем магнитном поле с индукцией B_0, направление которого совпадает с осью стержня. Один из концов стержня заделан, другой конец свободен. Предполагается, что ток в стержне достаточно мал по сравнению с критическим током, при котором стержень неустойчив вследствие взаимодействия с собственным магнитным полем [4].

В работе [1] на основе нелинейных уравнений эластики гибких стержней было получено следующее линейное уравнение статической пространственной устойчивости искомого стержня.

$$\frac{d^4u}{d\eta^4}+a_0\frac{dv}{d\eta}=0,\quad \frac{d^4v}{d\eta^4}-a_0\frac{du}{d\eta}=0 \tag{1.1}$$

где $u(\eta)$, $v(\eta)$ есть изгибные перемещения в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях; $a_0=4J_0B_0L^3/\pi Er^4$; $\eta\in(0,1)$, E—модуль упругости материала стержня.

Граничные условия для консольного стержня имеют вид

$$u(0)=u'(0)=u''(1)=u'''(1)=0,\quad v(0)=v'(0)=v''(1)=v'''(1)=0 \tag{1.2}$$

Как показано в [1], краевая задача (1.1)—(1.2) является несамосопряженной, и, следовательно [5], применение статического подхода может привести к неправильному выводу относительно неустойчивого состояния стержня.

Вводя комплексную функцию $w=u+iv$, запишем общее решение (1.1) в виде

$$w=C_1+C_2\exp(-2ai\eta)+C_3\exp((\sqrt{3}+i)a\eta)+C_4\exp((i-\sqrt{3})a\eta) \tag{1.3}$$

$$(a=\sqrt[3]{a_0}/2)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.2), мы получим следующие уравнения относительно собственных чисел a:

$$\sin 3a=0; \quad \cos 3a+\operatorname{ch}\sqrt{3}a=0$$

которые не имеют общих действительных решений.

Следовательно, в (1.3) постоянные $C_i=0$ и стержень является устойчивым.

Таким образом, аналогично задаче устойчивости консольного стержня со следящей силой [5] рассматриваемая задача токонесущего стержня должна быть исследована на основе динамического подхода.

Отметим, что в научной литературе известны примеры существования статической потери устойчивости упругих стержней со следящей силой [6, 7].

§ 2. Задача устойчивости рассматриваемого стержня на основе динамического подхода сводится к решению следующей системы уравнений с граничными условиями (1.2):

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \eta^4}+a_0\frac{\partial v}{\partial \eta}+\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \quad \frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4}-a_0\frac{\partial u}{\partial \eta}+\rho_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0 \tag{2.1}$$

где $\rho_0=4\rho L^4/Er^2$; ρ—плотность материала стержня.

Представляя решение в виде $u=u_0(\eta)\exp(i\omega t)$; $v=v_0(\eta)\exp(i\omega t)$, где ω—частота изгибных колебаний, имеем

$$\frac{d^4 u_0}{d\eta^4}+a_0\frac{dv_0}{d\eta}=\lambda u_0, \quad \frac{d^4 v_0}{d\eta^4}-a_0\frac{du_0}{d\eta}=\lambda v_0 \tag{2.2}$$

$$(\lambda=\rho_0\omega^2)$$

Вводя вектор-функцию $\boldsymbol{u}$, запишем уравнение (2.2) в операторном виде

$$\hat{Q}\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u} \tag{2.3}$$

где $\hat{Q}$ есть следующая операторная матрица:

$$\hat{Q}=\begin{pmatrix} \dfrac{d^4}{d\eta^4}, & a_0\dfrac{d}{d\eta} \\ -a_0\dfrac{d}{d\eta}, & \dfrac{d^4}{d\eta^4} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

а $\boldsymbol{u}$ есть вектор-функция $\boldsymbol{u}=\{u_0(\eta);\ v_0(\eta)\}$.

Краевой задаче (2.3), (1.2) сопоставим сопряженную краевую задачу, определяемую следующим образом [8]:

$$\langle\langle \hat{Q}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}^*\rangle\rangle=\langle\langle \boldsymbol{u}\cdot\hat{Q}^*\boldsymbol{u}^*\rangle\rangle$$

где $\langle\langle f\cdot g\rangle\rangle$ есть скалярное произведение в пространстве вектор-функкций

$$«f \cdot g» = \int_0^1 (f_1 g_1) d\eta + \int_0^1 (f_2 g_2) d\eta$$

Умножая уравнения (2.3) на вектор-функцию $u^* = [u_0^*(\eta), v_0^*(\eta)]$ и произведя интегрирование по частям с учетом (1.2), получим следующую сопряженную краевую задачу:

$$\hat{Q}^* u^* = \lambda^* u^* \tag{2.5}$$

где операторная матрица $\hat{Q}^*$ совпадает с матрицей $\hat{Q}$ (2.4), а функции u_0^*, v_0^* удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$u_0^* = \frac{du_0^*}{d\eta} = 0, \quad v_0^* = \frac{dv_0^*}{d\eta} = 0, \quad \text{при} \quad \eta = 0$$

$$\frac{d^2 u_0^*}{d\eta^2} = \frac{d^2 v_0^*}{d\eta^2} = 0; \ \frac{d^3 u_0^*}{d\eta^3} = a_0 v_0^*; \quad \frac{d^3 v_0^*}{d\eta^3} = -a_0 u_0^*; \quad \text{при} \quad \eta = 1 \tag{2.6}$$

В [2, 3, 8] показано, что собственные значения сопряженной краевой задачи с действительными переменными идентичны с собственными значениями исходной краевой задачи, то есть $\lambda^* = \lambda$. В [2, 3] показано также, что следующий функционал $R^*(\lambda)$

$$\lambda = R^*(\lambda) = \frac{«Qu \cdot u^*»}{«u \cdot u^*»} \tag{2.7}$$

является стационарным, то есть что $\delta R(\lambda) = 0$.

Если представить функции u, u^* в виде

$$u = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n(\eta); \qquad u^* = \sum_{m=1}^{N} \beta_m u_m^*(\eta)$$

где $u_n(\eta)$ и $u_m^*(\eta)$ есть определенные функции, удовлетворяющие только граничным условиям (1.2) и (2.6) соответственно, из условия стационарности функционала (2.7), аналогично процедуре Галеркина, справедливой для самосопряженных краевых задач [9], для краевой задачи (2.5), (2.6) получим следующее N-мерное алгебраическое уравнение, определяющее собственные числа λ

$$\det \| A_{mn} - \lambda B_{mn} \| = 0 \tag{2.8}$$

где

$$A_{mn} = \langle\langle Qu_m \cdot u_n^* \rangle\rangle; \quad B_{mn} = \langle\langle u_m \cdot u_n^* \rangle\rangle \tag{2.9}$$

Для практических целей при определении собственных чисел ограничимся вторым приближением ($N = 2$).

В качестве исходных функций выберем следующие полиномы, удовлетворящие граничным условиям (1.2) и (2.6) соответственно:

$$u_1 = \left\{ (\eta^4 - 4\eta^3 + 6\eta^2); \ \left(\eta^5 - \frac{10}{3}\eta^4 + \frac{10}{3}\eta^3 \right) \right\}$$

$$u_2=\left\{\left(\eta^7-\frac{14}{5}\eta^6+\frac{21}{10}\eta^5\right);\ \left(\eta^6-3\eta^5+5/2\cdot\eta^4\right)\right\} \tag{2.10}$$

$$u_1^*=\{[2a_0^2(2\eta^4-5\eta^3+3\eta^2)+36a_0(\eta^4-2\eta^3)+360(\eta^4-4\eta^3+6\eta^2)];$$

$$[a_0^2(3\eta^5-7\eta^4+4\eta^3)-18a_0(3\eta^5-5\eta^4)+14(3\eta^5-10\eta^4+10\eta^3)]\}$$

$$u_2^*=\{[12600(10\eta^4-3\eta^5-10\eta^3)+620a_0(5\eta^4-3\eta^5)+10a_0^2(7\eta^4-3\eta^5-4\eta^3)];$$

$$[12600(28\eta^6-10\eta^7-21\eta^5)-180a_0(7\eta^6-5\eta^7)+14a_0^2(11\eta^6-5\eta^7-6\eta^5)]\}$$

Подставляя (2.10) в (2.9) и произведя соответствующие интегрирования, из (2.8) получим биквадратное уравнение относительно ω, зависящее от параметра a_0. Наложив на корни этого уравнения условие $\mathrm{Im}\,\omega\geqslant 0$, получим следующее критическое значение параметра $a_{0*}\approx 15{,}272$, превышение которого приводит к асимптотической неустойчивости стержня.

В заключение приведем численный пример для консольного медного стержня с параметрами $r=1{,}5\cdot 10^{-3}$м, $L=0{,}65$м, $E=0{,}87\cdot 10^{11}$ Па.

1. $J_{0*}=20\ A;\quad B_{0*}=7{,}9\,T.$
2. $J_{0*}=30\ A;\quad B_{0*}=5{,}27\ T.$
3. $J_{0*}=80\ A;\quad B_{0*}=1{,}98\ T.$
4. $J_{0*}=100\ A;\quad B_{0*}=1{,}58\ T.$

Отметим, что изменение направления тока или магнитного поля на обратное, как и в задачах с симметричными граничными условиями [1], не приводит к изменению критического параметра a_0, характеризующего силу Ампера.

ABOUT ONE NON-CONSERVATIVE MAGNETOELASTIC STABILITY PROBLEM OF A ROD WITH CURRENT

N. G. ISABEKIAN, K. B. KAZARIAN

ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ՁՈՂԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՈՉ ՊԱՀՊԱՆՈՂԱԿԱՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ն. Գ. ԻՍԱԲԵԿՅԱՆ, Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է հոսանքին զուգահեռ մագնիսական դաշտում գտնվող հոսանքատար հեծանային ձողի կայունության ոչ պահպանողական խնդիրը։ Ոչ ինքնահամալուծ եզրային խնդիրներում կիրառվող վարիացիոն մեթոդի հիման վրա որոշված է Ամպերի կրիտիկական ուժը, որի մեծացումը հանգեցնում է կայունության կորստի։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kazarian K. B.* Magnetoelastic stability of a current-carrying rod in an external magnetic field.—Engineering Transactions. 1985, 33,3 p. 277—283.
2. *Prasad S. N., Herrmann G.* The usefulness of adjoint systems to solving nonconservative stability problems of elastic continua. —Int. Jour. solids Struct. 1969, 5, p. 727—735.
3. *Prasad S. N., Herrmann G.* Abjoint variational methods in nonconservative stability problems. —Int. Jour. Solids Struct. 1972, 8, p. 29—40.
4. *Chattopadyay S., Moon F. S.* Magnetoelastic buckling and vibration of a rod carrying electric current. —J. Applind Mech. 1975, 42,4, p. 809—814.
5. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.—М.: Физматгиз, 1961.
6. *Lee G. E., Reissner E.* Note on a Problem of a beam Buckling. —Journ. Appl. Math. and Physics. (ZAMP). 1975, v. 26, p. 177—180.
7. *Исабекян Н. Г.* Об одной задаче устойчивости стержня, изготовленного из разномодульного материала.—Ереван, Механика, Изд. ЕГУ, №4, 1986, с. 97—101.
8. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.—М.: Наука, 1969. 526 с. 526 с.
9. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения.—М.: Наука, 1968. 504 с.

Ереванский Политехнический институт

Институт механики АН АрмССР

Поступила в редакцию
20.IV.1989

ИНФОРМАЦИЯ

Доклады, обсужденные на общем семинаре
Института механики АН Арм. ССР в 1989 г.

1. *Есян М.* «О некоторых вопросах сейсмостойкого строительства» 27.03.
2. *Аракелян Т. Т.* «Искусственное сердце». 6.04.
3. *Карапетян К. С.* «О закономерностях изменения во времени деформативных и прочностных свойств бетона в условиях различных влажностей». 20.04.
4. *Мовсисян Л. А.* «Об устойчивости анизотропных слоистых упругих и вязкоупругих пластин». 15.06.
5. *Опанасович В. К.* «Напряженное состояние пластин и оболочек, содержащих дефекты типа трещин и тонких включений». 1.06.
6. *Матевосян В. С.*. «Статистический анализ и выбор параметров манипулятора с перекрестными упругими шарнирами при больших деформациях». 29.06.
7. *Зейтунцян Х. Н.* «Асимптотические модели механики жидкости» 10.08.
8. *Киракосян Р. М.* «Проектирование равнопрочных ортотропных пластин», «Об определении поперечных напряжений идеальнопластической ортотропной пластины переменной толщины». 2.11.
9. *Геворгян Г. З.* «Нестационарная динамическая задача для бесконечного пространства со сферической полостью». 2.11.
10. *Давидян Д. Б.*, *Домбаева И. А.*, *Ширинян Р. А.* «Прочность и напряженное состояние геометрически модифицированного нахлесточного клеевого соединения». 2.11.
11. *Мольченко Л. В.* «Нелинейные задачи магнитоупругости для токонесущих пластин и оболочек». 23.11.
12. *Задоян М. А.*, *Агаларян О. Б.* «О малонапряженности составного клина, упрочняющегося по нелинейному закону». 21.12.

Секретарь общего семинара, к. ф.-м. н.
Телефон для справки: 52-48-90

Н. Б. САФАРЯН