ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 2, 1990 Механика

УДК 539.3.

НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ ВЗАИМНОСТИ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ МАГНИТОУПРУГОСТИ ПРОВОДЯЩИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

САРКИСЯН С. О.

Основываясь на теореме взаимности Бетти, в теории упругости доказывается [8] свойство ортогональности собственных форм колебаний.

Теорема взаимности в теории упругих тонких оболочек доказывается в работе [3]. Свойство ортогональности собственных форм колебаний упругих тонких оболочек доказывается в [4].

Теорема взаимности для двумерной теории магнитоупругости проводящих тонких оболочек [9, 10] доказывается в работе [11].

В работе [12] выводится уравнение баланса энергии для двумерной теории магнитоупругости проводящих тонких оболочек и доказывается теорема единственности.

В данной работе, используя методику доказательства теорем взаимности в трехмерной и двумерной теории магнитоупругости [10, 11], доказывается свойство обобщенной ортогональности собственных форм магнитоупругих колебаний.

В теории упругости, основываясь на теореме взаимности, выводятся интегральные соотношения для нахождения перемещений внутри тела по перемещениям и нагрузкам на его поверхности. Эти соотношения известны, как теоремы Сомильяны и Грина [6].

В работах [2, 7] получены расширения теорем Сомильяны и Грина в краевых проблемах теории тонких упругих и термоупругих оболочек.

В настоящей работе показывается также, что теорема взаимности, полученная в [11], позволяет записать решение задач магнитоупругости тонких оболочек в квадратурах.

1. Как исходные уравнения, принимаются трехмерные линейные уравнения магнитоупругости проводящей, изотропной оболочки толщиной $2h$, которые в выбранной триортогональной неподвижной системе координат составляют три группы уравнений и имеют вид [1, 10]:

первая группа уравнений—дифференциальные уравнения теории упругости изотропного тела, которые можно записать так.

Векторное уравнение движения оболочки с учетом массовых сил электромагнитного происхождения:

$$\frac{\partial H_2\vec{\sigma}_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial H_1\vec{\sigma}_2}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial H_1H_2\vec{\sigma}_3}{\partial\alpha_3}+H_1H_2\left[-\rho\omega^2\vec{v}+\frac{1}{c}\sigma\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\omega\vec{v}\times\vec{B}_0\right)\times\vec{B}_0\right]=0 \tag{1.1}$$

Уравнения, выражающие формулы обобщенного закона Гука:

$$\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}\theta+2\mu e_{ij},\qquad e_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i}) \tag{1.2}$$

где $\vec{\sigma}_k$—вектор упругих напряжений на площадке, нормаль которой проходит вдоль α_k-линий, σ_{ij}, e_{ij}—компоненты напряженного и деформированного состояния соответственно, $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$—вектор упругих перемещений точек трехмерной оболочки, θ—объемное расширение, $\vec{B}_0=(B_{01}, B_{02}, B_{03})$—вектор напряженности заданного внешнего магнитного поля, $\vec{E}=(E_1, E_2, E_3)$—вектор напряженности, возбужденного в оболочке электромагнитного поля, λ и μ—упругие постоянные материала оболочки, σ—ее проводимость, c—электродинамическая постоянная, численно равная скорости света в пустоте, H_i, $H_3=1$—коэффициенты Ламе для выбранной триортогональной системы координат.

Вторая группа уравнений—уравнения электродинамики в области движущейся оболочки, которую можно записать так:

$$\operatorname{rot}\vec{h}=\frac{4\pi}{c}\vec{j},\qquad \vec{j}=\sigma\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\omega\vec{v}\times\vec{B}_0\right) \tag{1.3}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\omega\vec{h} \tag{1.4}$$

$$\operatorname{div}\vec{E}=4\pi\rho_e,\qquad \operatorname{div}\vec{h}=0 \tag{1.5}$$

где $\vec{h}=(h_1, h_2, h_3)$—вектор напряженности возбужденного в оболочке магнитного поля, ρ_e—плотность объемного заряда, $\vec{j}$—вектор плотности электрического тока проводимости.

Третья группа уравнений—уравнение электродинамики во внешней от оболочки области, которая считается вакуумом

$$\operatorname{rot}\vec{h}^{(e)}=0,\qquad \operatorname{rot}\vec{E}^{(e)}=-\frac{1}{c}\omega\vec{h}^{(e)} \tag{1.6}$$

$$\operatorname{div}\vec{h}^{(e)}=0,\qquad \operatorname{div}\vec{E}^{(e)}=0 \tag{1.7}$$

где $\vec{E}^{(e)}$ и $\vec{h}^{(e)}$—соответственно вектор напряженностей возбужденного электрического и магнитного полей в вакууме.

Граничные условия для возмущенного электромагнитного поля (при $\varepsilon=\mu=1$ для материала оболочки и для вакуума) на поверхности оболочки выражаются так [1]

$$(\vec{E}-\vec{E}^{(e)})\vec{\tau}_0=0, \qquad (\vec{h}-\vec{h}^{(e)})\vec{\tau}_0=0, \qquad (\vec{h}-\vec{h}_0)\vec{n}_0=0 \tag{1.8}$$

где $\vec{\tau}_0$ и $\vec{n}_0$—соответственно единичный касательный вектор и единичный вектор нормали к поверхности тела оболочки.

Так как уравнения (1.6), (1.7) должны выполняться для окружающей оболочки области (вакуум), которая считается всем трехмерным пространством с исключением области тонкой оболочки, необходимо ставить условия на бесконечности. Для гармонических электромагнитных полей, которые в данном случае нас будут, главным образом, интересовать для удовлетворения требований единственности решения уравнений поля (1.6), (1.7) при временном множителе $e^{i\omega t}$, должны выполняться условия излучения. Например, для вектора $\vec{h}^{(e)}$ это условие запишется следующим образом:

$$\lim_{r\to\infty}\left[r\left(\frac{\partial\vec{h}^{(e)}}{\partial r}+i\omega\vec{h}^{(e)}\right)\right]=0 \tag{1.9}$$

Граничные условия в случае свободных колебаний должны быть однородными. Электродинамические граничные условия (1.8), (1.9) по сути дела однородные. Механические граничные условия на лицевых поверхностях оболочки принимаются нулевые. Считается, что на боковой поверхности оболочки задан некоторый вариант из многочисленно возможных вариантов однородных граничных условий в смысле трехмерной теории упругости.

Как мы отметили, нас будут интересовать свободные колебания проводящей упругой оболочки в заданном магнитном поле, для этого все величины, определяющие поставленную трехмерную задачу магнитоупругости (1.1)—(1.9), представлены в виде произведения некоторых функций от координат и функций $e^{i\omega t}$, где ω—собственные частоты магнитоупругих колебаний, которые составляют комплексный дискретный спектр собственных частот.

Система уравнений (1.1)—(1.7) при однородных граничных условиях имеет очевидное тривиальное решение $v_i=0$, $\sigma_{ij}=0$, $e_{ij}=0$, $E_i=0$, $h_i=0$, $E_i^{(e)}=0$, $h_i^{(e)}=0$, $i=1,2,3$. Однако при некоторых значениях параметра $\omega=\omega_k$ возможно и ненулевое решение

$$v_i=v_i^{(k)},\ \sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{(k)},\ E_i=E_i^{(k)},\ h_i=h_i^{(k)},\ E_i^{(e)}=E_i^{e(k)},\ h_i^{(e)}=h_i^{e(k)},\quad i=1,2,3 \tag{1.10}$$

Соответствующие значения параметра ω_k называются собственными частотами магнитоупругих колебаний, а функции $v_i^{(k)}$, $\sigma_{ij}^{(k)}$, $E_i^{(k)}$ $h_i^{(k)}$ определяют собственные формы магнитоупругих колебаний. Очевидно, что вследствие однородности системы уравнений и граничных условий—(1.1)—(1.9) функции (1.10) определены с точностью до произвольного множителя.

Пусть $\omega=\omega_k$ есть какая-либо из собственных частот, $v_i^{(k)}$, $\sigma_{ij}^{(k)}$, $E_i^{(k)}$, $h_i^{(k)}$, $E_i^{e(k)}$, $h_i^{e(k)}$, $i=1, 2, 3$ соответствующие собственные формы магнитоупругих колебаний, а $\omega=\omega_p$—другая собственная частота, отличная от ω_k, и, $v_i^{(p)}$, $\sigma_{ij}^{(p)}$, $E_i^{(p)}$, $h_i^{(p)}$, $E_i^{e(p)}$, $h_i^{e(p)}$, $i=1, 2, 3$ соответствующие собственные формы магнитоупругих колебаний.

Умножим все члены уравнения (1.1), записанного для величин ω_k, $v_i^{(k)}$, $\sigma_{ij}^{(k)}$, $E_i^{(k)}$, на вектор $\omega_p\vec{v}^{(p)}$ и интегрируем полученное равенство по объему V трехмерной оболочки. Совершенно аналогичным путем скалярно умножим векторное уравнение (1.1), записанное на этот раз для величин ω_p, $v_i^{(p)}$, $\sigma_{ij}^{(p)}$, $E_i^{(p)}$, на вектор $\omega_k\vec{v}^{(k)}$ и проведем интегрирование по объему оболочки. Таким образом, будем иметь два равенства. Вычитая из первого равенства второе, после некоторых преобразований получается следующее равенство:

$$
\begin{gathered}
\omega_p \iiint\limits_V (\sigma_{11}^{(k)}e_{11}^{(p)}+\sigma_{12}^{(k)}e_{12}^{(p)}+\sigma_{13}^{(k)}e_{13}^{(p)}+\sigma_{22}^{(k)}e_{22}^{(p)}+\sigma_{23}^{(k)}e_{23}^{(p)}+\sigma_{33}^{(k)}e_{33}^{(p)})dV- \\
-\omega_k \iiint\limits_V (\sigma_{11}^{(p)}e_{11}^{(k)}+\sigma_{12}^{(p)}e_{12}^{(k)}+\sigma_{13}^{(p)}e_{13}^{(k)}+\sigma_{22}^{(p)}e_{22}^{(k)}+\sigma_{23}^{(p)}e_{23}^{(k)}+\sigma_{33}^{(p)}e_{33}^{(k)})dV+ \\
+\rho(\omega_k^2\omega_p-\omega_p^2\omega_k)\iiint\limits_V (v_1^{(p)}v_1^{(k)}+v_2^{(p)}v_2^{(k)}+v_3^{(p)}v_3^{(k)})dV- \qquad (1.11) \\
-\omega_p\frac{\sigma}{c}\iiint\limits_V (B_{03}E_2^{(k)}v_1^{(p)}+B_{01}E_3^{(k)}v_2^{(p)}+B_{02}E_1^{(k)}v_3^{(p)}-B_{02}E_3^{(k)}v_1^{(p)}-B_{03}E_1^{(k)}v_2^{(p)}- \\
-B_{01}E_2^{(k)}v_3^{(p)})dV+\omega_k\frac{\sigma}{c}\iiint\limits_V (B_{03}E_2^{(p)}v_1^{(k)}+B_{01}E_3^{(p)}v_2^{(k)}+B_{02}E_1^{(p)}v_3^{(k)}- \\
-B_{02}E_3^{(p)}v_1^{(k)}-B_{03}E_1^{(p)}v_2^{(k)}-B_{01}E_2^{(p)}v_3^{(k)})dV=0
\end{gathered}
$$

Теперь умножим все члены уравнения (1.3), записанного для величин ω_k, $v_i^{(k)}$, $E_i^{(k)}$, $h_i^{(k)}$, на вектор $\vec{E}^{(p)}$, а уравнения (1.4)—на $\vec{h}^{(p)}$ и произведем вычитание обеих частей первого равенства из соответствующих частей второго, аналогичным образом умножим все члены уравнения (1.3) и (1.4), записанного для величин ω_p, $v_i^{(p)}$, $E_i^{(p)}$, $h_i^{(p)}$, соответственно на $\vec{E}^{(k)}$ и $\vec{h}^{(k)}$ и произведем вычитание из полученного первого равенства второе.

Итак, из полученного таким образом первого равенства вычитаем второе, после интегрирования полученного равенства по объему оболочки, результат можно записать в виде следующего равенства:

$$\iint_{\Omega}(\vec{h}^{(k)}\times\vec{E}^{(p)})_n d\Omega-\iint_{\Omega}(\vec{h}^{(p)}\times\vec{E}^{(k)})_n d\Omega=$$

$$=\frac{4\pi}{c^2}\sigma\Big\{\omega_k\iiint_V[(B_{03}v_2^{(k)}-B_{02}v_3^{(k)})E_1^{(p)}+(B_{01}v_3^{(k)}-B_{03}v_1^{(k)})E_2^{(p)}+$$

$$+(B_{02}v_1^{(k)}-B_{01}v_2^{(k)})E_3^{(p)}]\,dV-\omega_p\iiint_V[(B_{03}v_2^{(p)}-B_{02}v_3^{(p)})E_1^{(k)}+$$

$$+(B_{01}v_3^{(p)}-B_{03}v_1^{(p)})E_2^{(k)}+(B_{02}v_1^{(p)}-B_{01}v_2^{(p)})E_3^{(k)}]\,dV+$$

$$+\frac{1}{c}\omega_k\iiint_V\vec{h}^{(p)}\vec{h}^{(k)}dV-\frac{1}{c}\omega_p\iiint_V\vec{h}^{(p)}\vec{h}^{(k)}dV \qquad (1.12)$$

где $\vec{n}$ — вектор единичной нормали к срединной поверхности оболочки, Ω — область срединной поверхности оболочки.

Совершенно аналогичным путем из соответствующих уравнений (1.6) для внешней задачи с учетом условий на бесконечности (1.9) получается равенство

$$\iint_{\Omega}(\vec{h}^{(k)}_{(e)}\times\vec{E}^{(p)}_{(e)})_n d\Omega-\iint_{\Omega}(\vec{h}^{(p)}_{(e)}\times\vec{E}^{(k)}_{(e)})_n d\Omega=\frac{\omega_k-\omega_p}{c}\iiint_{R^3-V}\vec{h}^{(k)}_{(e)}\vec{h}^{(p)}_{(e)}\,dV \qquad (1.13)$$

Принимая во внимание граничные условия (1.8) и получая из этого факта, что нормальная компонента вектора Пойнтинга $(\vec{h}\times\vec{E})$ всегда непрерывна при переходе через поверхность, исключая из уравнений (1.12) и (1.13) общие члены, находим следующее равенство:

$$\frac{\sigma}{c}\Big\{\omega_k\iiint_V[(B_{03}v_2^{(k)}-B_{02}v_3^{(k)})E_1^{(p)}+(B_{01}v_3^{(k)}-B_{03}v_1^{(k)})E_2^{(p)}+$$

$$+(B_{02}v_1^{(k)}-B_{01}v_2^{(k)})E_3^{(p)}]\,dV-\omega_p\iiint_V[(B_{03}v_2^{(p)}-B_{02}v_3^{(p)})E_1^{(k)}+$$

$$+(B_{01}v_3^{(p)}-B_{03}v_1^{(p)})E_2^{(k)}+(B_{02}v_1^{(p)}-B_{01}v_2^{(p)})E_3^{(k)}]\,dV\Big\}+ \qquad (1.14)$$

$$+\frac{1}{4\pi}(\omega_k-\omega_p)\iiint_V\vec{h}^{(k)}\vec{h}^{(p)}\,dV+\frac{1}{4\pi}(\omega_k-\omega_p)\iiint_{R^3-V}\vec{h}^{(k)}_{(e)}\vec{h}^{(p)}_{(e)}\,dV=0$$

Принимая во внимание формулы (1.2), выражающие обобщенный закон Гука, исключая из уравнений (1.11) и (1.14) общие члены, приходим к равенству

$$\iiint_V[\lambda\theta^{(p)}\theta^{(k)}+2\mu(e_{11}^{(p)}e_{11}^{(k)}+e_{22}^{(p)}e_{22}^{(k)}+e_{33}^{(p)}e_{33}^{(k)})+\mu(e_{12}^{(p)}e_{12}^{(k)}+\ldots$$

$$+ e_{13}^{(p)} e_{13}^{(k)} + e_{23}^{(p)} e_{23}^{(k)})]dV - \rho\omega_p\omega_k \iiint\limits_V (v_1^{(p)} v_1^{(k)} + v_2^{(p)} v_2^{(k)} + v_3^{(p)} v_3^{(k)})dV -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \vec{h}^{(k)} \vec{h}^{(p)} dV - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{R^3-V} \vec{h}_{(e)}^{(k)} \vec{h}_{(e)}^{(p)} dV = 0 \qquad (1.15)$$

Равенство (1.15) выражает обобщенную теорему об ортогональности собственных форм магнитоупругих колебаний.

2. Введем безразмерные параметры, а также время по формулам [9, 10]

$$\alpha_1 = R\lambda^{-p}\xi_1, \quad \alpha_2 = R\lambda^{-p}\xi_2, \quad \alpha_3 = h\zeta = R\lambda^{-l}\zeta, \quad \lambda = \left(\frac{h}{R}\right)^{-\frac{1}{l}} = \varepsilon^{-\frac{1}{l}}$$

$$\tau = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = \varepsilon^{\omega-1}\frac{R}{c_0}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-p}\xi_3 \qquad (2.1)$$

где R—характерный радиус кривизны оболочки, λ—большой параметр, p, l—целые числа, ω характеризует изменяемость процесса во времени.

Введем также безразмерные величины по формулам [9,10]:

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{h}, \quad i=1,2, \quad \bar{v}_3 = \frac{v_3}{h}, \quad \frac{\tau_i}{E} = \bar{\tau}_i, \quad \frac{\tau_{ij}}{E} = \bar{\tau}_{ij}, \quad \frac{\tau_{i3}}{E} = \bar{\tau}_{i3}, \quad \frac{\tau_3}{E} = \bar{\tau}_3,$$

$$i \neq j = 1,2, \quad R_m = \frac{\sigma h}{c}\frac{c_0}{c} \qquad (2.2)$$

$$\frac{B_{0k}}{\sqrt{E}} = \bar{B}_{0k}, \quad \frac{h_k}{\sqrt{E}} = \bar{h}_k, \quad \frac{c}{c_0}\frac{E_k}{\sqrt{E}} = \bar{E}_k, \quad k = 1,2,3$$

где τ_i, τ_{ij}, τ_{i3}, τ_3 — компоненты несимметричного тензора напряжений [3].

При использовании результатов [9, 10] асимптотического метода интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости (1.1)—(1.9) с отбрасыванием членов порядка λ^{-2l+2p} легко заметить, что для выражений (2.2) имеют место представления

$$\bar{v}_i = \lambda^{l-p}(\overset{0}{v}_i + \lambda^{-l+2p-c}\xi\overset{1}{v}_i), \quad \bar{v}_3 = \lambda^{l-c}(\overset{0}{v}_3 + \lambda^{-l+c}\xi\overset{1}{v}_3)$$

$$\bar{\tau}_i = \lambda^0(\overset{0}{\tau}_i + \lambda^{-l+2p-c}\xi\overset{1}{\tau}_i), \quad \bar{\tau}_{ij} = \lambda^0(\overset{0}{\tau}_{ij} + \lambda^{-l+2p-c}\xi\overset{1}{\tau}_{ij}) \qquad (2.3)$$

$$\bar{\tau}_{i3} = \lambda^{p-l}(\overset{0}{\tau}_{i3} + \xi\overset{1}{\tau}_{i3} + \lambda^{-l+2p-c}\xi^2\overset{2}{\tau}_{i3} + \lambda^{3l\omega-4l-p-c}\xi^3\overset{3}{\tau}_{i3})$$

$$\bar{\tau}_3 = \lambda^{-l+c}(\overset{0}{\tau}_3 + \xi\overset{1}{\tau}_3 + \lambda^{-l+2p-c}\xi^2\overset{2}{\tau}_3 + \lambda^{-2l+4p-2c}\xi^3\overset{3}{\tau}_3)$$

$$\bar{B}_{0k} = \lambda^{l\left(\frac{1}{2}\omega-1\right)}\overset{0}{B}_{0k}, \quad \bar{h}_k = \lambda^{l\left(\frac{1}{2}\omega-1\right)}(\overset{0}{h}_k + \lambda^{p-l}\overset{1}{h}_k), \quad \bar{E}_k = \lambda^{\frac{3}{2}l\omega-2l-p}(\overset{0}{E}_k + \lambda^{p-l}\overset{1}{E}_k) \qquad (2.4)$$

где $k=1,2,3$, при $0 \leqslant \frac{p}{l} \leqslant \frac{1}{2}$, $c=0$, $\omega=1$, а при $\frac{1}{2} \leqslant \frac{p}{l} < 1$ $c=2p-l$, $\omega=\frac{2p}{l}$. Выражения для $\overset{m}{v}_i$, $\overset{m}{v}_3$, $\overset{m}{\tau}_i$, $\overset{m}{\tau}_{ij}$, $\overset{m}{\tau}_{i3}$, $\overset{m}{\tau}_3$, $\overset{m}{h}_k$, $\overset{m}{E}$ приведены в [9, 10].

Подставляя (2.3) и (2.4) в равенство (1.15) с учетом (2.1) и (2.2) и отбрасывая члены порядка λ^{-2l+2p}, в конечном итоге снова переходя к размерным величинам, получаем обобщенную теорему об ортогональности собственных форм магнитоупругих колебаний проводящей тонкой оболочки:

$$\frac{2Eh}{1-\nu^2}\iint\limits_{\Omega}\left\{\left[\varepsilon_1^{(k)}\varepsilon_1^{(p)}+\varepsilon_2^{(k)}\varepsilon_2^{(p)}+\nu(\varepsilon_1^{(k)}\varepsilon_2^{(p)}+\varepsilon_1^{(p)}\varepsilon_2^{(k)})+\frac{1-\nu}{2}\omega^{(k)}\omega^{(p)}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{h^2}{3}\left[\varkappa_1^{(k)}\varkappa_1^{(p)}+\varkappa_2^{(k)}\varkappa_2^{(p)}+\nu(\varkappa_1^{(k)}\varkappa_2^{(p)}+\varkappa_1^{(p)}\varkappa_2^{(k)})+2(1-\nu)\tau^{(k)}\tau^{(p)}\right]\right\}d\Omega- \tag{2.5}$$

$$-2\rho h\omega_p\omega_k\iint\limits_{\Omega}(u_1^{(k)}u_1^{(p)}+u_2^{(k)}u_2^{(p)}+w^{(k)}w^{(p)})d\Omega-\frac{8\pi}{3}\frac{\sigma^2h^2}{c^2}\iint\limits_{\Omega}(\tilde{E}_1^{(k)}\tilde{E}_1^{(p)}+$$

$$+\tilde{E}_2^{(k)}\tilde{E}_2^{(p)})d\Omega-\frac{h}{4\pi}\iint\limits_{\Omega}h_{30}^{(k)}h_{30}^{(p)}d\Omega-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{V^{(e)}}\vec{h}_{(e)}^{(k)}\vec{h}_{(e)}^{(p)}dV=0$$

где

$$\tilde{E}_1^{(k)}=E_{10}^{(k)}-\frac{B_{03}}{c}\omega_k u_2^{(k)}-\frac{B_{02}}{c}\omega_k w^{(k)},\quad \tilde{E}_2^{(k)}=E_{20}^{(k)}-\frac{B_{01}}{c}\omega_k w^{(k)}-\frac{B_{03}}{c}\omega_k u_1^{(k)},$$

u_1, u_2, w—компоненты перемещения срединной поверхности оболочки, E_{10}, E_{20}—значения тангенциальных компонент индуцированного электрического поля на срединной поверхности оболочки, ε_1, ε_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ω, τ—компоненты деформации срединной поверхности оболочки, E и ν—упругие константы материала оболочки.

Полученные соотношения обобщенной ортогональности собственных форм трехмерной (1.15) и двумерной магнитоупругости (2.5) можно использовать при применении метода разложения по собственным формам для изучения установившихся вынужденных магнитоупругих колебаний.

3. Основные разрешающие уравнения двумерной теории магнитоупругости проводящих тонких оболочек на уровне моментной теории оболочек представляются следующим образом [9, 10]:

дифференциальные уравнения движения тонких упругих оболочек с учетом сил электромагнитного происхождения

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial S_{12}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}(T_1-T_2)-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}(S_{12}+S_{21})-$$

$$-\frac{N_1}{R_1}+X_1-2\rho h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-\frac{2\sigma h}{c^2}B_{03}^2\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{2\sigma h}{c}B_{03}\left(E_{20}-\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+$$

$$+\frac{4\pi}{3}\frac{\sigma^2h^3}{c^3}B_{03}\left(\frac{\partial E_{20}}{\partial t}-\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right)=0$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial S_{21}}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(T_2-T_1)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(S_{12}+S_{21})-$$

$$-\frac{N_2}{R_2}+X_2-2\rho h\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-\frac{2\sigma h}{c^2}B_{03}^2\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{2\sigma h}{c}B_{03}\left(E_{10}+\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-$$

$$-\frac{4\pi}{3}\frac{\sigma^2h^3}{c^3}\left(\frac{\partial E_{10}}{\partial t}+\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)=0$$

$$\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(A_2N_1)+\frac{\partial}{\partial \alpha_2}(A_1N_2)\right]+z-2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-$$

$$(3.1)$$

$$-\frac{2\sigma h}{c^2}(B_{02}^2+B_{01}^2)\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{2\sigma h}{c}(B_{02}E_{10}-B_{01}E_{20})-\frac{2\sigma h}{c^2}B_{02}B_{03}\frac{\partial u_2}{\partial t}-$$

$$-\frac{2\sigma h}{c^2}B_{01}B_{03}\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{4\pi}{3}\frac{\sigma^2h^3}{c^3}\left[B_{02}\left(\frac{\partial E_{10}}{\partial t}+\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)-\right.$$

$$\left.-B_{01}\left(\frac{\partial E_{20}}{\partial t}-\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right)\right]=0$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial G_1}{\partial \alpha_1}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(G_1-G_2)-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(H_{12}+H_{21})-N_1-G_1=0$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial G_2}{\partial \alpha_2}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial H_{21}}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}(G_2-G_1)-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}(H_{21}+H_{12})-N_2-G_2=0$$

Уравнения, выражающие соотношения упругости теории тонких оболочек

$$T_i=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_i+\nu\varepsilon_j),\quad S_{ij}=\frac{Eh}{1+\nu}\left(\omega+\frac{2h^2}{3}\frac{\tau}{R_j}\right),\quad G_i=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_i+\nu\varkappa_j),$$

$$H_{ij}=H_{ji}=\frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\tau \qquad (3.2)$$

где T_i, S_{ij}, G_i, H_{ij}, N_i — усилия и моменты в теории оболочек, X_i, Z, Y_i — компоненты внешней нагрузки, действующей на поверхность оболочки.

Дифференциальные уравнения электродинамики во внешней от оболочки области (вакуума)

$$\operatorname{rot}\vec{h}^{(e)}=0,\quad \operatorname{rot}\vec{E}^{(e)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\vec{h}^{(e)}=0,\quad \operatorname{div}\vec{E}^{(e)}=0 \qquad (3.3)$$

Во всем трехмерном пространстве, где должны выполняться уравнения (3.3), область оболочки занимает математический разрез [9, 10] по срединной поверхности оболочки Ω. По такому математическому разрезу протекает электрический ток проводимости, компоненты которого выражаются следующим образом [9, 10]:

$$[h_1]=2h\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial h_{30}}{\partial\alpha_1}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left(E_{20}-\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{8\pi^2}{3}\frac{\sigma^2h^2}{c^3}\left(\frac{\partial E_{20}}{\partial t}-\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right)\right] \tag{3.4}$$
$$[h_2]=2h\left[\frac{1}{A_2}\frac{\partial h_{30}}{\partial\alpha_2}-\frac{4\pi\sigma}{c}\left(E_{10}+\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{8\pi^2}{3}\frac{\sigma^2h^2}{c^3}\left(\frac{\partial E_{10}}{\partial t}+\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\frac{B_{02}}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right]$$

или, что равносильно предыдущему, при интегрировании уравнений (3.3) во всем пространстве необходимо учесть, что при пересечении математического разреза по поверхности Ω, величины $h_i^{(e)}$, $i=1, 2$ претерпевают разрывы (3.4), а величины $E_i^{(e)}$, $i=1, 2$, при этом остаются непрерывными, равными соответственно значениям $\overline{E}_{i0}$ — представляющими выражения компонентов индуцированного электрического поля на лицевых поверхностях оболочки [9, 10]. Величины $[h_i]$ представляют собой разность значений тангенциальных компонент напряженности индуцированного магнитного поля на лицевых поверхностях оболочки [9, 10].

К уравнениям (3.1) — (3.4) следует присоединить механические граничные условия теории тонких оболочек вдоль контура срединной поверхности оболочки и условия на бесконечности (1.9).

Начальные условия для механической части задачи характеризуют движение срединной поверхности оболочки в начальный момент времени; начальные условия для электродинамической части задачи, нулевые.

Теорема взаимности для двумерной теории магнитоупругости проводящих тонких оболочек (3.1) — (3.4) доказана в работах [10, 11] и имеет вид

$$\iint_\Omega(X_1*\dot u_1'-X_1'*\dot u_1+X_2*\dot u_2'-X_2'*\dot u_2-Z*\dot w'+Z'*\dot w-$$
$$-Y_1*\dot\gamma_1'+Y_1'*\dot\gamma_1-\dot\gamma_2'*Y_2+Y_2'*\dot\gamma_2)d\Omega+\int_\Gamma(\bar T*\dot u_\nu'-\bar T'*\dot u_\nu+$$
$$+\bar S*\dot u_t'-\bar S'*\dot u_t+\bar Q*\dot w'-\bar Q'*\dot w+\bar G*\dot\gamma_\nu'-\bar G'*\dot\gamma_\nu)d\Gamma+$$
$$+2h\iint_\Omega(J_{01}*\tilde E_{10}'-J_{01}'*\tilde E_{10}+J_{02}*\tilde E_{20}'-J_{02}'*\tilde E_{20})d\Omega+ \tag{3.5}$$

$$+\frac{4\pi\sigma h^2}{3\ c^2}\iint\limits_{\Omega}(J_{01}*\dot{E}'_{10}-J'_{01}*\dot{E}_{10}+J_{02}*\dot{E}'_{20}-J'_{02}*E_{20})d\Omega$$

где

$$\varphi*f=\int\limits_0^t\varphi(\alpha_1,\alpha_2,t')\cdot f(\alpha_1,\alpha_2,t-t')dt'$$

$\bar{J}_0=(J_{01},J_{02},0)$—вектор плотности внешнего (стороннего) тока.

Полученная теорема взаимности позволяет записать решение задач магнитоупругости тонких оболочек в квадратурах. При этом используется функция Грина, построенная для оболочки, нагруженной единичной нагрузкой.

Для определения перемещений срединной поверхности оболочки используем теорему взаимности (3.5).

Будем считать, что решение u'_i, w' относится к краевой задаче (3.1)—(3.4), когда X'_i, Z' представляют собой мгновенную сосредоточенную поверхностную нагрузку вида

$$X_1=\frac{1}{A_1A_2}\delta(\alpha_1-\alpha_{10})\delta(\alpha_2-\alpha_{20})\delta(t),\quad X_2=\frac{1}{A_1A_2}\delta(\alpha_1-\alpha_{10})\delta(\alpha_2-\alpha_{20})\delta(t) \qquad (3.6)$$

$$Z'=\frac{1}{A_1A_2}\delta(\alpha_1-\alpha_{10})\delta(\alpha_2-\alpha_{20})\delta(t),\quad J'_{01}=J'_{02}=0$$

Подставляя (3.6) в уравнение (3.5), получим после простых преобразований следующие представления:

$$u_1(\alpha_{i0},t)=\iint\limits_{\Omega}(X_1*\dot{u}_1^{(1)}+X_2*\dot{u}_2^{(1)}-Z*\dot{w}^{(1)}-Y_1*\dot{\gamma}_1^{(1)}-\dot{\gamma}_2^{(1)}*Y_2)d\Omega+$$

$$+\int\limits_{\Gamma}(\bar{T}*\dot{u}_\nu^{(1)}+\bar{S}*\dot{u}_t^{(1)}+\bar{Q}*\dot{w}^{(1)}+\bar{G}*\dot{\gamma}_\nu^{(1)})d\Gamma+$$

$$+2h\iint\limits_{\Omega}(J_{01}*\bar{E}_{10}^{(1)}+J_{02}*\bar{E}_{20}^{(1)})d\Omega+\frac{4\pi\sigma h^2}{3\ c^2}\iint\limits_{\Omega}(J_{01}*\dot{E}_{10}^{(1)}+J_{02}*\dot{F}_{20}^{(1)})d\Omega$$

$$u_2(\alpha_{i0},t)=\iint\limits_{\Omega}(X_1*\dot{u}_1^{(2)}+X_2*\dot{u}_2^{(2)}-Z*\dot{w}^{(2)}-Y_1*\dot{\gamma}_1^{(2)}-Y_2*\dot{\gamma}_2^{(2)})d\Omega+$$

$$+\int\limits_{\Gamma}(\bar{T}*\dot{u}_\nu^{(2)}+\bar{S}*\dot{u}_t^{(2)}+\bar{Q}*\dot{w}^{(2)}+\bar{G}*\dot{\gamma}_\nu^{(2)})d\Gamma+$$

$$+2h\iint\limits_{\Omega}(J_{01}*\bar{E}_{10}^{(2)}+J_{02}*\bar{E}_{20}^{(2)})d\Omega+\frac{4\pi\sigma h^2}{3\ c^2}\iint\limits_{\Omega}(J_{01}*\dot{E}_{10}^{(2)}+J_{02}*\dot{E}_{20}^{(2)})d\Omega \qquad (3.7)$$

$$\dot{w}(z_{i0},t)=\iint_{\Omega}(X_1*\dot{u}_1^{(3)}+X_2*\dot{u}_2^{(3)}-Z*\dot{w}^{(3)}-Y_1*\dot{\gamma}_1^{(3)}-Y_2*\dot{\gamma}_2^{(3)})d\Omega+$$

$$+\int_{\Gamma}(\bar{T}*\dot{u}_\nu^{(3)}+\tilde{S}*\dot{u}_\tau^{(3)}+\bar{Q}*\dot{w}^{(3)}+\bar{G}*\dot{\gamma}_\nu^{(3)})d\Gamma+$$

$$+2h\iint_{\Omega}(J_{01}*\bar{E}_{10}^{(3)}+J_{02}*\bar{E}_{20}^{(3)})d\Omega+\iint_{\Omega}\frac{4\pi}{3}\frac{\sigma h^2}{c^2}(J_{01}*\dot{E}_{10}^{(3)}+J_{02}*\dot{E}_{20}^{(3)})d\Omega$$

где через $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$, $\bar{E}_{i0}^{(k)}$, $k=1, 2, 3$, обозначены составляющие перемещения и электрического поля, вызванные действием каждой сосредоточенной силы (3.6) отдельно.

Формулы (3.7) представляют (как принято в литературе [7]) собой определение перемещений точек срединной поверхности оболочки в квадратурах, а в действительности, (3.7) представляют относительно указанных перемещений систему интегральных уравнений, определяющую задачу, то есть дифференциальные уравнения двумерной магнитоупругости [9, 10] заменяются эквивалентными интегральными уравнениями.

SOME CONSEQUENCES FROM THE RECIPROCITY THEOREM OF TWO-DIMENSIONAL MAGNETOELASTICITY THEORY OF CONDUCTIVE THIN SHELLS

S. O. SARKISIAN

ՀԱՂՈՐԴԻՉ ԲԱՐԱԿ ԹԱՂԱՆԹԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՉԱՓ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՓՈԽԱԴԱՐՁԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԵՏԵՎԱՆՔՆԵՐ

Ս. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ամփոփում

Հաղորդիչ բարակ թաղանթների մագնիսաառաձգականության երկչափ տեսության փոխադարձելիության թեորեմի շնորհիվ ապացուցվում է մագնիսաառաձգական տատանումների սեփական ձևերի ընդհանրացված օրթոգոնալությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.—М.: Наука, 1977, 272 с.
2. *Вайнберг Д. В., Синявский А. Л.* Расчет оболочек.—Киев: Госстройиздат УССР, 1961, 119 с.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек.—М.: Наука, 1976, 512 с.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Об ортогональности форм собственных колебаний тонкой упругой оболочки.—В сб.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Л., Судостроение, 1970, с. 121—128.

5. *Kaliski S., Nowacki W.* The reciprocity theorem of magneto-thermoelasticity.— II Real conductors. Bull. de l'acad. pol. des scien. Serie des scien. techn., 1965, v. 13, № 7, p. 377—384.
6. *Новацкий В.* Теория упругости.—М.: Мир, 1975. 872 с.
7. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек.—Киев: Наук. думка, 1983. 343 с.
8. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела.—М.: Наука, 1979. 744 с.
9. *Саркисян С. О.* К построению в целом двумерной теории колебаний проводящей тонкой оболочки методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1985, т. 38, №6, с. 21—34.
10. *Саркисян С. О.* Магнитоупругость проводящих тонких оболочек и пластин.— Докторская диссертация. Казанский гос. ун-т им. В. И. Ульянова-Ленина, 1987. 406 с.
11. *Саркисян С. О.* Теорема взаимности в магнитоупругости тонких оболочек—Механика. Межвузов. сб. научн. тр., Ереван: Ереванский ун-т, 1987, вып. 6, с. 102—111.
12. *Саркисян С. О.* Уравнение энергии и теорема единственности в магнитоупругости тонких оболочек.—Учен. зап. Ерев. ун-та, естест. науки, 1985, №2, с. 41—46.

Ленинаканский филиал Ереванского
политехнического института им. К. Маркса

Поступила в редакцию
20.X.1988