ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 2, 1990 Механика

УДК 539.3:534.1

ВОЗБУЖДЕНИЕ СДВИГОВЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ВОЛНОЙ РЕЛЕЯ

БАГДАСАРЯН Г. Е.

Известно, что в упругой среде при отсутствии магнитного поля, не могут распространяться сдвиговые поверхностные волны, а волны Релея при указанных условиях всегда существуют.

В настоящей работе показано, что в магнитомягком ферромагнитном полупространстве, при распространении в ней релеевской волны, как следствие, возбуждается сдвиговая поверхностная волна, если присутствует наклонное к плоскости распространения магнитное поле.

1. Известно, что при помещении ферромагнитного тела в магнитное поле происходит намагничивание материала, приводящее как к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве, так и к появлению массовых и поверхностных сил.

Характеристики магнитного поля представим в виде

$$\vec{H}=\vec{H}_0+\vec{h},\quad \vec{B}=\vec{B}_0+\vec{b},\quad \vec{M}=\vec{M}_0+\vec{m}$$

где $\vec{H}_0$, $\vec{B}_0$ и $\vec{M}_0$—соответственно векторы напряженности магнитного поля, магнитной индукции и намагниченности недеформированного тела; $\vec{h}$, $\vec{b}$ и $\vec{m}$—возмущения к указанным величинам, обусловленные деформацией среды. В вакууме векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ связаны соотношением $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$, где μ_0—магнитная постоянная ($\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$ Г/м), а в магнитомягком материале—соотношением $\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})=\mu_0(\vec{H}+\chi\vec{H})=$ $=\mu_0\mu_r\vec{H}$, где χ—магнитная восприимчивость, $\mu_r=\chi+1$—относительная магнитная проницаемость среды.

Невозмущенное магнитное поле во всем пространстве определяется из решения следующей задачи магнитостатики:

$$\operatorname{rot}\vec{H}_0=0,\ \operatorname{div}\vec{B}_0=0,\ \vec{n}\times[\vec{H}_0-\vec{H}_0^{(e)}]=0,\ \vec{n}\times[\vec{B}_0-\vec{B}_0^{(e)}]=0 \text{ при } (x_1,x_2,x_3)\in\Gamma$$

$$\vec{H}_0^{(e)}\to\vec{H}^0 \quad\text{при}\quad |\vec{r}|\to\infty \tag{1.1}$$

где $\vec{n}$—единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности Γ тела, $\vec{r}$—радиус-вектор, x_i—декартовые координаты рассматриваемой точки, H^0—напряженность заданного магнитного поля на бесконечности при отсутствии ферромагнитного тела; индекс „e" означает принадлежность к внешней (окружающей тела) среде, электромагнитные свойства которой эквивалентны свойствам вакуума.

Характеристики возмущенного состояния определяются из уравнений и граничных условий магнитоупругости магнитомягкого ферромагнитного тела [1, 2]. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия линеаризуются. В результате получаются следующие линейные уравнения и граничные условия возмущенного состояния, приведенные в работе [3].

Система дифференциальных уравнений магнитоупругости возмущенного состояния

$$\operatorname{div} \hat{S} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad \operatorname{rot} \vec{h} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\hat{S} = \hat{t} + \hat{T}$; $\hat{t}$ и $\hat{T}$—тензоры магнитоупругих напряжений и напряжений Максвелла соответственно, причем

$$\begin{gathered} t_{ij} = \sigma_{ij} + \mu_0 \chi H_{0i} H_{0j} + \mu_0 \chi (H_{0i} h_j + H_{0j} h_i) \\ T_{ij} = \mu_0 \left(\mu_r H_{0i} H_{0j} - \frac{1}{2} \delta_{ij} H_{0k} H_{0k} \right) + \mu_0 [\mu_r (H_{0i} h_j + H_{0j} h_i) - \delta_{ij} H_{0k} h_k] \end{gathered} \tag{1.3}$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование, δ_{ij}—символ Кронекера, σ_{ij}—компоненты тензора упругих напряжений

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{1.4}$$

λ и μ—постоянные Ляме, u_i—компоненты вектора упругих перемещений, ρ—плотность среды.

Уравнения для индуцированного в вакууме магнитного поля

$$\operatorname{rot} \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{h}^{(e)} = 0 \tag{1.5}$$

Граничные условия на поверхностях раздела двух сред

$$\begin{gathered} [S_{ij} - S_{ij}^{(e)}] n_i = 0, \quad \varepsilon_{ijk} \left\{ n_j [h_k - h_k^{(e)}] - n_m \frac{\partial u_m}{\partial x_j} [H_{0k} - H_{0k}^{(e)}] \right\} = 0 \\ n_i [b_i - b_i^{(e)}] = n_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} [B_{0i} - B_{0i}^{(e)}] \end{gathered} \tag{1.6}$$

где ε_{ijk}—символ Леви-Чивита.

2. На основе приведенных уравнений и граничных условий рассмотрим задачу распространения двумерных поверхностных волн в магнитомягком полупространстве при наличии внешнего постоянного магнитного поля. Пусть упругая изотропная магнитомягкая ферромагнитная среда занимает полубесконечную область $x_2 \leqslant 0$ (в декартовой

системе координат x_1, x_2, x_3) и находится во внешнем однородном постоянном магнитном поле, вектор напряженности которого параллелен границе среды. В области $x_2>0$, где вакуум, задан вектор магнитной индукции $\vec{B}_0^{(e)}(B_{01}^{(e)}, 0, B_{03}^{(e)})$. В этом случае задача (1.1) имеет следующее решение:

$$\vec{B}_0^{(e)}=B_{01}^{(e)}\vec{e}_1+B_{03}^{(e)}\vec{e}_3,\quad \vec{B}=B_{01}\vec{e}_1+B_{03}\vec{e}_3$$

$$\vec{H}_0^{(e)}=\mu_0^{-1}\vec{B}_0^{(e)},\quad \vec{H}=(\mu_0\mu_r)^{-1}\vec{B}_0,\quad \vec{B}=\mu_r\vec{B}_0^{(e)} \tag{2.1}$$

где $\vec{e}_k$—единичные векторы координатных осей.

Задачу будем решать в двумерной постановке, предполагая, что все искомые величины не зависят от координаты x_3. Тогда из уравнений $\operatorname{rot}\vec{h}=0$, $\operatorname{rot}\vec{h}^{(e)}=0$ и граничного условия (1.6) легко получить, что $h_3^{(e)}=h_3=0$. Учитывая это, из (1.2)—(1.4), в силу (2.1) и принятого предположения о двумерности движения, получим следующие уравнения, описывающие распространение двумерных волн в магнитомягкой ферромагнитной среде:

$$c_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+c_2^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+(c_1^2-c_2^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{2\gamma B_{01}^{(e)}}{\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\quad \Delta\varphi=0$$

$$c_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+c_1^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+(c_1^2-c_2^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{2\gamma B_{01}^{(e)}}{\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},\quad \Delta\varphi^{(e)}=0 \tag{2.2}$$

$$c_2^2\Delta u_3=\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

где $\varphi^{(e)}$ и φ—потенциалы индуцированного магнитного поля в области вакуума и в среде, соответственно, Δ—двумерный оператор Лапласа

$$c_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho},\quad c_2^2=\frac{\mu}{\rho},\quad h_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k},\quad h_k^{(e)}=\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial x_k}$$

Аналогичным образом из (1.6) получаются следующие граничные условия на плоскости $x_2=0$:

$$c_2^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\frac{\gamma[B_{01}^{(e)}]^2}{\mu_0\rho}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\gamma B_{01}^{(e)}}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0,\quad \varphi=\varphi^{(e)}$$

$$(c_1^2-2c_2^2)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_1^2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial x_2}-\mu_r\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}-\frac{\gamma B_{01}^{(e)}}{\mu_0}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=0 \tag{2.4}$$

$$c_2^2\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\gamma B_{01}^{(e)}B_{03}^{(e)}}{\mu_0\rho}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\gamma B_{03}^{(e)}}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0 \tag{2.5}$$

Из (2.2)—(2.5) следует, что: а) задача (2.2), (2.4) (плоская задача для определения u_1, u_2, φ, $\varphi^{(e)}$ или задача распространения магнитоупругих волн Релея) отделена от задачи (2.3), (2.5) (антиплоская задача для определения u_3 или задача распространения сдвиговых поверхностных волн); б) для исследования сдвиговых поверхностных волн необходимо иметь граничные значения величин u_2 и h_2, возникающие вследствие распространения магнитоупругой волны Релея; в) волны Релея в магнитомягкой среде при своем распространении генерируют сдвиговые поверхностные упругие волны (вспомним, что при отсутствии магнитного поля чисто упругая сдвиговая поверхностная волна не существует); г) существование сдвиговой поверхностной волны обусловлено также тем, что внешнее магнитное поле направлено наклонно ($B_{01}^{(e)}\neq 0$, $B_{03}^{(e)}\neq 0$) к плоскости распространения релеевской волны.

3. Рассмотрим задачу о магнитоупругих поверхностных волнах Релея, описываемые уравнениями (2.2) и граничными условиями (2.4). Решение этой задачи будем искать в виде

$$u_c = \exp\left(i(kx_1-\omega t)\right)\sum_{j=1}^{3} A_j^{(c)}\exp(\beta_j x_2), \quad c=1, 2$$

$$\varphi=\varphi_0\exp(\beta x_2)\exp(i(kx_1-\omega t)), \quad \varphi^{(e)}=\varphi_0^{(e)}\exp(\beta_e x_2)\exp(i(kx_1-\omega t)) \tag{3.1}$$

соответствующем распространению вдоль положительной оси x_1 поверхностной волны с частотой ω, волновым числом k, фазовой скоростью $c=\omega/k$ и амплитудой, зависящей от координаты x_2. Решение (3.1) соответствует волне, затухающей внутри тела, если $\beta_j>0$, $\beta>0$ и $\beta_e<0$.

Подставляя (3.1) в уравнения (2.2) и требуя, чтобы (3.1) описывало поверхностную волну, получим

$$\begin{gathered}\beta=\beta_1=-\beta_e=k, \quad \beta_2=k\sqrt{1-\theta}, \quad \beta_3=k\sqrt{1-\eta\theta}\\ A_2^{(1)}=iA_1^{(1)}, \quad \sqrt{1-\theta}A_2^{(2)}=iA_2^{(1)}, \quad A_3^{(2)}=i\sqrt{1-\eta\theta}\,A_3^{(1)}\\ 2\chi B_{01}^{(e)}\varphi_0=\mu\omega^2 A_1^{(1)}; \quad \theta=c^2c_2^{-2}, \quad \eta=c_2^2c_1^{-2}\end{gathered} \tag{3.2}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.4) для оставшихся неизвестных $A_j^{(c)}$ и $\varphi_0^{(e)}$ получим однородную систему линейных алгебраических уравнений. Из условия совместности этой системы получим следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{gathered}[1+(\chi+1)\alpha]\sqrt{(1-\theta)(1-\eta\theta)}+\chi\alpha\sqrt{1-\eta\theta}=\\ =\left(1-\frac{\theta}{2}\right)\left[1-\frac{\theta}{2}+(2\chi+1)\alpha\right], \quad \alpha=\frac{\chi[B_{01}^{(e)}]^2}{\mu_0\mu(\chi+2)}\end{gathered} \tag{3.3}$$

определяющее безразмерную фазовую скорость θ поверхностной волны.

В (3.3) параметр α характеризует напряженность внешнего магнитного поля и при $\alpha=0$, $\chi=0$ из (3.3) получается известное уравнение Релея для чисто упругих поверхностных волн. Анализ уравнения (3.3) в зависимости от параметров α и γ показывает что: а) для каждого γ и α уравнение (3.3) имеет единственный действительный положительный корень, удовлетворяющий условию $\theta<1$, то есть в любой упругой магнитомягкой среде для любого значения напряженности магнитного поля могут распространяться поверхностные волны рассматриваемого типа с единственной скоростью; б) скорости поверхностных магнитоупругих волн не зависят от частоты колебаний и поэтому эти волны, как и чисто упругие релеевские волны, распространяются без дисперсии; в) скорость распространения поверхностной волны для каждой среды (для каждого γ) с увеличением напряженности магнитного поля увеличивается, оставаясь меньше, чем скорость поперечной объемной волны.

4. На основе уравнения (2.3) и граничного условия (2.5) рассмотрим вопросы существования и распространения сдвиговых поверхностных волн. Для этого, как видно из (2.5), необходимо иметь значения величин u_2 и h_2 при $x_2=0$. Используя (3.1)—(3.3) и (2.4), получим

$$u_2(x_1, 0, t)=\theta D\cos(kx_1-\omega t), \quad h_2(x_1, 0, t)=\frac{\chi B_{01}^{(e)}k\theta}{\mu_0(\chi+2)}D\sin(kx_1-\omega t) \tag{4.1}$$

где D — произвольное постоянное.

В силу (4.1), решение задачи (2.3), (2.5), представляющее поверхностную волну, имеет вид

$$u_3=\frac{2\chi(\chi+1)B_{01}^{(e)}B_{03}^{(e)}}{\mu_0\mu(\chi+2)}\frac{\theta}{\sqrt{1-\theta}}e^{\beta_3 x_2}D\sin(kx_1-\omega t) \tag{4.2}$$

Из (4.2) видно, что если в магнитомягкой ферромагнитной среде распространяется релеевская волна ($D\neq0$), то она, при $B_{01}^{(e)}\neq0$ и $B_{03}^{(e)}\neq0$ генерирует сдвиговые поверхностные упругие волны ($u_3\neq0$). Причем амплитуда сдвиговых волн прямо пропорциональна нормальному составляющему магнитного поля $B_{03}^{(e)}$ и при напряженности магнитного поля порядка одной теслы указанная амплитуда может превышать амплитуду релеевской волны.

EXCITMENT OF SHEAR SURFACE WAVES IN SEMISPACE BY RAYLEIGH WAVE

G. E. BAGDASARIAN

ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՍԱՀՔԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԳՐԳՌՈՒՄԸ ՌԻՄԱՆԻ ԱԼԻՔԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ մագնիսապես փափուկ ֆերոմագնիսական կիսատարածությունում Ռիմանի ալիք տարածվելիս, որպես հետևանք, նրանում գրգռվում է սահքի մակերևութային ալիք, եթե առկա է տատանման հարթության նկատմամբ թեք մագնիսական դաշտ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brown* W. F. Jr Electric and Magnetic Forces—American Journal of Physics, 1951, v. 19, pp. 290—304, 333—350.
2. *Tiersten H.* F. Coupled Magnetomechanical Equations for Magnetically Saturated Insulators—J. of Match. Phisics, 1964, v. 5, № 9, pp. 1298—1318.
3. *Pao. Y.—H.* and *Yeh, C.* S. A Linear Theory for Soft Ferromagnetic Elastic Solids.—Int. Journal of Eng. Science, 1973, v. 11, pp. 415—436.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 8.VI.1988