ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 2, 1990 Механика

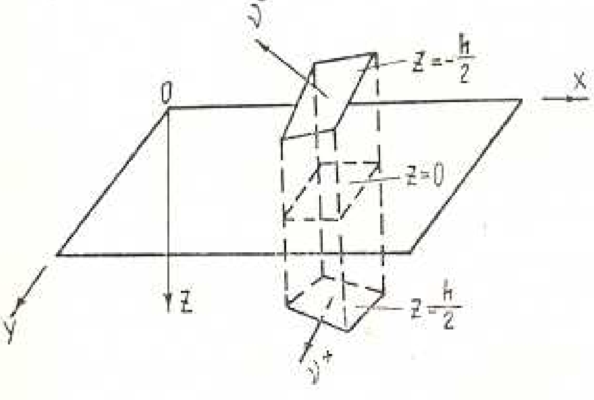
К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕНИЙ ПОПЕРЕЧНОГО НАПРАВЛЕНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ИДЕАЛЬНО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

КИРАКОСЯН Р. М.

На основе решений классической теории поперечного изгиба выводятся формулы для поперечных касательных и нормальных напряжений пластинок переменной толщины, изготовленных из идеально-пластического материала с прямолинейной или цилиндрической ортотропией. Эти формулы могут быть полезными при оценке оптимальных проектов пластинок из современных материалов, прочностные свойства которых в поперечном направлении значительно уступают свойствам продольных направлений.

1. Рассмотрим тонкую прямоугольную пластинку переменной толщины h, отнесенную к системе декартовых координат x, y, z (фиг. 1). Пластинка несет вертикальную нагрузку. Компоненты ее интенсивности, приведенные к единице площади срединной плоскости, имеют вид

$$X^{\pm} = Y^{\pm} = 0, \quad Z^{\pm} = Z^{\pm}(x, y) \tag{1.1}$$



Фиг. 1

Здесь и в дальнейшем знаками „−" и „+" будем обозначать величины, относящиеся к поверхностям пластинки $z=-h/2$ и $z=+h/2$, соответственно.

Будем считать, что пластинка изготовлена из несжимаемого идеально-пластического ортотропного материала, главные направления которого параллельны координатным осям. Поведение материала описывается законом течения, ассоциированным с поверхностью текучести Мизеса-Хилла.

Выведем формулы, позволяющие вычислить значения неосновных напряжений σ_z, τ_{xz} и τ_{yz} с помощью решений классической теории поперечного изгиба пластинок.

В рамках этой теории поверхность текучести Мизеса-Хилла можно представить уравнением [1]

$$2\Phi=(H+G)\sigma_x^2-2H\sigma_x\sigma_y+(H+F)\sigma_y^2+2N\tau_{xy}^2-1=0 \tag{1.2}$$

где

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_{sx}^2}+\frac{1}{\sigma_{sy}^2}-\frac{1}{\sigma_{sz}^2}\right),\quad F=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_{sy}^2}+\frac{1}{\sigma_{sz}^2}-\frac{1}{\sigma_{sx}^2}\right)$$

$$G=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_{sz}^2}+\frac{1}{\sigma_{sx}^2}-\frac{1}{\sigma_{sy}^2}\right),\quad N=\frac{1}{2\tau_{sxy}^2} \tag{1.3}$$

Через σ_{sx}, σ_{sy} и σ_{sz} обозначены пределы текучести материала по направлениям координатных осей x, y и z соответственно, а τ_{sxy}—предел текучести при чистом сдвиге в плоскости xy.

Из ассоциированного закона течения для компонент скоростей деформации имеем

$$\varepsilon_x=-z\varkappa_x=\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_x}=\lambda\left[(H+G)\sigma_x-H\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y=-z\varkappa_y=\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_y}=\lambda\left[(H+F)\sigma_y-H\sigma_x\right] \tag{1.4}$$

$$\gamma_{xy}=-2z\varkappa_{xy}=\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\tau_{xy}}=2\lambda N\tau_{xy}$$

Здесь λ—неотрицательный параметр, $\varkappa_x$, $\varkappa_y$ и $\varkappa_{xy}$—скорости изменения кривизн срединной плоскости пластинки, которые выражаются через скорость прогиба w формулами [2]

$$\varkappa_x=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \varkappa_y=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \varkappa_{xy}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \tag{1.5}$$

Из (1.4) для основных напряжений пластинки σ_x, σ_y и τ_{xy} находим

$$\sigma_x=-\frac{z}{\lambda\Delta}\left[(H+F)\varkappa_x+H\varkappa_y\right],\quad \sigma_y=-\frac{z}{\lambda\Delta}\left[(H+G)\varkappa_y+H\varkappa_x\right]$$

$$\tau_{xy}=-\frac{z}{\lambda N}\varkappa_{xy} \tag{1.6}$$

где

$$\Delta=FG+GH+HF \tag{1.7}$$

Подставляя (1.6) в условие пластичности (1.3), для параметра получим

$$\lambda = |z| D \tag{1.8}$$

где

$$D = \sqrt{\frac{1}{\Delta}\left[(H+F)\varkappa_x^2 + 2H\varkappa_x\varkappa_y + (H+G)\varkappa_{xy}^2 + \frac{2\Delta}{N}\varkappa_{xy}^2\right]} \tag{1.9}$$

С учетом (1.8) выражения напряжений (1.6) можно представить в виде

$$\sigma_x = -\operatorname{sign} z \frac{(H+F)\varkappa_x + H\varkappa_y}{D\Delta}, \quad \sigma_y = -\operatorname{sign} z \frac{(H+G)\varkappa_y + H\varkappa_x}{D\Delta}$$

$$\tau_{xy} = -\operatorname{sign} z \frac{\varkappa_{xy}}{DN} \tag{1.10}$$

Направляющие косинусы внешних нормалей поверхностей пластинки ν^- и ν^+ определяются формулами [3]

$$l^- = \cos(\nu^-; \hat{x}) = l^+ = \cos(\nu^+; \hat{x}) = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\sqrt{4 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}$$

$$m^- = \cos(\nu^-; \hat{y}) = m^+ = \cos(\nu^+; \hat{y}) = -\frac{\frac{\partial h}{\partial y}}{\sqrt{4 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}$$

(1.11)

$$n^- = \cos(\nu^-; \hat{z}) = -n^+ = -\cos(\nu^+; \hat{z}) = -\frac{2}{\sqrt{4 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}$$

Используя (1.1), (1.11) и учитывая неосновные напряжения, поверхностные условия пластинки можно представить в виде

при $z = -h/2$

$$\sigma_x^- l^- + \tau_{xy}^- m^- + \tau_{xz}^- n^- = X^- |n^-| = 0, \quad \tau_{xy}^- l^- + \sigma_y^- m^- + \tau_{yz}^- n^- = Y^- |n^-| = 0$$

(1.12)

$$\tau_{xz}^- l^- + \tau_{xz}^- m^- + \sigma_z^- n^- = Z^- |n^-| = \frac{2Z^-}{\sqrt{4 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}$$

при $z = +h/2$

$$\sigma_x^+ l^+ + \tau_{xy}^+ m^+ + \tau_{xz}^+ n^+ = X^+ n^+ = 0, \quad \tau_{xy}^+ l^+ + \sigma_y^+ m^+ + \tau_{yz}^+ n^+ = Y^+ n^+ = 0$$

(1.13

$$\tau_{xz}^+ l^+ + \tau_{yz}^+ m^+ + \sigma_z^+ n^+ = Z^+ n^+ = \frac{2Z^+}{\sqrt{4 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}$$

Из первых двух условий (1.12) и (1.13) с учетом (1.10) и (1.11) для поверхностных значений касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} получим

$$\tau_{xz}^{-}=\tau_{xz}^{+}=-\frac{1}{2D\Delta}\left\{[(H+F)\varkappa_x+H\varkappa_y]\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\Delta}{N}\varkappa_{xy}\frac{\partial h}{\partial y}\right\}$$

$$\tau_{yz}^{-}=\tau_{yz}^{+}=-\frac{1}{2D\Delta}\left\{[(H+G)\varkappa_y+H\varkappa_x]\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\Delta}{N}\varkappa_{xy}\frac{\partial h}{\partial x}\right\} \qquad (1.14)$$

Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды при отсутствии объемных сил имеют вид [2]

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0 \qquad (1.15)$$

Исключив из рассмотрения точки срединной плоскости $z=0$ для областей пластинки $|z|>0$, с учетом (1.10) можно написать

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}=-\operatorname{sign}z\cdot\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(H+F)\varkappa_x+H\varkappa_y}{D}\right],\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=-\operatorname{sign}z\,\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)$$

$$(1.16)$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=-\operatorname{sign}z\,\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right),\quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=-\operatorname{sign}z\,\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(H+G)\varkappa_y+H\varkappa_x}{D}\right]$$

Имея в виду эти выражения, из первых двух уравнений равновесия (1.15) при $|z|>0$ находим

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=\operatorname{sign}z\left\{\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(H+F)\varkappa_x+H\varkappa_y}{D}\right]+\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}$$

$$(1.17)$$

$$\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=\operatorname{sign}z\left\{\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(H+G)\varkappa_y+H\varkappa_x}{D}\right]+\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}$$

Интегрировав (1.17) в областях $z<0$ и $z>0$, получим:

при $z<0$

$$\tau_{xz}=C_1^{-}(x,y)-z\left\{\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(H+F)\varkappa_x+H\varkappa_y}{D}\right]+\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}$$

$$(1.18)$$

$$\tau_{yz}=C_2^{-}(x,y)-z\left\{\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(H+G)\varkappa_y+H\varkappa_x}{D}\right]+\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\},$$

при $z>0$

$$\tau_{xz}=C_1^{+}(x,y)+z\left\{\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(H+F)\varkappa_x+H\varkappa_y}{D}\right]+\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}$$

$$(1.19)$$

$$\tau_{yz}=C_2^{+}(x,y)+z\left\{\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(H+G)\varkappa_y+H\varkappa_x}{D}\right]+\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}$$

где C_1^-, C_1^+ и C_2^-, C_2^+ — функции интегрирования, определяющиеся из условий на поверхностях $z=\mp h/2$.

Используя (1.18) и (1.19), из (1.14) находим

$$C_1^-=C_1^+=-\frac{h}{2\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(H+F)\varkappa_x+H\varkappa_y}{D}\right]+\frac{\Delta}{N}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2D\Delta}\left\{[(H+F)\varkappa_x+H\varkappa_y]\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\Delta}{N}\varkappa_{xy}\frac{\partial h}{\partial y}\right\} \qquad (1.20)$$

$$C_2^-=C_2^+=-\frac{h}{2\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(H+G)\varkappa_y+H\varkappa_x}{D}\right]+\frac{\Delta}{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2D\Delta}\left\{[(H+G)\varkappa_y+H\varkappa_x]\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\Delta}{N}\varkappa_{xy}\frac{\partial h}{\partial x}\right\}$$

Подставляя (1.20) в (1.18) и (1.19), для поперечных касательных напряжений в областях $|z|>0$ получим

$$\tau_{xz}=-\frac{h-2|z|}{2\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(H+F)\varkappa_x+H\varkappa_y}{D}\right]+\frac{\Delta}{N}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2D\Delta}\left\{[(H+F)\varkappa_x+H\varkappa_y]\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\Delta}{N}\varkappa_{xy}\frac{\partial h}{\partial y}\right\}$$

$$(1.21)$$

$$\tau_{yz}=-\frac{h-2|z|}{2\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(H+G)\varkappa_y+H\varkappa_x}{D}\right]+\frac{\Delta}{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2D\Delta}\left\{[(H+G)\varkappa_y+H\varkappa_x]\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\Delta}{N}\varkappa_{xy}\frac{\partial h}{\partial x}\right\}$$

Отметим, что предельные значения τ_{xz} и τ_{yz} при $z\to\mp 0$ совпадают, и на срединной плоскости имеем

$$\tau_{xz}^0=\tau_{xz}|_{z=0}=-\frac{h}{2\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(H+F)\varkappa_x+H\varkappa_y}{D}\right]+\frac{\Delta}{N}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2D\Delta}\left\{[(H+F)\varkappa_x+H\varkappa_y]\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\Delta}{N}\varkappa_{xy}\frac{\partial h}{\partial y}\right\}$$

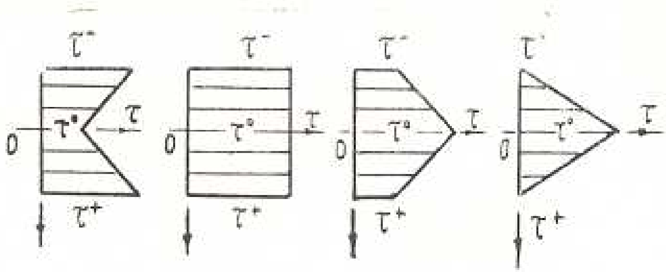
$$(1.22)$$

$$\tau_{yz}^0=\tau_{yz}|_{z=0}=-\frac{h}{2\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(H+G)\varkappa_y+H\varkappa_x}{D}\right]+\frac{\Delta}{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2D\Delta}\left\{[(H+G)\varkappa_y+H\varkappa_x]\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\Delta}{N}\varkappa_{xy}\frac{\partial h}{\partial x}\right\}$$

Значения же этих напряжений на поверхностях $z=\mp h/2$ определяются формулами (1.14).

Таким образом, τ_{xz} и τ_{yz} являются непрерывными, четными, кусочно-линейными функциями по z. Возможные качественные формы их графиков представлены на фиг. 2.



Фиг. 2

Из третьего уравнения равновесия (1.15) с учетом (1.21) мож
написать

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -|z| A_1(x, y) + A_2(x, y) \qquad (1.23)$$

где

$$A_1(x, y) = \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{(H+F)\varkappa_x + H\varkappa_y}{D}\right] + \frac{2\Delta}{N}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{(H+G)\varkappa_y + H\varkappa_x}{D}\right]\right\}$$

$$A_2(x, y) = \frac{h}{2} A_1(x, y) + \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(H+F)\varkappa_x + H\varkappa_y}{D}\right] + \frac{\Delta}{N}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(H+G)\varkappa_y + H\varkappa_x}{D}\right] + \frac{\Delta}{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{2D\Delta}\left\{[(H+F)\varkappa_x + H\varkappa_y]\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{2\Delta}{N}\varkappa_{xy}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + [(H+G)\varkappa_y + H\varkappa_x]\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right\} \qquad (1.24)$$

Интегрировав (1.23) по z, находим:

$$\text{при} \quad z<0 \quad \sigma_z = C_3^-(x, y) + \frac{z^2}{2} A_1 + z A_2 \qquad (1.25)$$

$$\text{при} \quad z>0 \quad \sigma_z = C_3^+(x, y) - \frac{z^2}{2} A_1 + z A_2 \qquad (1.26)$$

где C_3^- и C_3^+—функции интегрирования.

Имея в виду, что при $z \to \mp 0$ напряжение σ_z должно быть н
прерывным, из (1.25) и (1.26) заключаем

$$C_3^- = C_3^+ \qquad (1.27)$$

С целью их определения обратимся к третьим поверхностным ус
ловиям (1.12) и (1.13). С учетом (1.11) эти условия представим
виде

$$\sigma_z = -Z^- - \frac{1}{2}\tau_{xz}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2}\tau_{yz}\frac{\partial h}{\partial y} \qquad (1.28)$$

$$\sigma_z^+ = Z^+ + \frac{1}{2}\tau^+_{xz}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}\tau^+_{yz}\frac{\partial h}{\partial y}$$

Используя (1.27), (1.28), из (1.25) и (1.26) получим

$$\begin{aligned} &\frac{h^2}{8}A_1 - \frac{h}{2}A_2 + C_3^{\mp} = -Z^- - \frac{1}{2}\tau^-_{xz}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2}\tau^-_{yz}\frac{\partial h}{\partial y} \\ &-\frac{h^2}{8}A_1 + \frac{h}{2}A_2 + C_3^{\mp} = Z^+ + \frac{1}{2}\tau^+_{xz}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}\tau^+_{yz}\frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \tag{1.29}$$

Сложив равенства (1.29), находим

$$C^{\mp} = \frac{Z^+ - Z^-}{2} \tag{1,30}$$

Объединив (1.25) и (1.26), с учетом (1.24), (1.30) для нормального напряжения σ_z окончательно получим

$$\begin{aligned} \sigma_z = {} & \frac{Z^+ - Z^-}{2} - \frac{z(|z|-h)}{2\Delta}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{(H+F)\varkappa_x + H\varkappa_y}{D}\right] + \frac{2\Delta}{N}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{(H+G)\varkappa_y + H\varkappa_x}{D}\right]\right\} + \frac{z}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(H+F)\varkappa_x + H\varkappa_y}{D}\right] + \frac{\Delta}{N}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}\frac{\partial h}{\partial x} + \\ & + \frac{z}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(H+G)\varkappa_y + H\varkappa_x}{D}\right] + \frac{\Delta}{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{z}{2D\Delta}\left\{[(H+F)\varkappa_x + H\varkappa_y]\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2\Delta}{N}\varkappa_{xy}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + [(H+G)\varkappa_y + H\varkappa_x]\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right\} \end{aligned} \tag{1.31}$$

Вычитая из второго первое равенство системы (1.29) и имея в виду (1.14), (1.24), приходим к результату

$$\begin{aligned} & \frac{h^2}{4\Delta}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{(H+F)\varkappa_x + H\varkappa_y}{D}\right] + \frac{2\Delta}{N}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{(H+G)\varkappa_y + H\varkappa_x}{D}\right]\right\} + \\ & + \frac{h}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(H+F)\varkappa_x + H\varkappa_y}{D}\right] + \frac{\Delta}{N}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(H+G)\varkappa_y + H\varkappa_x}{D}\right] + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta}{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varkappa_{xy}}{D}\right)\right\}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{h}{2D\Delta}\left\{[(H+F)\varkappa_x + H\varkappa_y]\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{2\Delta}{N}\varkappa_{xy}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \right. \\ & \left. + [(H+G)\varkappa_y + H\varkappa_x]\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right\} + \frac{1}{2D\Delta}\left\{[(H+F)\varkappa_x + H\varkappa_y]\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2\Delta}{N}\varkappa_{xy}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} + [(H+G)\varkappa_y + H\varkappa_x]\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right\} = Z^+ + Z^- \end{aligned}$$

Это и есть дифференциальное уравнение равновесия пластинки. Как и следовало ожидать, оно совпадает с уравнением равновесия, полученным традиционным способом теории пластинок, то есть способом рассмотрения равновесия моментов дифференциального элемента срединной плоскости.

2. Пусть пластинка переменной толщины h отнесена к системе цилиндрических координат r, ϑ, z. Материал является несжимаемым, идеально-пластическим и ортотропным. Его главные направления совпадают с направлениями координатных линий. Поведение материала описывается законом течения, ассоциированным с поверхностью текучести Мизеса-Хилла. Нагрузка пластинки вертикальная, граничные условия произвольны. Проделав выкладки, аналогичные выкладкам предыдущего пункта, для поперечных касательных и нормальных напряжений получим следующие формулы:

$$\tau_{rz} = -\frac{h-2|z|}{2\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{(H+F)\varkappa_r+H\varkappa_\vartheta}{D}\right]+\frac{\Delta}{N}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\varkappa_{r\vartheta}}{D}\right)+\frac{1}{r}\frac{F\varkappa_r-G\varkappa_\vartheta}{D}\right\}-$$

$$-\frac{1}{2D\Delta}\left\{\left[(H+F)\varkappa_r+H\varkappa_\vartheta\right]\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{\Delta}{N}\varkappa_{r\vartheta}\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial\vartheta}\right\} \tag{2.1}$$

$$\tau_{\vartheta z}=-\frac{h-2|z|}{2\Delta}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{(H+G)\varkappa_\vartheta+H\varkappa_r}{D}\right]+\frac{\Delta}{N}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varkappa_{r\vartheta}}{D}\right)+\frac{2\Delta}{N}\frac{1}{r}\frac{\varkappa_{r\vartheta}}{D}\right\}-$$

$$-\frac{1}{2D\Delta}\left\{\left[(H+G)\varkappa_\vartheta+H\varkappa_r\right]\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial\vartheta}+\frac{\Delta}{N}\varkappa_{r\vartheta}\frac{\partial h}{\partial r}\right\} \tag{2.2}$$

$$\sigma_z=\frac{Z^+-Z^-}{2}-\frac{z(|z|-h)}{2\Delta}\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\frac{(H+F)\varkappa_r+H\varkappa_\vartheta}{D}\right]+\frac{2\Delta}{Nr}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\vartheta}\left(\frac{\varkappa_{r\vartheta}}{D}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{Dr}\frac{\partial}{\partial r}(F\varkappa_r-G\varkappa_\vartheta)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{(H+F)\varkappa_r+H\varkappa_\vartheta}{D}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\left[\frac{(H+G)\varkappa_\vartheta+H\varkappa_r}{D}\right]+$$

$$\left.+\frac{2\Delta}{Nr^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\varkappa_{r\vartheta}}{D}\right)\right\}+\frac{z}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{(H+F)\varkappa_r+H\varkappa_\vartheta}{D}\right]+\frac{\Delta}{N}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\varkappa_{r\vartheta}}{D}\right)+\frac{F\varkappa_r-G\varkappa_\vartheta}{2rD}+\right.$$

$$\tag{2.3}$$

$$+\left.\frac{1}{2rD}\left[(H+F)\varkappa_r+H\varkappa_\vartheta\right]\right\}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{z}{\Delta}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{(H+G)\varkappa_\vartheta+H\varkappa_r}{D}\right]+\frac{\Delta}{N}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varkappa_{r\vartheta}}{D}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\Delta}{N}\frac{1}{r}\frac{\varkappa_{r\vartheta}}{D}\right\}\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial\vartheta}+\frac{z}{2D\Delta}\left\{\left[(H+F)\varkappa_r+H\varkappa_\vartheta\right]\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{2\Delta}{N}\varkappa_{r\vartheta}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\vartheta}+\right.$$

$$\left.+\left[(H+G)\varkappa_\vartheta+H\varkappa_r\right]\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\vartheta^2}\right\}$$

Здесь $\varkappa_r$, $\varkappa_\vartheta$ и $\varkappa_{r\vartheta}$—скорости изменения кривизн срединной плоскости пластинки, которые выражаются через скорость прогиба по формулам [2]

$$\varkappa_r=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2},\quad \varkappa_\vartheta=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\vartheta^2}\right);\quad \varkappa_{r\vartheta}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\vartheta}-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\vartheta}\right)\quad \ldots$$

Дифференциальное уравнение равновесия пластинки имеет вид

$$
\frac{h^2}{4}\left\{\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\frac{(H+F)\varkappa_r+H\varkappa_\vartheta}{D}\right]+\frac{1}{Nr}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\vartheta}\left(\frac{\varkappa_{r\vartheta}}{D}\right)+\frac{1}{Dr\Delta}\frac{\partial}{\partial r}(F\varkappa_r-G\varkappa_\vartheta)+\right.
$$

$$
+\frac{1}{r\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{(H+F)\varkappa_r+H\varkappa_\vartheta}{D}\right]+\frac{1}{r^2\Delta}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\left[\frac{(H+G)\varkappa_\vartheta+H\varkappa_r}{D}\right]+\frac{1}{Nr^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\varkappa_{r\vartheta}}{D}\right)\Bigg\}+
$$

$$
+\frac{1}{2}\left\{\frac{2h}{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{(H+F)\varkappa_r+H\varkappa_\vartheta}{D}\right]+\frac{h}{Nr}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\varkappa_{r\vartheta}}{D}\right)+\frac{h}{rD\Delta}(F\varkappa_r-G\varkappa_\vartheta)+\right.
$$

$$
+\frac{h}{Dr\Delta}[(H+F)\varkappa_r+H\varkappa_\vartheta]+\frac{1}{D\Delta}[(H+F)\varkappa_r+H\varkappa_\vartheta]\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{\varkappa_{r\vartheta}}{2NDr}\frac{\partial h}{\partial\vartheta}\Bigg\}\frac{\partial h}{\partial r}+
$$

$$
+\frac{1}{2}\left\{\frac{2h}{r\Delta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{(H+G)\varkappa_\vartheta+H\varkappa_r}{D}\right]+\frac{h}{N}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varkappa_{r\vartheta}}{D}\right)+\frac{h}{Nr}\frac{\varkappa_{r\vartheta}}{D}+\right. \tag{2.5}
$$

$$
+\frac{1}{D\Delta}[(H+G)\varkappa_\vartheta+H\varkappa_r]\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial\vartheta}+\frac{1}{2N}\frac{\varkappa_{r\vartheta}}{D}\frac{\partial h}{\partial r}\Bigg\}\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial\vartheta}+\frac{h}{2D\Delta}[(H+F)\varkappa_r+H\varkappa_\vartheta]\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+
$$

$$
+\frac{h}{2ND}\varkappa_{r\vartheta}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\vartheta}+\frac{h}{2r^2\Delta D}[(H+G)\varkappa_\vartheta+H\varkappa_r]\frac{\partial^2 h}{\partial\vartheta^2}=Z^++Z^-
$$

ON DETERMINATION OF STRESSES OF CROSS DIRECTION FOR VARIABLE THICKNESS ORTHOTROP IDEAL-PLASTIC PLATES

R. M. KIRAKOSIAN

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՀԱՍՏՈՒԹՅԱՆ ԻԴԵԱԼԱԿԱՆ ՊԼԱՍՏԻԿ ՍԱԼԵՐԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՈՒՂՂՈՒԹՅԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ծռման դասական տեսության լուծումների հիման վրա արտածվում են փոփոխական հաստության ուղղագիծ և գլանային օրթոտրոպ իդեալական պլաստիկ սալերի լայնական շոշափող և նորմալ լարումների բանաձևերը։ Այդ բանաձևերը կարող են օգտակար լինել լայնական ուղղությամբ ամրության վատ հատկությամբ օժտված ժամանակակից նյութերից պատրաստված սալերի օպտիմալ նախագծերը գնահատելիս։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести.—М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин.—М.: Наука, 1987. 360 с.
3. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии.—М.: Гостехиздат, 1956. 420 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
17.III.1989