ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 2, 1990 Механика

УДК 539.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СЖАТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА (КМ) ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ

ГНУНИ В. В.

В работе для цилиндрической оболочки при заданных габаритных размерах (l—длина, R—радиус), сжатой силой P приводится решение следующей задачи: найти оболочку наименьшей постоянной толщины h при требовании одновременного обеспечения прочности и устойчивости.

Предполагается, что оболочка изготовлена из монослоев ортотропного КМ, уложенных поочередно под углами $\pm\varphi$ к оси оболочки.

1. Предварительно рассматривается задача определения толщины оболочки $h_{\text{пр}}$ из условия прочности при заданном значении сжимающей силы P. Для простоты выкладок условие прочности принимается в простейшей форме [1]

$$\frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{B1}^2}+\frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{B2}^2}-\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2}+\frac{\sigma_{12}^2}{\tau_{B0}^2}\leqslant 1 \tag{1.1}$$

где

$$\sigma_{11}=-\frac{P}{2\pi Rh}(\cos^2\varphi+L\sin 2\varphi),\quad \sigma_{22}=-\frac{P}{2\pi Rh}(\sin^2\varphi-L\sin 2\varphi) \tag{1.2}$$

$$\sigma_{12}=\frac{P}{2\pi Rh}\left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi-L\cos 2\varphi\right),\quad L=\frac{B_{16}B_{22}-B_{12}B_{26}}{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}$$

σ_{ik}—напряжения в главных физических направлениях монослоя, σ_{B1}, σ_{B2}, τ_{B0}—допустимые напряжения; B_{ik}—коэффициенты упругости монослоя в главных геометрических направлениях, выражающиеся через коэффициенты упругости монослоя в главных физических направлениях B_{ik}^0 обычными формулами поворота [2—4].

Следует отметить, что алгоритм решения задачи допускает использование и более сложных условий взамен (1.1).

Из условия прочности (1.1) при (1.2) получается следующее значение расчетной толщины оболочки:

$$h_{\text{пр}}=\frac{A(\varphi)}{2\pi R\sigma_{B1}}P \tag{1.3}$$

где

$$A(\varphi)=\Big[(\cos^2\varphi+L\sin 2\varphi)(\cos 2\varphi+2L\sin 2\varphi)+\frac{\sigma^2_{B1}}{\sigma^2_{B2}}(\sin^2\varphi-L\sin 2\varphi)^2+$$

$$+\frac{\sigma^2_{B1}}{\sigma^2_{B0}}\Big(\frac{1}{2}\sin 2\varphi-L\cos 2\varphi\Big)^2\Big]^{1/2} \tag{1.4}$$

причем,

$$h^0_{\text{пр}}=\min_{\varphi} h_{\text{пр}}(\varphi)=h_{\text{пр}}(0)=\frac{P}{2\pi R\sigma_{B1}} \tag{1.5}$$

2. Ниже рассматривается задача проектирования оптимальной оболочки при совместных ограничениях на прочность и устойчивость в зависимости от длины оболочки.

а. *Оболочка средней длины.* В случае шарнирного закрепления торцов оболочки, сжатой силой P, для расчетной толщины из условия устойчивости получается [5]

$$h_{\text{уст}}=\sqrt[4]{\frac{3P^2}{4\pi^2(B_{11}B_{22}-B^2_{12})}} \tag{2.1}$$

при $B_2\geq B_3$ и

$$h_{\text{уст}}=\sqrt[4]{\frac{3P^2(2\sqrt{B_{11}B_{22}}+B_3)}{4\pi^2(B_{11}B_{22}-B^2_{12})(2\sqrt{B_{11}B_{22}}+B_2)}} \tag{2.2}$$

при $B_2<B_3$.

Здесь приняты обозначения

$$B_2=2(B_{12}+2B_{66}),\quad B_3=\frac{B_{11}B_{22}-B^2_{12}}{B_{66}}-2B_{12} \tag{2.3}$$

Наименьшее по φ значение $h_{\text{уст}}$ достигается для того значения $\varphi=\varphi_0$, при котором $B_2=B_3$ и

$$h^0_{\text{уст}}=\min_{\varphi} h_{\text{уст}}(\varphi)=h_{\text{уст}}(\varphi_0)=\sqrt[4]{\frac{3P^2}{4\pi^2[B_{11}(\varphi_0)B_{22}(\varphi_0)-B^2_{12}(\varphi_0)]}} \tag{2.4}$$

где

$$\varphi_0=\frac{1}{2}\arccos\sqrt{1+A-\sqrt{A^2+B}},\quad \varphi_0\in[0;90^\circ] \tag{2.5}$$

$$A=\frac{1}{16b_2^2}[B^0_{11}B^0_{22}-(B^0_{12})^2-(B^0_{11}+B^0_{22}+2B^0_{12})B^0_{66}+4(B^0_{12}+3B^0_{66})b_2]$$

$$B=\frac{1}{8b_2^2}[B^0_{11}B^0_{22}-(B^0_{12})^2-4(B^0_{12}+B^0_{66})B^0_{66}],\quad b_2=\frac{1}{4}[B^0_{11}+B^0_{22}-2(B^0_{12}+2B^0_{66})]$$

Нетрудно показать, что на отрезке $[0;P_1]$ активным является ограничение на устойчивость. Расчетная толщина $h_p=h^0_{\text{уст}}=h_{\text{уст}}(\varphi_0)$

определяется по формуле (2.4), а оптимальный угол φ_0—по формуле (2.5).

Здесь P_1 определяется из условия $h^0_{уст}=h_{уст}(\varphi_0)=h_{пр}(\varphi_0)$

$$P_1=\frac{2\pi R^2\sigma^2_{B1}}{A^2(\varphi_0)}\sqrt{\frac{3}{B_{11}(\varphi_0)B_{22}(\varphi_0)-B^2_{12}(\varphi_0)}} \tag{2.6}$$

При $P\geqslant P_2$ активным является ограничение на прочность. Расчетная толщина $h_{пр}=h^0_{пр}=h_{пр}(0)$ определяется по формуле (1.5). Значение P_2 определяется из условия $h^0_{пр}=h_{пр}(0)=h_{уст}(0)$

$$P_2=2\pi R^2\sigma^2_{B1}\sqrt{\frac{3[2\sqrt{B^0_{11}B^0_{22}}+B_3(0)]}{[B^0_{11}B^0_{22}-(B^0_{12})^2][2\sqrt{B^0_{11}B^0_{22}}+B_2(0)]}} \tag{2.7}$$

В интервале $(P_1;\ P_2)$ оптимальный угол укладки монослоев в пакете оболочки по толщине определяется из условия

$$h_{уст}(\varphi)=h_{пр}(\varphi) \tag{2.8}$$

В табл. 1 для оболочки, изготовленной из однонаправленного стеклопластика с характеристиками [1.6]

$$B^0_{22}=0{,}33\cdot B^0_{11},\quad B^0_{12}=0{,}082\cdot B^0_{11},\quad B_{66}=0{,}16\cdot B^0_{11}$$

$$\sigma_{B1}=1{,}9\cdot 10^{-2}\cdot B^0_{11},\ \sigma_{B2}=0{,}25\cdot 10^{-2}\cdot B^0_{11},\ \tau_B=0{,}075\cdot 10^{-2}B^0_{11}$$

приводятся значения $\bar{h}_p$ и $\varphi_{опт}$ в зависимости от $\bar{P}$.

Таблица 1

$\bar{P}$	0,451	0,645	0,965	1,49	2,37	3,93	6,67	10,8	13,4	16,0
$\bar{h}$	1,15	1,44	1,79	2,26	2,90	3,78	4,98	6,36	7,11	8,49
φ°	19	19	16	13,6	10,8	8,1	5,4	2,7	0	0

Здесь введены обозначения

$$\bar{P}=\frac{10^4 P}{2\pi B^0_{11}R^2},\quad \bar{h}=100\,\frac{h}{R}$$

Отметим, что в рассмотренном примере

$$\bar{P}_1=0{,}645,\quad \bar{h}_1=1{,}44;\quad \bar{P}_2=13{,}4;\quad \bar{h}_2=7{,}11$$

6. *Короткие оболочки*. В случае весьма коротких оболочек ($l/R\ll 1$)

$$h_{уст}=\frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{6Pl^2}{RB_{11}(\varphi)}},\quad h_{пр}=\frac{PA(\varphi)}{2\pi R\sigma_{B1}} \tag{2.9}$$

и очевидно, что $h_{уст}(\varphi)$ и $h_{пр}(\varphi)$ достигают своих наименьших значений при $\varphi=0$. Таким образом, оптимальным углом укладки монослоев является угол $\varphi=0$ для всех P, причем расчетная толщина

$$h_р = h_{уст}(0) = \frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{6Pl^2}{RB_{11}^0}} \quad \text{при} \quad P \leqslant P_1 \tag{2.10}$$

$$h_р = h_{пр}(0) = \frac{P}{2\pi R\sigma_{B1}} \quad \text{при} \quad P > P_1 \tag{2.11}$$

где P_1 определяется из условия $h_{уст}(0)=h_{пр}(0)$

$$P_1 = 4Rl\sigma_{B1}\sqrt{\frac{3\sigma_{B1}}{B_{11}^0}} \tag{2.12}$$

в. *Длинные оболочки.* В случае длинных оболочек [7—9]

$$h_{уст} = \sqrt{\frac{5P}{2\pi\sqrt{3B_{11}(\varphi)B_{22}(\varphi)}}} \tag{2.13}$$

При

$$B_{11}^0 B_{22}^0 \geqslant \frac{1}{16}[B_{11}^0 + B_{22}^0 + 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0)]^2$$

наименьшее по φ значение $h_{уст}$ достигается при $\varphi=0$ и $\varphi=90°$

$$\min_{\varphi} h_{уст}(\varphi) = \sqrt{\frac{5P}{2\pi\sqrt{B_{11}^0 B_{22}^0}}} \tag{2.14}$$

Так как

$$h_{пр}(\varphi) = \frac{PA(\varphi)}{2\pi R\sigma_{B1}}$$

принимает наименьшее значение при $\varphi=0$, то очевидно $\varphi_{опт}=0$ для всех P, причем

$$h_р = h_{уст}(0) = \sqrt{\frac{5P}{2\pi\sqrt{B_{11}^0 B_{22}^0}}} \quad \text{при} \quad P \leqslant P_1 \tag{2.15}$$

и

$$h_р = h_{пр}(0) = \frac{P}{2\pi R\sigma_{B1}} \quad \text{при} \quad P > P_1 \tag{2.16}$$

где

$$P_1 = \frac{10\pi R^2\sigma_{B1}^2}{\sqrt{3B_{11}^0 B_{22}^0}} \tag{2.17}$$

В случае, когда

$$B_{11}^0 B_{22}^0 < \frac{1}{16}[B_{11}^0 + B_{22}^0 + 2(B_{12}^0 + 2B_{66}^0)]^2$$

наименьшее по φ значение $h_{уст}(\varphi)$ достигается при $\varphi = 45°$. Картина усложняется и становится похожей на случай оболочки средней длины. В этом случае при $0 < P \leqslant P_1$

$$h_p = h_{уст}(45^\circ) = \sqrt{\frac{10P}{\sqrt{3}\pi[B^0_{11} + B^0_{22} + 2(B^0_{12} + 2B^0_{66})]}} \tag{2.18}$$

а при $P \geqslant P_2$

$$h_p = h_{пр}(0) = \frac{P}{2\pi R \sigma_{B1}} \tag{2.19}$$

где

$$P_1 = \frac{40\pi R^2 \sigma^2_{B1}}{\sqrt{3} A(45^\circ)[B^0_{11} + B^0_{22} + 2(B^0_{12} + 2B^0_{66})]}; \quad P_2 = \frac{10\pi R^2 \sigma^2_{B1}}{\sqrt{3B^0_{11}B^0_{22}}} \tag{2.20}$$

Для каждого P из интервала (P_1, P_2) оптимальный угол $\varphi_{опт}$ определяется из условия $h_{уст}(\varphi) = h_{пр}(\varphi)$, причем $0 < \varphi_{опт} < 45^\circ$.

г. *Весьма длинные оболочки.* В этом случае наименьшие значения $h_{уст}$ и $h_{пр}$ достигаются при $\varphi = 0$ и

$$h_{уст} = \frac{Pl^2}{\pi^3 R^3 E_1(0)}, \quad h_{пр} = \frac{P}{2\pi R \sigma_{B1}} \tag{2.21}$$

Здесь при

$$\frac{l}{R} = \pi \sqrt{\frac{E_1}{\sigma_{B1}}}$$

получается, что $h_{уст} = h_{пр}$. В других случаях

$$h_p = h_{уст} \quad \text{при} \quad \frac{l}{R} > \pi \sqrt{\frac{E_1}{\sigma_{B1}}}; \qquad h_p = h_{пр} \quad \text{при} \quad \frac{l}{R} < \pi \sqrt{\frac{E_1}{\sigma_{B1}}}$$

OPTIMAL DESIGN OF THE COMPRESSED CYLINDRICAL SHELL FROM COMPOSITE MATERIAL UNDER RESTRICTIONS ON STABILITY AND STRENGTH

V. V. GNUNY

ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՆՅՈՒԹԻՑ (ԿՆ) ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ՍԵՂՄՎԱԾ ՕՊՏԻՄԱԼ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՈՒՄՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Վ. Վ. ԳՆՈՒՆԻ

Աշխատանքում տրված է կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված սեղմված փակ գլանային թաղանթի օպտիմալ նախագիծը, ամրության և կայունության սահմանափակումների դեպքում: Ենթադրվում է, որ թաղանթը պատ-

հավաքված է օրթոտրոպ կոմպոզիցիոն նյութի տարրական շերտերից, որոնք մեկընդմեջ դասավորված են թաղանթի առանցքի նկատմամբ ±φ անկյան տակ։ Կախված թաղանթի երկարությունից՝ գտնված են փոքրագույն հաստատուն հաստության թաղանթ, նրա կառուցվածքը որոշող φ անկյան օպտիմալ արժեքը և տրված սահմանափակումների ակտիվության տիրույթները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов.—Рига: Зинатне, 1980. 572 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек.—М.: Наука, 1974. 446 с.
3. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки.—М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
4. *Саркисян В. С.* Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела.—Ереван: Изд-во ЕГУ, 1976. 534 с.
5. *Гнуни В. В.* Проектирование оптимальной сжатой цилиндрической оболочки из композиционного материала.—Уч. записки ЕГУ, естественные науки, 1989. № 3.
6. *Jones R. M.* Mechanics of composite materials.—New York: Mc Grow-Hill, 1975. 132 p.
7. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем.—М.: Физматгиз, 1963. 879 с.
8. *Алфутов Н. А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем.—М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
9. *Васильев В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов.—М.: Машиностроение, 1988. 263 с.

Ереванский Госуниверситет

Поступила в редакцию
17.VIII.1989