ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 43, № 2, 1990 Механика

УДК 539.375

ХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С КЛИНОВИДНЫМ ВЫРЕЗОМ

ЛЕБЕДЕВ Д. Ф.

Рассматривается упругая составная плоскость, ослабленная бесконечным клиновидным вырезом. К краям выреза осевой силой прижат без трения жесткий штамп в форме клина.

Устанавливается асимптотика напряженного состояния в окрестности вершины выреза, а также под краем штампа. Разрушающая нагрузка определяется по критерию хрупкой прочности В. В. Новожилова.

Строятся системы кусочно-однородных решений (P—системы) двух смешанных симметричных задач для бесконечного упругого клина. В рядах по элементам этих систем могут быть решены различные задачи об обжатии произвольным числом штампов однородных и составных, усеченных, конечных и бесконечных клиновидных областей; о равновесии однородной и составной бесконечной плоскости, ослабленной системой радиальных пунктирных разрезов, при условиях циклической симметрии.

P—системы для бесконечного упругого конуса построены в [1].

1. Рассмотрим две краевые задачи а) и б) о плоской деформации бесконечного упругого клина $\{0\leqslant r<\infty,\ -\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha\}$ с общим основным условием

$$\tau_{r\theta}(r,\ \pm\alpha)=0\quad(0\leqslant r<\infty)\tag{1.1}$$

и со смешанными условиями:

$$\text{а)}\quad \sigma_\theta(r,\ \pm\alpha)=f_1(r)\ (0\leqslant r<1),\ v(r,\ \pm\alpha)=\pm g_1(r)\ (1\leqslant r<\infty)\tag{1.2}$$

$$\text{б)}\quad \sigma_\theta(r,\ \pm\alpha)=f_2(r)\ (1<r<\infty),\quad v(r,\ \pm\alpha)=\pm g_2(r)\ (0\leqslant r\leqslant 1)$$

Их решение с учетом симметрии граничных условий и однородного условия (1.1) запишем в виде интеграла Меллина [1, 2, 3]:

$$w(r,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_j}B_j(\nu)W^j(\nu,\theta)\rho(r,-\nu)d\nu,\quad w=(u,v),\quad W=(U,V)\tag{1.3}$$

$$V(\nu,\theta)=(2G)^{-1}\nu(\nu+\varkappa)[(\nu+\varkappa)\sin(\nu-1)\alpha\cos(\nu+1)\theta-$$
$$-(\nu+1)\sin(\nu+1)\alpha\cos(\nu-1)\theta]$$

$$V(\nu, \theta) = (2G)^{-1}\nu(\nu+\varkappa)[(\nu-\varkappa)\sin(\nu-1)\alpha\sin(\nu+1)\theta -$$
$$-(\nu+1)\sin(\nu+1)\alpha\sin(\nu-1)\theta]$$

$$\rho(r, t) = r^t, \quad \varkappa = 3-4\mu$$

где w—вектор перемещений, $u=u(r, \theta)$—радиальное, $v=v(r, \theta)$—угловое перемещение; r, θ—полярные координаты; W—вектор трансформант U и V перемещений u и v соответственно; G—модуль сдвига, μ—коэффициент Пуассона, ν—параметр преобразования Меллина; индексы $j=1$ (задача а)), $j=2$ (задача б)); контуры L_1 и L_2—прямые $\mathrm{Re}\,\nu=\gamma_1$ и $\mathrm{Re}\,\nu=\gamma_2$ (располагаются соответственно правее (левее) мнимой оси, но левее (правее) ближайшего полюса подынтегральных функций).

Из условий (1.2) получим, что функция $B_j(\nu)$ удовлетворяет двум уравнениям

$$v^+(\nu)+v^-(\nu) = B_j(\nu)D_1(\nu), \quad \tau^+(\nu)+\tau^-(\nu) = B_j(\nu)D_2(\nu) \quad (\nu\in L_j) \tag{1.4}$$

$$D_1(\nu) = -(2G)^{-1}4(1-\mu)\nu(\nu+\varkappa)\sin(\nu-1)\alpha\sin(\nu+1)\alpha$$

$$D_2(\nu) = -\nu^2(\nu+\varkappa)(\nu\sin 2\alpha + \sin 2\nu\alpha)$$

$$v^+(\nu) = \int_0^1 v(r, \alpha)\rho(r, \nu-1)\,dr, \quad v^-(\nu) = \int_1^\infty v(r, \alpha)\rho(r, \nu-1)\,dr$$

$$\sigma^+(\nu) = \int_0^1 \sigma_\theta(r, \alpha)\rho(r, \nu)\,dr, \quad \sigma^-(\nu) = \int_1^\infty \sigma_\theta(r, \alpha)\rho(r, \nu)\,dr$$

Исключив $B_j(\nu)$ из (1.4), приходим к задаче Римана [4]

$$v^+(\nu)+v^-(\nu) = K(\nu)[\sigma^+(\nu)+\sigma^-(\nu)], \quad K(\nu) = D_1(\nu)D_2^{-1}(\nu) \quad (\nu\in L_j) \tag{1.5}$$

относительно неизвестных $v^+(\nu)$, $\sigma^-(\nu)$ и $v^-(\nu)$, $\sigma^+(\nu)$ при $j=1$ и $j=2$ соответственно.

Следуя [1, 3], построим каноническое решение однородной задачи Римана

$$v_0^+(\nu) = K(\nu)\sigma_0^-(\nu)$$

в виде произведения решений задач с коэффициентами $K_s(\nu)$ $(s=1, 2)$

$$v_s^+(\nu) = K_s(\nu)\sigma_s^-(\nu) \quad (\nu\in L_1), \quad v_s^-(\nu) = K_s(\nu)\sigma_s^+(\nu) \quad (\nu\in L_2) \tag{1.6}$$

$$K_1(\nu) = -g\nu^{-1}\mathrm{tg}^{-1}\,\pi\nu, \quad g = (1-\mu)G^{-1}$$

$$K_2(\nu) = K(\nu)K_1^{-1}(\nu) = \frac{2(\sin^2\alpha - \sin^2\nu\alpha)}{\nu\sin 2\alpha + \sin 2\nu\alpha}\,\mathrm{tg}\,\pi\nu$$

Мероморфная функция $K_2(\nu)$, как следует из анализа нулей характеристических функций $D_j(\nu)$, не имеет нулей и полюсов внутри полосы $\lambda_2 \leqslant \mathrm{Re}\,\nu \leqslant \lambda_1$; на мнимой оси $\nu = i\beta$ она вещественна и четна:

$$K_2(i\beta) = 2(\mathrm{sh}^2\beta\alpha + \sin^2\alpha)\,\mathrm{th}\,\pi\beta(\beta\sin 2\alpha + \mathrm{sh}\,2\beta\alpha)^{-1}$$

$$K_2(i\beta) = 1 + O(|\beta|\exp(-2|\beta|\alpha)) \quad (\beta \to \pm\infty)$$

Сместив контуры сопряжения L_j на мнимую ось, получим решение задач (1.6) при $s=2$ в виде

$$v_2^+(\nu) = Y(\nu)\ (\mathrm{Re}\,\nu \geqslant \lambda_1), \quad v_2^-(\nu) = Y^{-1}(\nu)\ (\mathrm{Re}\,\nu \leqslant \lambda_2) \tag{1.7}$$

$$Y(\nu) = \exp\left[\frac{\nu}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln K_2(it)\,dt}{t^2+\nu^2}\right] \quad (\mathrm{Re}\,\nu > 0) \tag{1.8}$$

При $s=1$ задачи (1.6) решаются элементарно:

$$v_1^+(\nu) = g\nu^{-2}\Gamma(\nu+1)\Gamma^{-1}(\nu+1/2)\ (\mathrm{Re}\,\nu > \lambda_1) \tag{1.9}$$

$$v_1^-(\nu) = g\nu^{-2}\Gamma(-\nu+1)\Gamma^{-1}(-\nu+1/2)\ (\mathrm{Re}\,\nu < \lambda_2)$$

Для неизвестных $v_0^\pm(\nu)$ будем иметь

$$v_0^+(\nu) = v_1^+(\nu)Y(\nu)\ (\mathrm{Re}\,\nu \geqslant \lambda_1), \quad v_0^-(\nu) = v_1^-(\nu)Y^{-1}(\nu)\ (\mathrm{Re}\,\nu \leqslant \lambda_2) \tag{1.10}$$

Решение неоднородных задач (1.5) найдем для функций (1.2) следующего вида:

$$f_j(r) = C_j\rho(r, -\gamma_j - 1), \quad g_j(r) = E_j\rho(r, -\delta_j) \quad (j = 1,\ 2) \tag{1.11}$$

$$\mathrm{Re}\,\gamma_1 < -1, \quad \mathrm{Re}\,\delta_1 > \lambda_1, \quad \mathrm{Re}\,\gamma_2 > \lambda_2, \quad \mathrm{Re}\,\delta_2 < \lambda_2$$

Их трансформанты равны

$$\sigma^+(\nu) = C_1(\nu - \gamma_1)^{-1}, \ v^-(\nu) = -E_1(\nu - \delta_1)^{-1} \quad (j=1)$$

$$\sigma^-(\nu) = -C_2(\nu - \gamma_2)^{-1}, \ v^+(\nu) = E_2(\nu - \delta_2)^{-1} \quad (j=2)$$

По обобщенной теореме Лиувилля получим

$$v^\pm(\nu) = \pm\frac{E_j}{\nu - \delta_j} \pm v_0^\pm(\nu)\left[\frac{C_jK(\gamma_j)}{(\nu-\gamma_j)v_0^\mp(\gamma_j)} - \frac{E_j}{(\nu-\delta_j)v_0^+(\delta_j)} + \delta_{j1}d + \delta_{j2}e\right] \tag{1.12}$$

Здесь верхний (нижний) знак соответствует $j=1$ $(j=2)$; d и e—произвольные постоянные, которые появляются из условия ограниченности энергии упругих напряжений в окрестности точки $r=1$, $\zeta = \pm\alpha$; δ_{jm}—символ Кронекера.

Таким образом, решение вспомогательной задачи (1.1), (1.2) выражается однократными квадратурами (1.3), где

$$B_j(\nu) = \pm\frac{v_0^\pm(\nu)}{D_1(\nu)}\left[\frac{C_jK(\gamma_j)}{(\nu-\gamma_j)v_0^\mp(\gamma_j)} - \frac{E_j}{(\nu-\delta_j)v_0^+(\delta_j)} + \delta_{j1}d + \delta_{j2}e\right] \tag{1.13}$$

2. Пусть $w_{jm}^k=(u_{jm}^k,\ v_{jm}^k)$ — k-й вектор упругих перемещений (k-й элемент) P—системы j-й задачи (1.1), (1.2) при значениях $f_j(r)=0$, $g_j(r)=0$, с особенностями в точках $r=0$ $(m=1)$ или $r=\infty$ $(m=2)$; $w_{jm}^{k1}=(u_{jm}^{k1},\ v_{jm}^{k1})$ — k-й вектор перемещении (k-й элемент) системы однородных решений (H-системы), имеющих особенности в тех же точках, удовлетворяющих общему условию (1.1) и основным условиям $\sigma_\theta(r,\pm\alpha)=0$, $j=m$; $\tau(r,\pm\alpha)=0$, $j\neq m$ $(j, m=1, 2;\ 0\leqslant r<\infty)$.

Полагаем

$$w_{jm}^k=w_{jm}^{k1}+w_{jm}^{k2} \tag{2.1}$$

где w_{jm}^{k2} — корректирующий вектор из k-го элемента P-системы.

Элементы H-систем запишем в виде

$$w_{jm}^{k1}(r,\theta)=A_{jm}^k W(\nu_{sm}^k,\theta)\rho(r,-\nu_{sm}^k) \tag{2.2}$$

где A_{jm}^k — произвольные постоянные, ν_{sm}^k — нули функций $D_s(\nu)$, $s=1+\delta_{jm}$, $\operatorname{Re}\nu_{s1}^k>0$, $\operatorname{Re}\nu_{s2}^k<0$.

Все нули $D_1(\nu)$ — вещественные:

$$\nu_{11}^k=\{\nu_{11}^{k1}=\nu_k=k\pi\alpha^{-1}+1,\quad \nu_{11}^{k2}=\nu_k-2,\quad k=1,\ 2,\ \ldots\}$$

$$\nu_{12}^k=\{\nu_{12}^{k1}=-\nu_{11}^{k1},\ \nu_{12}^{k2}=-\nu_{11}^{k2},\ k=1,\ 2,\ \ldots\};\ \nu_{12}^k=\nu_{12}^{k1}=0,\ k=0$$

$$\nu_{12}^k=\nu_{12}^{k1}=-\nu_{11}^{k1}=-\nu_{11}^k=-1,\ k=-1$$

Нули функции $D_2(\nu)$ исследовались, к примеру, в статьях [5,6,7]. В [6] установлена асимптотика комплексных нулей $(0<2\alpha<2\pi)$. Графики зависимостей нескольких первых нулей от величины угла 2α приведены в [7]. В [5] обычным приемом отделения вещественной и мнимой частей комплексной функции аналитически исследованы комплексные нули нечетной функции $(0<2\alpha<\pi)$

$$\Phi(z)=\sin z+z\sin 2\alpha/2\alpha,\quad z=2\nu\alpha$$

В дополнение к [5] отметим, что, если угол $2\alpha\in(0;\ 0,8128\,\pi)$, то $\Phi(z)$ в правой полуплоскости $(\xi>0)$ имеет только комплексно сопряженные нули $z_k=\xi_k\pm i\eta_k$, $\xi_k\in((2k-1)\pi,\ (4k-1)\pi/2)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ С ростом угла комплексно-сопряженные нули поочередно (от меньших номеров к большим) сходятся, образуя, начиная с $2\alpha=0{,}8128\pi$, вещественные двукратные нули. При увеличении угла $2\alpha\in(0{,}8128\pi;\ \pi)$, эти нули расходятся в простые вещественные (пары): $\xi_k^{(1)}=(2k-1)\pi+\varepsilon$, $\xi_k^{(2)}=2k\pi-\varepsilon$, $0\leqslant\varepsilon<\pi/2$. При $2\alpha\to\pi$ все нули функции $\Phi(z)$ становятся вещественными. С ростом угла в промежутке $(\pi;\ 1{,}1542\,\pi)$ простые вещественные нули $\xi_k^{(1)}=2k\pi+\varepsilon$, $\xi_k^{(2)}=(2k+1)\pi-\varepsilon$ попарно сходятся, образуя поочередно (от больших номеров к меньшим) двукратные вещественные нули, которые затем переходят в комплексно сопряженные. При $2\alpha\in(1{,}1542\pi;\ 1{,}7505\pi)$ все нули функции $\Phi(z)$ в правой полуплоскости, кроме ξ_{-1}, — комплексно сопряженные, причем $\xi_k\in 2k\pi$;

$(4k+1)\pi/2)$. В промежутке $[1{,}7505\pi;\ 2\pi)$ комплексно сопряженные нули поочередно (от меньших номеров к большим) переходят в двукратные вещественные и затем в пары вещественных: $\xi_k^{(0)}=2k\pi-\varepsilon$, $\xi_k^{(1)}=(2k+1)\pi-\varepsilon$. Вещественный нуль $\xi_{-1}\in(0{,}8128\pi;\ \pi)$ соответствует значениям угла $\pi<2\alpha<2\pi$ и определяет порядок сингулярности напряжений в вершине клина.

Список нулей функции $D_2(\nu)$ представим в виде $(2\alpha\neq\pi)$

$$\nu_{21}^k=\left\{\nu_{21}^{k1}=\frac{\sigma_k}{2\alpha}-\frac{\xi_k}{2\alpha}+i\frac{\eta_k}{2\alpha},\quad \nu_{21}^{k2}=\overline{\nu}_{21}^{k1},\quad k=1,\ 2,\ \ldots\right\}$$

$$\nu_{22}^k=\{\nu_{22}^{k1}=-\nu_{21}^{k1},\quad \nu_{22}^{k2}=-\nu_{21}^{k2},\ k=1,\ 2,\ \ldots\},\quad \nu_{22}^{k}=\nu_{22}^{k1}=0,\ k=0$$

$$\nu_{21}^k=\nu_{21}^{k1}=-\nu_{22}^{k1}=-\nu_{22}^{k}<1,\quad k=-1$$

Для пары вещественных нулей считаем, что $\nu_{21}^{k1}\leqslant\nu_{21}^{k2}$.

Корректирующие векторы w_{jm}^{k2} являются решениями четырех смешанных неоднородных задач (1.1), (1.2), где

$$f_1(r)=0,\ g_1(r)=-A_{11}^kD_1(\nu_{21}^k)\rho(r,\ -\nu_{21}^k) \tag{2.3}$$

$$f_2(r)=-A_{21}^kD_2(\nu_{11}^k)\rho(r,\ -\nu_{11}^k-1),\ g_2(r)=0\ (k=-1,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ m=1)$$

$$f_1(r)=-A_{12}^kD_2(\nu_{12}^k)\rho(r,\ -\nu_{12}^k-1),\ g_1(r)=0$$

$$f_2(r)=0,\ g_2(r)=-A_{22}^kD_1(\nu_{22}^k)\rho(r,\ -\nu_{22}^k)\quad (k=-1,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ m=2)$$

Используя зависимости (1.3), (1.13), получим

$$w_{jm}^{k2}(r,\ \theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_j}B_{jm}^k(\nu)W(\nu,\ \theta)\rho(r,\ -\nu)\,d\nu \tag{2.4}$$

$$B_{jm}^k(\nu)=(-1)^jA_{jm}^kv_j^*(\nu)D_1^{-1}(\nu)R_{jm}^k(\nu)$$

$$R_{jm}^k(\nu)=\frac{(1-\delta_{jm})D_2(\nu_{1m}^k)}{(\nu-\nu_{1m}^k)\sigma_j^*(\nu_{1m}^k)}-\frac{\delta_{jm}D_1(\nu_{2m}^k)}{(\nu-\nu_{2m}^k)v_j^*(\nu_{2m}^k)}+\delta_{j1}d_m^k+\delta_{j2}e_m^k$$

$$v_j(\nu)=\delta_{j1}v_0^+(\nu)+\delta_{j2}v_0^-(\nu),\quad \sigma_j^*(\nu)=\delta_{j1}\sigma_0^-(\nu)+\delta_{j2}\sigma_0^+(\nu)$$

Произвольные постоянные d_m^k, e_m^k найдем из условия самоуравновешенности напряженного состояния, порождаемого каждым элементом P-систем, при значениях радиуса $r<1$ $(j=1)$ и $r>1$ $(j=2)$. Для выполнения этого условия необходимо положить $R_{jm}^k(\nu_{22}^0)=0$. Откуда следует

$$\delta_{j1}d_m^k+\delta_{j2}e_m^k=\frac{(1-\delta_{jm})D_2(\nu_{1m}^k)}{\nu_{1m}^k\sigma_j^*(\nu_{1m}^k)}-\frac{\delta_{jm}D_1(\nu_{2m}^k)}{\nu_{2m}^kv_j^*(\nu_{2m}^k)} \tag{2.5}$$

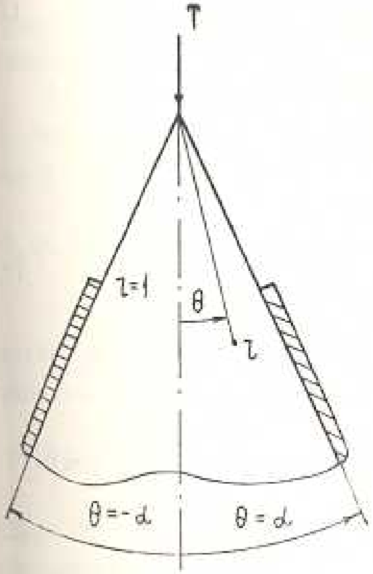
$(k=-1,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ j,\ m=1,\ 2)$

В P-системы $\{w_{12}^k\}$, $\{w_{21}^k\}$ не входят элементы с номером $k=0$, поскольку их главная часть (соответствующие элементы H-систем) обращается в нуль. Векторы w^0_{12}, w^0_{21} являются решениями однородных задач (1.1), (1.2,а) и (1.1), (1.2,б) (фиг. 1, 2) с отличным от нуля главным вектором напряжений при $r<1$ ($j=1$) и $r>1$ ($j=2$). Они получаются из соотношений для w^k_{jm} ($j, m=1, 2$; $j\neq m$) при $\nu^k_{12}=\nu^k_{21}=0$, $k=0$ и имеют вид:

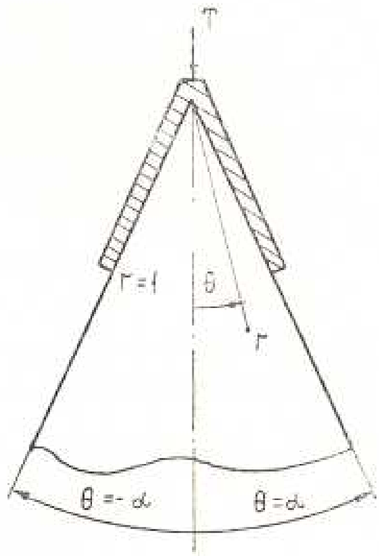
$$w^0_{jm}(r, \theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j} B^0_{jm}(\nu)W(\nu, \theta)\rho(r, -\nu)d\nu \tag{2.6}$$

$$B^0_{jm}(\nu)=v^*_j(\nu)D^{-1}_j(\nu)(\delta_{j1}d^0_m+\delta_{j2}e^0_m)$$

$$\delta_{j1}d^0_m+\delta_{j2}e^0_m=(-1)^j T[2(\sin 2\alpha+2\alpha)]^{-1/2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В контактных задачах для клина в случае нескольких точек раздела граничных условий возникает вопрос о возможности их физической реализации. В этой связи рассмотрим вектор w^k_{12}, $k=-1$. Его главная часть характеризует однородное растяжение—сжатие клина, а сам вектор определяет на бесконечности поле постоянных напряжений σ^∞_r. В указанных задачах необходимо задать некоторое значение $\sigma^\infty_r<0$ и учесть в решении элемент w^{-1}_{12} с коэффициентом $A^k_{12}=\sigma^\infty_r[4(1-2\mu)]^{-1}$ ($2\alpha\neq\pi$, $k=-1$).

Двукратным собственным числам $\nu^{k1}_{21}=\nu^{k2}_{21}$ соответствуют два однородных решения, одно из которых содержит функцию $\ln r$ и не удовлетворяет соотношению обобщенной ортогональности для секториальной области. Это осложняет применение метода кусочно-однородных решений к составным клиновидным областям, если линия сопряжения $r=\mathrm{const}$, $-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha$ выходит на грани клина, свободные от нормальных напряжений σ_θ. Практически этих осложнений можно избежать, приняв во внимание свойства собственных чисел $\nu_{21}^{k1}=\nu_{21}^{k2}$: они существуют не при всех значениях угла 2α, в единственном числе $(2\alpha\neq\pi)$ и при сколь угодно малом изменении угла переходят в пары простых (вещественные либо комплексно сопряженные). В дальнейшем, если $2\alpha>\pi$, полагаем $\nu_{21}^{k1}=\nu_{21}^{k2}\in\{\nu_{21}^{k}\}$.

Заключая построение P-систем, разложим входящие в их элементы контурные интегралы в ряды по однородным решениям. Учитывая соотношение $v_j^*(\nu)=D_1(\nu)D_2^{-1}(\nu)z_j^*(\nu)$, получим $(k=-1,\ 1,\ 2,\ \ldots)$:

$$w^k_{jm}(r_q,\theta)=A^k_{jm}\{(1-\delta_{qm})W(\nu^k_{sm},\theta)\varphi(r_q,-\nu^k_{sm})+$$

$$+(-1)^q\sum_{n=-1}^{\infty}C^{kq}_{jm}(\nu^n_{pq})W(\nu^n_{pq},\theta)\varphi(r_q,-\nu^n_{pq})\} \tag{2.7}$$

$$C^{kq}_{jm}(\nu)=(-1)^j[\delta_{p1}v_j^*(\nu)+\delta_{p2}z_j^*(\nu)]\dot{D}_p^{-1}(\nu)R^k_{jm}(\nu)$$

$$(q=1,2;\quad r_1>1,\quad r_2<1,\quad p=2-\delta_{jq},\quad s=1+\delta_{jm})$$

При $n=0$, $j\neq q$ имеем $(\nu_{21}^0=\nu_{22}^0)$

$$C^{kq}_{jm}(\nu_{22}^0)=(-1)^j\frac{R^k_{jm}(\nu_{22}^0)}{\varkappa\sin\alpha\sqrt{2(\sin 2\alpha+2\alpha)}} \tag{2.8}$$

функцию $W(\nu_{22}^0,\theta)$ следует заменить на $\dot{W}(\nu_{22}^0,\theta)$ (точка означает дифференцирование по ν). Если $j=q$, слагаемые номера $n=0$ отсутствуют.

Векторы (2.6) также представим в виде $(j,\ m=1,\ 2;\ j\neq m)$

$$w^0_{jm}(r_q,\theta)=(-1)^q\sum_{n=-1}^{\infty}C^{0q}_{jm}(\nu^n_{pq})W(\nu^n_{pq},\theta)\varphi(r_q,-\nu^n_{pq}) \tag{2.9}$$

$$C^{0q}_{jm}(\nu)=[\delta_{p1}v_j(\nu)+\delta_{p2}z_j^*(\nu)]\dot{D}_p^{-1}(\nu)(\delta_{j1}d_2^0+\delta_{j2}e_1^0)$$

При $j=q$ и $n=0$ имеем слагаемые $(\nu=\nu_{2q}^0)$

$$(-1)^q 3\{z_j^*(\nu)[(W(\nu,\theta)\varphi(r_q,-\nu))^{\cdot\cdot}-2\varkappa^{-1}(W(\nu,\theta)\varphi(r_q,-\nu))^{\cdot}]+$$

$$+2\dot{z}_j^*(\nu)(W(\nu,\theta)\varphi(r_q,-\nu))^{\cdot}\}\dot{D}_2^{-1}(\nu)(\delta_{j1}d_2^0+\delta_{j2}e_1^0)$$

Здесь первый член соответствует решению Митчелла, второй и третий—смещению клина как жесткого тела.

3. Рассмотрим упругую плоскость с бесконечным клиновидным вырезом (фиг. 3), составленную из двух однородных областей $\Omega_1\{0\leqslant r\leqslant a,\ -\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha,\ 2\alpha>\pi\}$ и $\Omega_2\{a\leqslant r<\infty,\ -\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha\}$ (упругие постоянные—G_k, ν_k, $k=1,\ 2$). К граням выреза на участке $b\leqslant r\leqslant 1$ осевой силой T прижат без трения жесткий клиновидный штамп. На этих гранях выполняются смешанные краевые условия

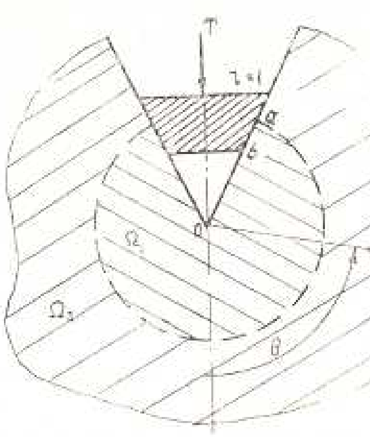
$$\tau_{r\theta}(r, \pm\alpha)=0 \quad (0<r<\infty) \tag{3.1}$$

$$\sigma_\theta(r, \pm\alpha)=0 \quad (0<r<b,\ 1<r<\infty)$$

$$v(r, \pm\alpha)=0 \quad (b\leqslant r\leqslant 1)$$

а на поверхности $r=a<1$, $a>b$; $-\alpha<\theta<\alpha$ — основные условия полного сцепления областей Ω_1 и Ω_2

$$u^1=u^2,\ v^1=v^2,\ \tau^1_{r\theta}=\tau^2_{r\theta},\ \sigma^1_r=\sigma^2_r \tag{3.2}$$



Фиг. 3

Взяв решение в виде

$$w^1=\sum_{k=-1}^{\infty}{}' w^k_{12}, \quad w^2=w^0_{21}+\sum_{k=-1}^{\infty}{}' w^k_{21} \tag{3.3}$$

удовлетворим условиям (3.1) (штрих означает пропуск $k=0$).

Функции w^k_{12} и w^k_{21} согласно формулам (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) и принятому в п. 2 обозначению собственных чисел ν^k_{jm}, представим в виде ($j, m=1, 2$; $j\neq m$)

$$w^k_{jm}(r, \theta)=\sum_{l=1}^{2} A^{kl}_{jm}\left\{W(\nu^{kl}_{1m}, \theta)\rho(r, -\nu^{kl}_{1m})+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j} B^{kl}_{jm}(\nu)W(\nu, \theta)\rho(r, -\nu)d\nu\right\} \tag{3.4}$$

$$B^{kl}_{jm}(\nu)=(-1)^j A^{kl}_{jm}v^*_j(\nu)D_1^{-1}(\nu)R^{kl}_{jm}(\nu) \quad (k=1, 2, \ldots,\ l=1, 2;\ k=-1,\ l=1)$$

$$R^{kl}_{jm}(\nu)=\frac{D_2(\nu^{kl}_{1m})}{\sigma^*_j(\nu^{kl}_{1m})}\left(\frac{1}{\nu-\nu^{kl}_{1m}}+\frac{1}{\nu^{kl}_{1m}}\right)$$

Здесь A^{k1}_{12}, A^{k1}_{21} ($k=-1, 1, 2, \ldots$), A^{k2}_{12}, A^{k2}_{21} ($k=1, 2, \ldots$) — произвольные постоянные.

Функцию w^0_{21} определим по формуле (2.6).

Элементы P-систем (2.1) построены в локальных координатах. Используемые в (3.3) элементы запишем в глобальных координатах, связав их с локальными координатами элементов w^k_{21} и w^0_{21}. Тогда, для перехода в элементах w^k_{12} к глобальным координатам необходимо заменить радиус r отношением r/b, G_1 — произведением G_1b^π; выражения для перемещений и напряжений умножить на масштабные коэффициенты b и b^{-2} соответственно.

Подставим (3.3) в (3.2) и воспользуемся разложениями (2.7), (2.9) функций (3.4) и w^0_{21}, записанных в глобальных координатах (w^k_{12} — при $r_1=a/b>1$, w^k_{21}, w^0_{21} — при $r_2=a<1$). В двойных рядах по n и k поменяем порядки суммирования и введем неизвестные

$$Z^{kl}_{12}=A^{kl}_{12}\rho(a/b, -\nu^{kl}_{12}+1), \quad Z^{kl}_{21}=A^{kl}_{21}\rho(a, -\nu^{kl}_{11}+1)\ (l=1, 2) \tag{3.5}$$

Применив к образовавшимся рядам условие ортогональности H-систем $\{w_{jm}^{kl}\}$ $(j, m=1, 2;\ j\neq m)$ в форме

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} U_i(\nu_{1m}^{kl}, \theta) Q_{it}(\theta) d\theta = 0 \quad (k \neq t,\ k=1, 2, \ldots) \tag{3.6}$$

$$Q_{it}(\theta)=\cos(\nu_t-1)\theta \ (i=1, 4), \quad Q_{it}(\theta)=\sin(\nu_t-1)\theta \quad (i=2, 3)$$

$$U_1(\nu, \theta)=U(\nu, \theta), \quad U_2(\nu, \theta)=V(\nu, \theta), \quad \nu_t=\pi t\alpha^{-1}+1$$

$$U_3(\nu, \theta)=\nu^2(\nu+1)(\nu+\varkappa)[\sin(\nu+1)\alpha\sin(\nu-1)\theta-\sin(\nu-1)\alpha\sin(\nu+1)\theta]$$

$$U_4(\nu, \theta)=\nu^2(\nu+\varkappa)[(\nu+1)\sin(\nu+1)\alpha\cos(\nu-1)\theta-(\nu+3)\sin(\nu-1)\alpha\cos(\nu+1)\theta]$$

получим нормальную систему Пуанкаре-Коха

$$\sum_{l=1}^{2}(\alpha_{kl}^{i} Z_{12}^{kl}+\beta_{kl}^{i} Z_{21}^{kl})+\sum_{n=-1}(\gamma_{nk1}^{i} Z_{12}^{n1}+\delta_{nk1}^{i} Z_{21}^{n1})+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_{nk2}^{i} Z_{12}^{n2}+\delta_{nk2}^{i} Z_{21}^{n2})=\varepsilon_k^i \quad (k=1, 2, \ldots;\ i=\overline{1, 4}) \tag{3.7}$$

$$\alpha_{kl}^{i}=I_{kl}^{i2}, \quad \beta_{kl}^{i}=-I_{kl}^{i1} \quad (l=1, 2)$$

$$\gamma_{nkl}^{i}=-\sum_{s=1}^{\varkappa_k} \rho(a/b,\ \nu_{12}^{nl}-\nu_{11}^{ks}) S_{12}^{nl}(\nu_{11}^{ks}) I_{ks}^{i1}$$

$$\delta_{nkl}^{i}=-\sum_{s=1}^{\varkappa_k} \rho(a,\ \nu_{11}^{nl}-\nu_{12}^{ks}) S_{21}^{nl}(\nu_{12}^{ks}) I_{ks}^{i2}$$

$$\varepsilon_k^{i}=\sum_{s=1}^{\varkappa_k} C_{21}^{12}(\nu_{12}^{ks}) \rho(a,\ -\nu_{12}^{ks}+1) I_{ks}^{i2}, \quad \varkappa_k=2-\delta_{-1, k}$$

$$I_{kl}^{im}=\int_{-\alpha}^{\alpha} U_i(\nu_{1m}^{kl}, \theta) Q_{ik}(\theta) d\theta, \quad S_{jm}^{nl}(\nu)=(-1)^j v_j'(\nu) \bar{D}_1^{-1}(\nu) R_{jm}^{nl}(\nu)$$

$$(n=1, 2, \ldots,\ l=1, 2;\ n=-1,\ l=1)$$

При $k=-1$ имеем в (3.7) две строки $(i=1, 4)$; в интегралах I_{kl}^{im} полагаем $Q_{ik}(\theta)\equiv 1$; $\alpha_{k2}^{i}=\beta_{k2}^{i}=0$.

В интегралы I_{kl}^{im} из коэффициентов α_{kl}^{i}, γ_{nkl}^{i} $(i=1, 2)$ подставляем заданную величину G_1; в функциях $S_{12}^{nl}(\nu)$ заменяем G_1 на $G_1 b^2$; коэффициенты β_{kl}^{i}, δ_{nkl}^{i} и ε_k^{i} зависят от упругих постоянных G_2, μ_2.

Внедиагональные элементы матрицы системы (3.7) убывают экспоненциально по номерам строк и столбцов. Для коэффициентов A_{12}^{kl}, A_{21}^{kl} имеют место оценки

$$|A_{12}^{kl}, A_{21}^{kl}| < k^{-1/2}\exp(-2\pi k\alpha^{-1}L), \quad L=\min[\ln(a/b),\ \ln(1/a)] \tag{3.8}$$

Исследуем поведение перемещений и напряжений в окрестности угловой точки выреза, а также под краем штампа. Представим вектор перемещений из области $\Omega_1-w^1=(u^1, v^1)$ при $r<b$ в виде ряда по вычетам, взятым в нулях ν_{22}^{nl} функции $D_2(\nu)$. На основании равенств (3.3), (3.4), (2.7), (2.9) будем иметь

$$\frac{u^1(r,\theta)}{\cos\theta}=-\frac{v^1(r,\theta)}{\sin\theta}=\frac{2(1-\mu_1)}{G_1 b\sqrt{2(\sin 2\alpha+2\alpha)}}\sum_{n=-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}A_{12}^{nl}R_{12}^{nl}(\nu_{22}^{0})+O(r^{-c})$$
$$r\to 0 \qquad (3.9)$$

где $c=\nu_{22}^{nl}\in(-0,5;\ -1)$, $n=-1$. Выражение в правой части равно вертикальному перемещению вершины выреза.

Напряжения вблизи вершины неограниченно возрастают

$$\sigma_p^1(r,\theta)=-kr^{-c-1}U_p(c,\theta)+O(r^{-e-1}),\quad r\to 0 \qquad (3.10)$$

$$k=b^{-1}\sigma_0^{-}(c)\dot{D}_2^{-1}(c)\sum_{n=-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}A_{12}^{nl}R_{12}^{nl}(c) \qquad (3.11)$$

$$U_5(\nu,\theta)=\nu^2(\nu+\varkappa)[(\nu-1)\sin(\nu-1)\alpha\cos(\nu+1)\theta-(\nu+1)\sin(\nu+1)\alpha\cos(\nu-1)\theta]$$

Здесь σ_p ($p=3, 4, 5$) обозначают напряжения $\tau_{r\theta}$, σ_r и σ_θ соответственно; $e=\nu_{22}^{11}$—ближний к c по величине вещественной части нуль функции $D_2(\nu)$, $\mathrm{Re}\,\nu_{22}^{11}<-1$.

Асимптотика напряжений σ_θ под краем штампа имеет вид

$$\sigma_\theta^2(r,\ \pm\alpha)=K_I[2\pi(1-r)]^{-1/2}+O(1),\quad r\to 1-0 \qquad (3.12)$$

$$K_I=-\sqrt{2}\left(\sum_{n=-1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}A_{21}^{nl}\frac{D_2(\nu_{11}^{nl})}{\nu_{11}^{nl}\sigma_0(\nu_{11}^{nl})}+\frac{T}{\sqrt{2(\sin 2\alpha+2\alpha)}}\right) \qquad (3.13)$$

Используя (3.8), нетрудно показать, что ряды в коэффициентах (3.11) и (3.13) сходятся абсолютно.

Разрушающую нагрузку T_* найдем, воспользовавшись асимптотикой напряжений (3.10) и критерием В. В. Новожилова [8, 9]

$$\int_0^d \sigma_\theta^1(r,0)\,dr\geqslant\sigma_c d \qquad (3.14)$$

(d, σ_c—постоянные материала), который после подстановки $\sigma_\theta^1(r,0)$ примет вид

$$k\geqslant c d^{c+1}U_5^{-1}(c,0)\sigma_c \qquad (3.15)$$

Если упругие постоянные областей Ω_1 и Ω_2 одинаковы, имеем решение задачи для однородной плоскости с клиновидным вырезом.

BRITTLE FRACTURE OF AN ELASTIC COMPOSITE PLANE WITH WEDGE CUT

D. F. LEBEDEV

ՍԵՊԱՁԵՎ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՓԽՐՈՒՆ ՔԱՅՔԱՅՈՒՄԸ

Դ. Ֆ. ԼԵԲԵԴԵՎ

Դիտարկված է անվերջ սեպաձև կտրվածք ունեցող առաձգական բաղադրյալ հարթությունը։ Կտրվածքի եզրերին առանցքային ուժով առանց շփման սեղմված է սեպի տեսքով կոշտ դրոշմ։ Կտրվածքի գագաթի շրջակայքում գտնված է լարվածային վիճակի ասիմպտոտիկան։ Քայքայող բեռը որոշված է Նովոժիլովի փխրուն ամրության հայտանիշի օգնությամբ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лебедев Д. Ф., Нуллер Б. М.* Контактные задачи для составного упругого конуса.—Изв. АН СССР, МТТ, 1988, №6, с. 44—52.
2. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967, 402 с.
3. *Лебедев Д. Ф., Нуллер Б. М.* Круглая плита переменной толщины на упругом полупространстве.—Изв. АН СССР, МТТ, 1976, №5, с. 39—44.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963, 640 с.
5. *Лурье А. И., Брачковский Б. З.* Решение плоской задачи теории упругости для клина.—Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1941, №3, с. 158—165.
6. *Нуллер Б. М.* Некоторые контактные задачи для упругого бесконечного клина.—ПММ, 1972, т. 36, вып. I, с. 157—163.
7. *Тер-Акопянц Л. Г.* О корнях характеристических уравнений упругого клина.—Вестник ЛГУ, 1983, №7, вып. 2, с. 116—118.
8. *Новожилов В. В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности.—ПММ, 1969, т. 33, вып. 2, с. 213—222.
9. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.

Ленинградский политехнический
институт имени М. И. Калинина

Поступила в редакцию
10.I.1989