ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 2, 1990 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО КРУГОВОГО СЕКТОРА

МАКАРЯН В. С., САРКИСЯН В. Г.

Рассмотрена плоская задача для упругого кругового сектора, когда на границе дуги окружности заданы нормальные нагрузки в виде симметричных сосредоточенных сил. На остальной части границы сектора заданы перемещения и нулевые касательные напряжения.

Решение задачи построено на основе классического интеграла Фурье и разложений по тригонометрическим функциям. Получено замкнутое решение задачи в явном виде. Для контактной задачи о вдавливании без трения двух симметричных клиновидных жестких тел на границы кругового сектора получены асимптотические представления напряжений у вершины сектора.

1. Как известно [1], решение плоской задачи теории упругости в полярных координатах r, φ приводится к отысканию одной функции $\Phi(r, \varphi)$, удовлетворяющей уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right)=0 \tag{1.1}$$

Компоненты напряжений и перемещений выражаются через функцию $\Phi(r, \varphi)$, следующими известными соотношениями:

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2},\quad \sigma_\varphi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\varphi}=-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial u_r}{\partial r}=\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_r-\nu(1+\nu)\sigma_\varphi\right] \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{r\partial\varphi}+\frac{u_r}{r}=\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_\varphi-\nu(1+\nu)\sigma_r\right]$$

При решении граничных задач теории упругости в полярных координатах для конечных областей часто бывает удобным преобразование радиальной координаты r. Здесь введем это преобразование через соотношение $r=e^{-t}$, после чего уравнение (1.1) и соотношения (1.2) преобразуются к следующему виду:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial t^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial t^2\partial\varphi^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial\varphi^4}-2\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}+F=0 \tag{1.3}$$

$$e^{-t}\sigma_r = \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial F}{\partial t} + F, \quad e^{-t}\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial F}{\partial t}, \quad e^{-t}\tau_{r\varphi} = -\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial\varphi}$$

$$u_r = \frac{1-\nu}{E}\left[(\nu-1)\int\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} + F\right)dt + (1-2\nu)F + \nu\frac{\partial F}{\partial t}\right] + \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi \tag{1.4}$$

$$u_\varphi = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\int\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial F}{\partial t} - F\right)d\varphi + \int\int F\,dt\,d\varphi + \int\frac{\partial F}{\partial\varphi}dt - \frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right] + a_0 e^{-t}$$

В (1.3) и (1.4) $F(t, \varphi) = e^t\Phi(e^{-t}, \varphi)$, a_0, α, β — произвольные постоянные интегрирования, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Функцию $F(t, \varphi)$ для кругового сектора ($0 \leqslant r < 1$, $-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$) при наличии одной оси симметрии ($\varphi = 0$) представим в виде суммы тригонометрического ряда и интеграла Фурье

$$F(t, \varphi) = ae^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k e^{-2t})\exp(-(\alpha_k - 1)t)\cos\alpha_k\varphi +$$

$$+ \int_0^\infty [A(\lambda)\operatorname{sh}\lambda\varphi\sin\varphi + B(\lambda)\operatorname{ch}\lambda\varphi\cos\varphi]\cos\lambda t\,d\lambda, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{\varphi_0} \tag{1.5}$$

Для компонент напряжений и перемещений с учетом (1.4) получим следующие формулы:

$$e^{-t}\sigma_r = 2ae^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty}[(\alpha_k - \alpha_k^2)a_k\exp(-(\alpha_k - 1)t) +$$

$$+ (2 + \alpha_k - \alpha_k^2)b_k\exp(-(\alpha_k + 1)t)]\cos\alpha_k\varphi + \int_0^\infty \lambda[A(\lambda)\operatorname{sh}\lambda\varphi\sin\varphi +$$

$$+ B(\lambda)\operatorname{ch}\lambda\varphi\cos\varphi]\sin\lambda t\,d\lambda + \int_0^\infty \{A(\lambda)[\lambda^2\operatorname{sh}\lambda\varphi\sin\varphi + 2\lambda\operatorname{ch}\lambda\varphi\cos\varphi] +$$

$$+ B(\lambda)[\lambda^2\operatorname{ch}\lambda\varphi\cos\varphi - 2\lambda\operatorname{sh}\lambda\varphi\sin\varphi]\}\cos\lambda t\,d\lambda$$

(1.6)

$$e^{-t}\sigma_\varphi = 2ae^{-t} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k(\alpha_k^2 - \alpha_k)\exp(-(\alpha_k - 1)t) +$$

$$+ (\alpha_k^2 + 3\alpha_k + 2)b_k\exp(-(\alpha_k + 1)t)]\cos\alpha_k\varphi +$$

$$+ \int_0^\infty \lambda[A(\lambda)\operatorname{sh}\lambda\varphi\sin\varphi + B(\lambda)\operatorname{ch}\lambda\varphi\cos\varphi](\sin\lambda t - \lambda\cos\lambda t)d\lambda$$

$$e^{-t}\tau_{r\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k[(\alpha_k - 1)a_k\exp(-(\alpha_k - 1)t) + (\alpha_k + 1)b_k\exp(-(\alpha_k + 1)t)]\sin\alpha_k\varphi -$$

$$- \int_0^\infty [A(\lambda)(\lambda\operatorname{ch}\lambda\varphi\sin\varphi + \operatorname{sh}\lambda\varphi\cos\varphi) + B(\lambda)(\lambda\operatorname{sh}\lambda\varphi\cos\varphi - \operatorname{ch}\lambda\varphi\sin\varphi)]\sin\lambda t\,d\lambda$$

$$u_\varphi=\frac{1-\nu^2}{E}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha_k}{1-\nu}a_k\exp(-(\alpha_k-1)t)+\left(4+\frac{\alpha_k}{1-\nu}\right)b_k\exp(-(\alpha_k+1)t)\right]\times\right.$$

$$\times\sin\alpha_k\varphi+\int_0^\infty[A(\lambda)(\lambda\operatorname{ch}\lambda\varphi\sin\varphi-\operatorname{sh}\lambda\varphi\cos\varphi)+B(\lambda)(\lambda\operatorname{sh}\lambda\varphi\cos\varphi+$$

$$+\operatorname{ch}\lambda\varphi\sin\varphi)](\sin\lambda t-\lambda\cos\lambda t)\frac{d\lambda}{\lambda}+\int_0^\infty[(\lambda\operatorname{ch}\lambda\varphi\sin\varphi+\operatorname{sh}\lambda\varphi\cos\varphi)A(\lambda)+$$

$$+B(\lambda)(\lambda\operatorname{sh}\lambda\varphi\cos\varphi-\operatorname{ch}\lambda\varphi\sin\varphi)]\frac{\sin\lambda t}{\lambda}d\lambda+\int_0^\infty[A(\lambda)(\lambda\operatorname{ch}\lambda\varphi\sin\varphi+\operatorname{sh}\lambda\varphi\cos\varphi)+$$

$$+B(\lambda)(\lambda\operatorname{sh}\lambda\varphi\cos\varphi-\operatorname{ch}\lambda\varphi\sin\varphi)]\cos\lambda t\,d\lambda+a_0e^{-t}$$

$$u_r=\frac{1+\nu}{E}\left\{2(1-\nu)ae^{-t}+\sum_{k=1}^{\infty}[-\alpha_ka_k\exp(-(\alpha_k-1)t)+(-\alpha_k+\right.$$

$$+2(1-2\nu))b_k\exp(-(\alpha_k+1)t)]\cos\alpha_k\varphi-\int_0^\infty[A(\lambda)(\lambda\operatorname{sh}\lambda\varphi\sin\varphi+$$

$$+2(1-\nu)\operatorname{ch}\lambda\varphi\cos\varphi)+B(\lambda)(\lambda\operatorname{ch}\lambda\varphi\cos\varphi-2(1-\nu)\operatorname{sh}\lambda\varphi\sin\varphi)]\sin\lambda t\,d\lambda+$$

$$+(1-2\nu)\int_0^\infty[A(\lambda)\operatorname{sh}\lambda\varphi\sin\varphi+B\operatorname{ch}\lambda\varphi\cos\varphi]\cos\lambda t\,d\lambda+\alpha\sin\varphi+\beta\cos\varphi$$

Для удовлетворения граничным условиям, заданным на дуге окружности ($t=0$, $0<\varphi<\varphi_0$), используем ортогональность тригонометрических функций, а для удовлетворения условиям, заданным на линиях ($\varphi=\text{const}$, $0<t<\infty$), кроме обычного интеграла Фурье, используем классический интеграл Фурье, для которого справедливо разложение [3]

$$F(t)=-2\int_0^\infty e^{-t}F(t)dt+\int_0^\infty A(\lambda)(\cos\lambda t+\lambda\sin\lambda t)d\lambda$$

$$A(\lambda)=\frac{2}{\pi(1+\lambda^2)}\int_0^\infty F(t)(\cos\lambda t+\lambda\sin\lambda t)dt \qquad (1.7)$$

Отметим, что разложение (1.7) для случая дискретного спектра впервые было использовано А. А. Баблояном при рассмотрении граничных задач теории упругости для кольцевого сектора [2].

2. Рассмотрим теперь плоскую задачу теории упругости для кругового сектора ($0\leqslant r\leqslant 1$, $-\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$), когда на границе $r=1$ заданы нормальные нагрузки, симметричные относительно оси $\varphi=0$. Для простоты примем, что касательные нагрузки на границе $r=1$ отсут-

ствуют. На границах $\varphi=\pm\varphi_0$ заданы нулевые касательные напряжения и нормальные перемещения. В силу симметрии относительно оси $\varphi=0$ будем рассматривать только область $(0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0)$ при следующих граничных условиях:

$$
\begin{array}{llll}
1)\ \tau_{r\varphi}=u_\varphi=0 & \text{при}\ \ \varphi=0 & 0<r<1 & (0<t<\infty)\\
2)\ \tau_{r\varphi}=0 & \text{при}\ \ \varphi=\varphi_0 & 0<r<1 & (0<t<\infty)\\
3)\ u_\varphi(r,\varphi)=u(t) & \text{при}\ \ \varphi=\varphi_0 & 0<r<1 & (0<t<\infty)\\
4)\ \tau_{r\varphi}=0 & \text{при}\ \ 0<\varphi<\varphi_0 & r=1 & (t=0)\\
5)\ \sigma_r=P\delta(\varphi-\varphi_1) & \text{при}\ \ 0<\varphi<\varphi_0 & r=1 & (t=0)
\end{array}
\tag{2.1}
$$

Из соотношений (1.6) с учетом (1.5) легко заметить, что при $a_0=0$ условия 1) в (2.1) (условия симметрии) удовлетворяются тождественно. Удовлетворение же условиям 2) и 3) в (2.1) с учетом разложения (1.7) приводит к следующим соотношениям:

$$
\begin{aligned}
A(\lambda)&=\frac{\overline{u}(\lambda)}{2\lambda\Delta(\lambda)}\left[\operatorname{ch}\lambda\varphi_0\sin\varphi_0-\lambda\operatorname{sh}\lambda\varphi_0\cos\varphi_0\right]\\
B(\lambda)&=\frac{\overline{u}(\lambda)}{2\lambda\Delta(\lambda)}\left[\lambda\operatorname{ch}\lambda\varphi_0\sin\varphi_0+\operatorname{sh}\lambda\varphi_0\cos\varphi_0\right]
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

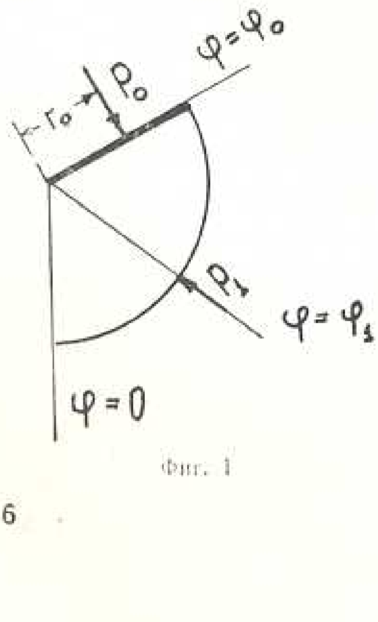
где

$$
(1+\lambda^2)\overline{u}(\lambda)=\frac{2}{\pi}\,\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^\infty u(t)(\cos\lambda t+\lambda\sin\lambda t-e^{-t})\,dt,\quad \Delta(\lambda)=\operatorname{ch}^2\lambda\varphi_0-\cos^2\varphi_0
\tag{2.3}
$$

Остановимся более подробно на одном конкретном случае, когда

$$
u(t)=\alpha_0 e^{-t}\quad (u_\varphi=\alpha_0 r,\ \varphi=\varphi_0)
\tag{2.4}
$$

который соответствует контактной задаче о симметричном вдавливании без трения абсолютно жестких клиновидных тел на границы $(\varphi=\pm\varphi_0,\ 0<r<1)$ упругого кругового сектора (фиг. 1).



Фиг. 1

Подставляя (2.4) в (2.3), получаем

$$
\overline{u}(\lambda)=\frac{\alpha_0 E}{\pi(1-\nu^2)}\,\frac{1}{1+\lambda^2}
\tag{2.5}
$$

и соотношения (2.2) принимают вид

$$
\begin{aligned}
A(\lambda)&=\frac{\alpha_0 E}{2\pi(1-\nu^2)}\,\frac{\operatorname{ch}\lambda\varphi_0\sin\varphi_0-\lambda\operatorname{sh}\lambda\varphi_0\cos\varphi_0}{(1+\lambda^2)\lambda(\operatorname{ch}^2\lambda\varphi_0-\cos^2\varphi_0)}\\
B(\lambda)&=\frac{\alpha_0 E}{2\pi(1-\nu^2)}\,\frac{\lambda\operatorname{ch}\lambda\varphi_0\sin\varphi_0+\operatorname{sh}\lambda\varphi_0\cos\varphi_0}{\lambda(1+\lambda^2)(\operatorname{ch}^2\lambda\varphi_0-\cos^2\varphi_0)}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Прежде, чем перейти к удовлетворению граничным условиям, заданным на линии $t=0$ $(0<\varphi<\varphi_0)$, заметим, что если значения функций $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ из (2.6) подставим в интеграл Фурье в (1.5), то тем самым в дальнейшем операции интегрирования заменим на операции дифференцирования. Не вдаваясь в подробности, отметим только, что в результате указанной выше подстановки приходим к заключению, что вместо интеграла Фурье в представлении (1.5) достаточно взять функцию

$$F_0(t)=bte^{-t},\quad b=-\frac{\alpha_0 E}{4\varphi_0(1-\nu^2)} \tag{2.7}$$

обусловленную полюсами второго порядка функций $A(z)$ и $B(z)$ в точке $z=i$ комплексной плоскости.

3. Удовлетворяя граничным условиям 4) и 5) в (2.1), получаем следующие соотношения:

$$a=\frac{b}{2}+\frac{P_1}{2\varphi_0},\quad a_*=-\frac{P_1\cos\alpha_*\varphi_1}{\varphi_0(\alpha_*-1)},\quad b_*=\frac{P_1\cos\alpha_*\varphi_1}{\varphi_0(\alpha_*+1)} \tag{3.1}$$

Подставляя теперь значения коэффициентов (3.1) в формулы (1.6) с учетом (2.7), получаем следующие выражения для компонент напряжений:

$$\sigma_\varphi=-\frac{\alpha_0 E}{2\varphi_0(1-\nu^2)}-\frac{\alpha_0 Et}{2\varphi_0(1-\nu^2)}-\frac{P_1\pi e^t\operatorname{sh}t}{2\varphi_0^2}\left[\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{\varphi_0}t\cos\frac{\pi}{\varphi_0}(\varphi+\varphi_1)-1}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{\varphi_0}t-\cos\frac{\pi}{\varphi_0}(\varphi+\varphi_1)\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{\varphi_0}t\cos\frac{\pi}{\varphi_0}(\varphi-\varphi_1)-1}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{\varphi_0}t-\cos\frac{\pi}{\varphi_0}(\varphi-\varphi_1)\right)^2}\right]+\frac{P_1}{2\varphi_0}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{\varphi_0}t}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{\varphi_0}t-\cos\frac{\pi}{\varphi_0}(\varphi+\varphi_1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{\varphi_0}t}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{\varphi_0}t-\cos\frac{\pi}{\varphi_0}(\varphi-\varphi_1)}\right]$$

$$\sigma_r=-\frac{\alpha_0 Et}{2\varphi_0(1-\nu^2)}+\frac{P_1\pi e^t}{2\varphi_0^2}\operatorname{sh}t\left[\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{\varphi_0}t\cos\frac{\pi}{\varphi_0}(\varphi+\varphi_1)-1}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{\varphi_0}t-\cos\frac{\pi}{\varphi_0}(\varphi+\varphi_1)\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{\varphi_0}t\cos\frac{\pi}{\varphi_0}(\varphi-\varphi_1)-1}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{\varphi_0}t-\cos\frac{\pi}{\varphi_0}(\varphi+\varphi_1)\right)^2}\right]+\frac{P_1}{2\varphi_0}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{\varphi_0}t}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{\varphi_0}t-\cos\frac{\pi}{\varphi_0}(\varphi+\varphi_1)}+\right.$$

$$
\left.+\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{\varphi_0}t}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{\varphi_0}t-\cos\dfrac{\pi}{\varphi_0}(\varphi-\varphi_1)}\right] \tag{3.2}
$$

$$
\tau_{r\varphi}=-\frac{P_1\pi e^t}{2\varphi_0^2}\operatorname{sh}t\operatorname{sh}\frac{\pi}{\varphi_0}t\left[\frac{\sin\dfrac{\pi}{\varphi_0}(\varphi+\varphi_1)}{\left(\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{\varphi_0}t-\cos\dfrac{\pi}{\varphi_0}(\varphi+\varphi_1)\right)^2}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{\sin\dfrac{\pi}{\varphi_0}(\varphi-\varphi_1)}{\left(\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{\varphi_0}t-\cos\dfrac{\pi}{\varphi_0}(\varphi-\varphi_1)\right)^2}\right]
$$

Связи между постоянными величинами P_0, P_1 и α_0 находим из условий равенства нулю главного вектора и главного момента действующих сил

$$
P_1\cos\varphi_1=P_0\sin\varphi_0,\quad P_1\sin\varphi_1=-P_0\cos\varphi_0,\quad \frac{\alpha_0 E}{8\varphi_0(1-\nu^2)}+\frac{P_1}{2\varphi_0}=r_0P_0 \tag{3.3}
$$

Теперь на основе формул (3.2) рассмотрим поведение напряжений около точки $r=0$ ($t=\infty$). Для этого перейдем от координат (t, φ) к координатам (r, φ) и напишем асимптотику функций напряжений при $r\ll 1$:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_\varphi(r,\varphi)=-\frac{P_1\pi}{\varphi_0^2}\cos\frac{\pi\varphi}{\varphi_0}\cos\frac{\pi\varphi_1}{\varphi_0}r^{\pi/\varphi_0-2}+\frac{\alpha_0E\ln r}{2\varphi_0(1-\nu^2)}+A_0\\
&\sigma_r(r,\varphi)=\frac{P_1\pi}{\varphi_0^2}\cos\frac{\pi\varphi}{\varphi_0}\cos\frac{\pi\varphi_1}{\varphi_0}r^{\pi/\varphi_0-2}+\frac{\alpha_0E\ln r}{2\varphi_0(1-\nu^2)}+\frac{P_1}{\varphi_0}\\
&\tau_{r\varphi}(r,\varphi)=-\frac{P_1\pi}{\varphi_0^2}\sin\frac{\pi}{\varphi_0}\varphi\cos\frac{\pi}{\varphi_0}\varphi_1r^{\pi/\varphi_0-2}\\
&A_0=\frac{\alpha_0E}{2\varphi_0(1-\nu^2)}+\frac{P_1}{\varphi_0}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Из представлений (3.4) легко заметить, что логарифмические особенности в выражениях нормальных напряжений обусловлены только конкретным линейным видом перемещений точек границы $\varphi=\varphi_0$. Что же касается степенных особенностей в выражениях всех напряжений, то они появляются при углах раствора кругового сектора $\varphi_0>\pi/2$.

При рассмотрении коэффициентов интенсивности напряжений приходим к следующим выводам:

а) при произвольном значении угла ($\varphi=\varphi_1$) приложения нормальной нагрузки на дуге окружности ($r=1$) степенная особенность в нормальных напряжениях исчезает при подходе к точке $r=0$ по направлению $\varphi=\varphi_0/2$, а касательные напряжения достигают максимального значения;

б) при значении $\varphi_1=\varphi_0/2$ угла приложения нормальной нагрузки на дуге окружности степенные особенности исчезают во всех напряжениях и касательные напряжения всюду обращаются в нуль;

в) коэффициенты интенсивности в нормальных напряжениях достигают своих наибольших значений при $\varphi=\varphi_1=0$.

4. Отдельно рассмотрим случаи, когда $\varphi_0=\pi/2$, $\varphi_0=\pi$. В первом случае ($\varphi_0=\pi/2$) из второго равенства (3.3) следует, что $\varphi_1=0$, а из первого равенства (3.3) $-P_1=P_0$ (фиг. 2). В этом случае представления (3.4) принимают следующий вид:

$$\sigma_\varphi(r,\varphi)=-\frac{4P_0}{\pi}\cos 2\varphi+\frac{\alpha_0 E}{\pi(1-\nu^2)}\ln r+A_0$$

$$\sigma_r(r,\varphi)=\frac{4P_0}{\pi}\cos 2\varphi+\frac{\alpha_0 E\ln r}{\pi(1-\nu^2)}+\frac{2P_0}{\pi} \tag{4.1}$$

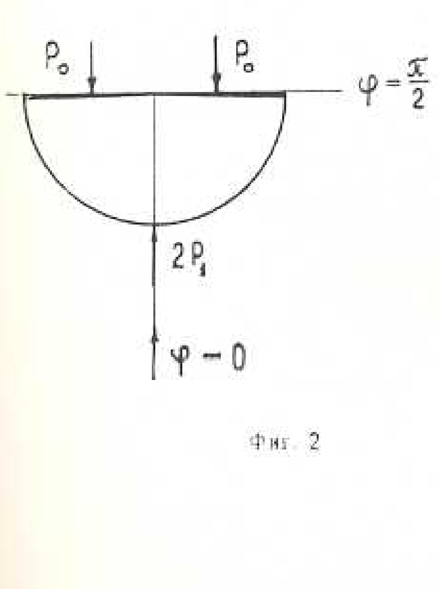
$$\tau_{r\varphi}(r,\varphi)=-\frac{4P_0}{\pi}\sin 2\varphi$$

Во втором случае ($\varphi_0=\pi$) из первого равенства (3.3) следует, что $\varphi_1=\pi/2$, а из второго равенства, что $P_1=P_0$ (фиг. 3). Отметим, что в этом случае хотя показатели степеней в представлениях (3.4) становятся равными -1, однако коэффициенты при этих степенях становятся равными нулю, то есть в разложениях по тригонометрическим функциям «неинтегрируемые» напряжения исчезают. Формулы (3.4) принимает следующий вид:

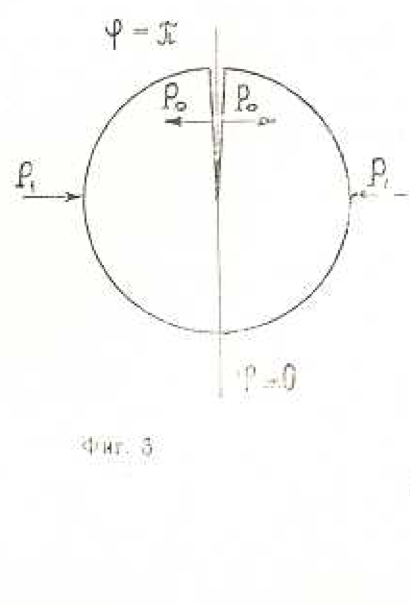
$$\sigma_\varphi(r,\varphi)=\frac{\alpha_0 E\ln r}{2\pi(1-\nu^2)}+\frac{\alpha_0 E}{2\pi(1-\nu^2)}+\frac{P_1}{\pi}$$

$$\sigma_r(r,\varphi)=\frac{\alpha_0 E\ln r}{2\pi(1-\nu^2)}+\frac{P_1}{\pi},\quad \tau_{r\varphi}(r,\varphi)=0 \tag{4.2}$$

При этом равенство нулю касательных напряжений имеет место всюду.



Фиг. 2



Фиг. 3

5. Рассмотрим задачу, когда на границе $r=1$ кругового сектора действует равномерно распределенная нагрузка. Граничные условия принимают следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\tau_{r\varphi}=u_\varphi=0 &&\text{при} \quad \varphi=0, && 0<t<\infty \\
&\tau_{r\varphi}=0 &&\text{при} \quad \varphi=\varphi_0, && 0<t<\infty \\
&u_\varphi=\alpha_0 e^{-t} &&\text{при} \quad \varphi=\varphi_0, && 0<t<\infty \\
&\tau_{r\varphi}=0 &&\text{при} \quad 0<\varphi<\varphi_0, && t=0 \\
&\sigma_r=\frac{P_1}{\varphi_0} &&\text{при} \quad 0<\varphi<\varphi_0, && t=0
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

В этом случае функция (1.5) и формулы (3.2) принимают следующий вид:

$$
\begin{gathered}
F(t,\varphi)=\left[\frac{P_1}{2\varphi_0}-\frac{\alpha_0 E}{8\varphi_0(1-\nu^2)}\right]e^{-t}-\frac{\alpha_0 E t e^{-t}}{4\varphi_0(1-\nu^2)} \\
\tau_{r\varphi}(r,\varphi)=0, \quad \sigma_\varphi(r,\varphi)=\frac{P_1}{\varphi_0}+\frac{\alpha_0 E}{2\varphi_0(1-\nu^2)}+\frac{\alpha_0 E\ln r}{2\varphi_0(1-\nu^2)} \\
\sigma_r(r,\varphi)=\frac{P_1}{\varphi_0}+\frac{\alpha_0 E\ln r}{2\varphi_0(1-\nu^2)}
\end{gathered}
\tag{5.2}
$$

Приведем также выражения для перемещений

$$
\begin{gathered}
u_r(r,\varphi)=\frac{1+\nu}{E}\left[(1-2\nu)\frac{P_1}{\varphi_0}-\frac{\alpha_0 E}{2\varphi_0(1+\nu)}+\frac{\alpha_0 E(1-2\nu)}{2\varphi_0(1-\nu^2)}\ln r\right]r \\
u_\varphi(r,\varphi)=\frac{\alpha_0\varphi r}{\varphi_0}
\end{gathered}
\tag{5.3}
$$

Из (5.2) и (5.3) легко заметить, что при равномерном нагружении границы $r=1$ кругового сектора степенные особенности в напряжениях исчезают и остаются только логарифмические особенности в выражениях нормальных напряжений. Касательные напряжения всюду равны нулю. Из всех компонент напряжений и перемещений от координаты φ зависят только перемещения u_φ. Отметим также, что перемещения в точке $r=0$ равны нулю.

ABOUT ONE BOUNDARY PROBLEM FOR AN ELASTIC CIRCULAR SECTOR

V. S. MAKARIAN, V. G. SARKISIAN

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Ս. ՄԱԿԱՐՅԱՆ, Վ. Գ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է հարթ խնդիր առաձգական շրջանային սեկտորի համար, երբ շրջանագծի աղեղի եզրին սիմետրիկ կենտրոնացված ուժերի տեսքով բեռներ են տրված։ Սեկտորի եզրի մնացած մասում տրված են տեղափոխություններ և զրոյական շոշափող լարումներ։

Խնդրի լուծումը կառուցված է ըստ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների վերլուծության և Ֆուրիեի դասական ինտեգրալի հիման վրա։ Ստացված է խնդրի փակ լուծում՝ բացահայտ տեսքով։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Теория упругости.—М.: Мир, 1975.
2. *Баблоян А. А.* Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях.—Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1962, т. 15, №1, с. 87—101.
3. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию.—М.: Наука, 1970.
4. *Алексанян Р. К., Казанчян Э. П., Саркисян В. Г.* Плоская контактная задача теории упругости составного круга.—Меж. вуз. сб. Механика, вып. 3. Ереван, 1984.
5. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости.—Л.: Наука, 1968.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды.—М.: Наука, 1981.
7. *Чобанян К. С.* Напряжения в упругих составных телах. Изд-во АН Арм. ССР, Ереван, 1987.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
15.VI. 1989