

УДК 532.5+536.24

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ
 В ВЯЗКОМ ТЕЧЕНИИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЖИДКОСТИ

ПЕТРОСЯН Л. Г.

Рассмотрено распределение температуры в случае плоскопараллельного установившегося ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений, между двумя параллельными стенками с учетом тепла, возникающего вследствие трения. Показано, что профиль распределения температуры не является параболическим и в случае несимметричных жидкостей выделение тепла больше, чем для классических ньютоновских жидкостей, где внутреннее вращение не учитывается.

Рассмотрим задачу распределения температуры в случае плоскопараллельного установившегося ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений между двумя параллельными стенками с учетом тепла, возникающего вследствие трения.

1. Составление уравнений движения

Общая система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости с несимметричным тензором напряжений имеет вид [1, 2]

$$\Delta \cdot \vec{v} = 0, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \Delta p + 2\nu \nabla^2 (\nabla \vec{v})^d + \nu_r \nabla^2 \cdot [2\vec{\omega} - \nabla \cdot \vec{v}] + \vec{f}$$

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 2\nu_r (\nabla \times \vec{v} - 2\vec{\omega}) + c_0 \nabla^2 (\nabla \vec{\omega}) + 2c_d \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{\omega})^d + 2c_a \nabla^2 (\nabla \vec{\omega})^a + \vec{c} \quad (1.1)$$

Здесь ρ — массовая плотность жидкости, p — давление, I — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, \vec{v} — вектор скорости точки, $\vec{\omega}$ — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν — кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r — кинематическая вращательная вязкость, c_0, c_d, c_a — коэффициенты моментной вязкости, $d(\dots)/dt$ — полная производная по времени, ∇ — пространственный градиент, $(\nabla \vec{v})^d$ и $(\nabla \vec{\omega})^d$ — симметричные части соответствующих диад, $(\nabla \vec{v})^a$ и $(\nabla \vec{\omega})^a$ — антисимметричные диады, \vec{f} — вектор массовой силы, \vec{c} — вектор массового момента.

К активным массовым силам, входящим в уравнения движения, необходимо присоединить архимедову подъемную силу, возникающую вследствие изменений объема, связанных с нагреванием.

В работе [3] показано, что массовая сила, обусловленная архимедовой подъемной силой, одинакова по порядку своей величины с силами инерции и трения лишь в том случае, если соотношение между

числом Грасгофа $Gr = \frac{\beta \bar{\rho} l^3 (\Delta T)_0}{\nu^2}$ и числом Рейнольдса $R = \frac{V_0 l}{\nu}$

равно

$$Gr \approx R^2$$

Здесь g — ускорение свободного падения, β — коэффициент кубического расширения, $(\Delta T)_0 = T_w - T_\infty$ — разность температур тела (стенки) и жидкости, l — характерная длина, V_0 — характерная скорость.

Такое соотношение между числом Грасгофа и числом Рейнольдса может существовать только при очень малых скоростях течения и значительных разностях температур.

Анализ системы уравнений движения (1.1) показывает, что в случае модели структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений, учитывающей внутренние степени свободы, массовая сила, обусловленная архимедовой подъемной силой, одинакова по порядку своей величины с силами инерции и трения, если $Gr \approx R^2$, то есть учет вращения частицы жидкости не приносит ничего нового.

Таким образом, архимедову подъемную силу в уравнениях (1.1) можно не учитывать при умеренно больших скоростях (при больших числах Рейнольдса) и при малых разностях температур [3]. Известно, что такие течения называются вынужденными конвективными течениями [3]. В случаях, когда архимедову подъемную силу в уравнениях движения (1.1) можно отбросить, а вязкости считать не зависящей от температуры, распределение скоростей становится независимыми от распределения температур.

2. Течение Пуазейля в плоскопараллельном канале

Плоскопараллельное установившееся ламинарное течение вязкой несжимаемой структурной жидкости с несимметричным тензором напряжений между двумя параллельными стенками были рассмотрены в работах [1,4].

Для распределения поступательной скорости u и скорости вращения частицы ω имеем [1]

$$u^* = \frac{u}{u_0} = 1 - b^{*2} - N^2 \frac{1}{\lambda} \frac{\text{ch}^2 \lambda y - \text{ch}^2 \lambda b^*}{\text{sh}^2 \lambda} \quad (2.1)$$

$$\omega^* = \frac{\omega b}{u_0} = b^* - \frac{\text{sh} \lambda y}{\text{sh} \lambda} \quad (2.2)$$

где

$$u_0 = -\frac{1}{2} b^{2\gamma-1} \frac{dP}{dx}, \quad b^* = \frac{y}{b}, \quad \lambda = kb = \frac{N}{l} b, \quad k = \frac{N}{l}$$

$$N = \left(\frac{\tau_r}{\tau_t + \tau_r} \right)^{1/2}, \quad l = \left(\frac{c'_0 + c'_d}{4\tau_t} \right)^{1/2} \quad \tau_t = \nu \rho, \quad \tau_r = \nu_r \rho, \quad c'_0 = c_{a0}, \quad c'_d = c_{d0} \quad (2.3)$$

Здесь u_0 — максимальная скорость в классическом течении Пуазейля, которая достигается при $y=0$; u — проекция вектора скорости точки на ось канала x ; $\omega = \omega_z$ — проекция вектора угловой скорости вращения частицы на ось z ; $2b$ — расстояние между стенками; N — безразмерный параметр связи, характеризующий связь уравнений поступательного и вращательного движений; l — параметр, который может быть отождествлен с некоторой характеристикой вещества зависящей от размера молекул (подструктуры); i — число, характеризующее взаимосвязь между геометрией и состоянием жидкости [1].

При получении (2.1) и (2.2) принято, что жидкость прилипает к стенкам канала при $y = \pm b$ и следовательно, $u(\pm b) = 0$ и $\omega(\pm b) = 0$.

3. Составление уравнения энергии

Из уравнения «первого закона термодинамики» для систем с несимметричным тензором напряжений имеем [1]

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \nabla \cdot \vec{v} + \rho \dot{\Phi} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (3.1)$$

где

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T$$

Здесь e — удельная внутренняя энергия; \vec{q} — вектор потока тепла через единицу площади в единицу времени за счет теплопроводности; κ — коэффициент теплопроводности; T — абсолютная температура; Φ — скорость диссипации механической энергии (на единицу массы жидкости), вызываемой вязкостью жидкости.

Для скорости диссипации (на единицу объема жидкости) имеем [1]

$$\begin{aligned} \rho \Phi = \tau_t & \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} + c'_0 \left[\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} - \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ & + \tau_r \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 4\omega_x \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \right. \\ & \left. - 4\omega_y \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - 4\omega_z \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 4(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) \right] + \left(c'_0 - \frac{2}{3} c'_d \right) \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right)^2 + c'_d \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} + \frac{\partial \omega_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} + \frac{\partial \omega_z}{\partial x}\right)^2 \quad (3.2)$$

В том случае, когда скорость движения жидкости мала по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемыми ими изменениями термодинамических величин можно пренебречь. При определении производных от термодинамических величин в этом случае надо считать постоянным давление. Тогда будем иметь следующее термодинамическое соотношение [5]:

$$T \frac{ds}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} \quad (3.3)$$

где s — удельная энтропия, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Используя уравнение сохранения энергии (3.1) и уравнение неразрывности (1.1), соотношение (3.3) перепишем в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{1}{c_p} \Phi \quad (3.4)$$

Здесь было использовано также соотношение Гиббса [6]

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{d(1/\rho)}{dt}$$

4. Определение распределения температуры

Так как для плоской задачи Пуазейля скорость диссипации согласно (3.2) равно

$$\rho \Phi = (\eta + \gamma_v) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 4\gamma_v \left(\omega \frac{\partial u}{\partial y} + \omega^2\right) + (c_a + c_d) \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2$$

то уравнение для распределения температуры (уравнение энергии (3.4)) примет вид

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) &= \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + (\eta + \gamma_v) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \\ &+ 4\gamma_v \left(\omega \frac{\partial u}{\partial y} + \omega^2\right) + (c_a + c_d) \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Допустим, что обе стенки канала имеют одинаковую температуру, тогда граничные условия будут иметь вид

$$T = T_0 \quad \text{при } y = \pm b \quad (4.2)$$

Уравнение (4.1) при граничных условиях (4.2) дает для распределения температуры решение, не зависящее от x . Поскольку $v \equiv 0$, а T не зависит от x , то вся левая часть уравнения (4.1), представ-

ляющая перенос тепла посредством конвекции, опадает [3,7]. Следовательно, возникающее при течении поле температур обусловлено только теплопроводностью в поперечном направлении и теплом, образующимся вследствие трения. Отбросив в уравнении (4.1) члены, равные нулю, мы получим

$$\lambda \frac{d^2 T}{dy^2} = -(\tau_w - \tau_w) \left(\frac{du}{dy} \right)^2 - 4\tau_w \left(w \frac{du}{dy} + w^2 \right) + (c_a' + c_d') \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 \quad (4.3)$$

Вычисляя из (2.1) и (2.2) значения w^2 , производных $\frac{du}{dy}$, $\frac{dw}{dy}$ и подставляя их в уравнение (4.3), при интегрировании при граничных условиях (4.2), получим следующее выражение для распределения температуры по сечению канала:

$$\begin{aligned} \Delta T^* = \lambda \frac{T(y) - T_0}{\eta u_0^2} = & \frac{1}{3} [1 - (b^*)^4] + N^2 \left[\frac{1}{i^2 \operatorname{sh}^2 \lambda} (\operatorname{ch} 2\lambda - \operatorname{ch} 2\lambda b^*) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{2N^2}{1-N^2} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \lambda} + \frac{2}{i^2} \right) (1 - b^{*2}) + \frac{1+N^2}{1-N^2} \frac{1}{i^2} \left(1 - \frac{b^*}{\operatorname{sh} \lambda} \operatorname{sh} \lambda b^* \right) + \right. \\ & \left. + \frac{8(2-N^2)}{1-N^2} \frac{1}{i^2 \operatorname{sh} \lambda} (\operatorname{ch} \lambda - \operatorname{ch} \lambda b^*) \right] \quad (4.4) \end{aligned}$$

Максимальное повышение температуры получается в середине канала и равно

$$\begin{aligned} \Delta T_{\max}^* = \lambda \frac{T_{\max} - T_0}{\eta u_0^2} = & \frac{1}{3} + N^2 \left[\left(\frac{2N^2}{1-N^2} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \lambda} + \frac{4}{i^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1+N^2}{1-N^2} \frac{1}{i^2} + \frac{8(2-N^2)}{1-N^2} \frac{1}{i^2 \operatorname{sh} \lambda} (\operatorname{ch} \lambda - 1) \right] \quad (4.5) \end{aligned}$$

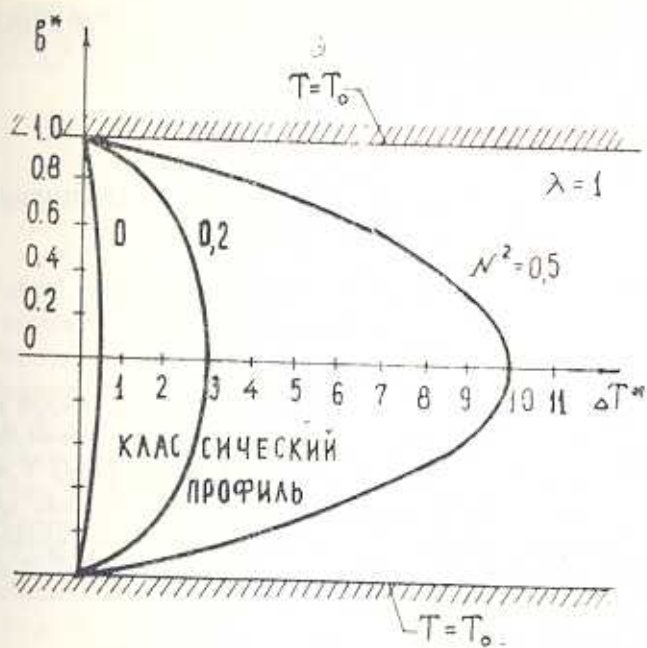
Выражение безразмерного распределения температуры (4.4) для течения в плоскопараллельном канале в предельном случае $N=0$ или $\lambda \rightarrow \infty$ сводится к классическому решению, полученное Г. Шлихтингом в [3,7]

$$\lim_{\substack{N \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow \infty}} \Delta T^* = \frac{1}{3} [1 - (b^*)^4]$$

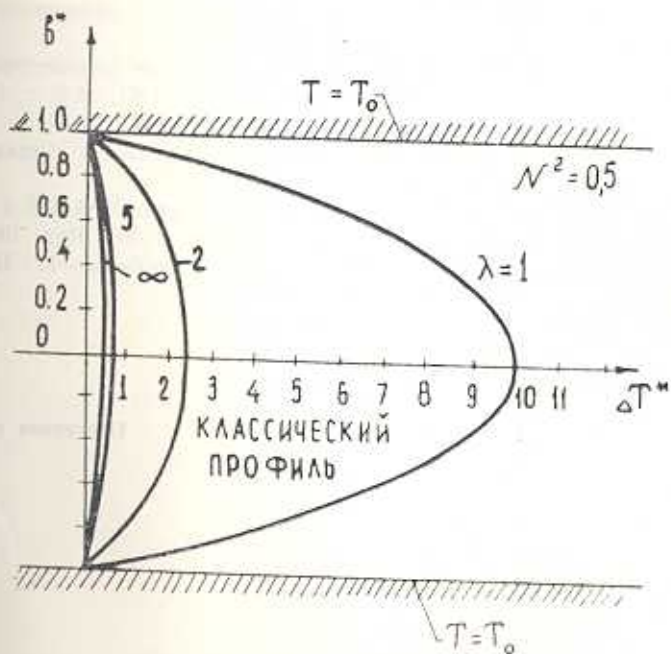
Для различных значений N (при $\lambda=1$) на фиг. 1 изображено отличие распределения температуры от классического течения Пуазейля.

Как видно из фиг. 1, профиль распределения температуры уже не является параболическим. Кроме того, выделение тепла здесь больше тепла для классических ньютоновских жидкостей, где внутреннее вращение не учитываются.

На фиг. 2 показаны графики распределения безразмерной температуры при различных значениях параметра λ и $N^2=0,5$. График по-



Фиг. 1



Фиг. 2

казывает, что чем ниже значение λ , тем более ярко выражены эффекты учета подструктуры жидкости на распределения температуры по сечению канала.

ABOUT ONE SOLUTION OF TEMPERATURE DISTRIBUTION IN VISCID FLUID

L. G. PETROSIAN

ՄԱՆՈՒՅՅԻ ԵՎ ՄԻՔՐՈՍԿՈՒ շԵՂՈՒՄԻ ՀԱՅՐԲՈՒՄ ՋԵՐՄԱՍԻՏԻՃԱՆԱԿՅՐՆ
ԲԱՇԽՄԱՆ ՄԵՆ ԼՈՒՆՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍԻԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Դիտարկված է շերտաախճանային բաշխումը ոչ սիմետրիկ լարման թեթև-
գորով մածուցիկ անսեղմելի հեղուկի երկու զուգահեռ պատերի միջև հարթ
զուգահեռ հաստաաված լամինար հոսանքի դեպքում: Հաշվի է առնված շրջ-
ման հեռանալով առաջացած շերտաթյունը: Յույ՜ է արված, որ շերտաախ-
ճանների բաշխման պրոֆիլը ոչ պարաբոլային է, ե ոչ սիմետրիկ հեղուկ-
ների դեպքում անշատովոզ շերտաթյունը մեծ է, քան նյութանյան դասական
հեղուկներում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Л. Г. Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений.—Ер.: Изд-во ЕГУ, 1984. 308 с.
2. Нгуен Ван Дьен, Листрова А. Т. О неизоэнтальной модели несимметричных жидкостей.—Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1967, №5, с. 132—136.
3. Шахтинс Г. Теория пограничного слоя. —М.:Наука,1974. 711 с.
4. Попель А. С. О гидродинамике суспензий.—Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1969, №4, с. 24—20.
5. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Гидродинамика.—М.: Наука, 1986. 736 с.
6. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика.—М.: Мир, 1964. 456 с.
7. Гребер Г., Эрк С., Грисудль У. Основы учения о теплообмене.—М.: Изд-во ИЛ, 1958. 566 с.

Երևանский государственный
университет

Поступила в редакцию
15.VI.1987