ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 1, 1990 Механика

УДК 539.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ НАИБОЛЬШЕЙ ЖЕСТКОСТИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

ГРИГОРЯН С. А.

Рассматривается задача проектирования ортотропной круглой пластинки радиуса R и толщины h, загруженной постоянной нормальной нагрузкой q

Пластинка отнесена к цилиндрической системе координат $0, r, \theta, z$ так, что координатная плоскость $z=0$ совпадает со срединной плоскостью пластинки. Материал пластинки обладает тремя плоскостями упругой симметрии, перпендикулярных в каждой точке соответствующим координатным линиям, причем полюс анизотропии совпадает с центром пластинки. Варьированием структурой материала и расположением опорного контура определяется пластинка наибольшей жесткости.

Предполагается, что пластинка изготовлена из $2n$ слоев, поочередно армированных в радиальном и окружном направлениях. При этом слои с нечетной нумерацией $(1, 3, \ldots, 2n-1)$ собраны из m_1 элементарных слоев, армированных в радиальном направлении, а слои с четной нумерацией $(2, 4, \ldots, 2n)$ — из m_2 элементарных слоев, армированных в окружном направлении. Из сказанного следует, что общая толщина $h=nm\delta_0$, где δ_0 — толщина монослоя, а $m=m_1+m_2$. Параметр $\xi=m_1/m$ определяет относительную толщину радиально-армированных слоев пластинки в пакете. Принимается, что элементарные слои, армированные как в радиальном, так и в окружном направлениях, имеют одинаковое содержание армирующего материала в единице объема, так что упругие характеристики этих слоев в ортогональных направлениях одинаковы [1].

Пусть пластинка опирается по контуру $r=R_1$, где $0<R_1\leq R$. Уравнение равновесия ортотропной пластинки относительно прогиба $W(r)$ представляется в виде [2]

$$D_{rr}\frac{d^4 W_i}{dr^4}-2D_{rr}\frac{1}{r}\frac{d^3 W_i}{dr^3}-D_{\theta\theta}\frac{1}{r^2}\frac{d^2 W_i}{dr^2}+D_{\theta\theta}\frac{1}{r^3}\frac{dW_i}{dr}=q \tag{1}$$

где $i=1, 2$, соответственно, для областей $0\leq r\leq R$ и $R_1\leq r\leq R$.

Граничные условия записываются в виде

$$\lim_{r\to 0} W_1(r)<\infty, \quad \frac{dW_1}{dr}=0 \quad \text{при} \quad r=0$$

$$W_1=W_2=0, \quad \frac{dW_1}{dr}=\frac{dW_2}{dr}, \quad M_{rr}^{(1)}=M_{rr}^{(2)} \quad \text{при} \quad r=R_1 \tag{2}$$

$$M_{rr}^{(2)}=0, \quad N_r^{(2)}=0 \quad \text{при} \quad r=R$$

Здесь

$$M_{rr}^{(i)}=-D_{rr}\frac{d^2 W_i}{dr^2}-D_{r\theta}\frac{1}{r}\frac{dW_i}{dr}$$

$$N_r^{(i)}=-D_{rr}\left(\frac{d^3 W_i}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2 W_i}{dr^2}\right)+D_{\theta\theta}\frac{1}{r^2}\frac{dW_i}{dr} \tag{3}$$

соответственно, изгибающий момент и поперечное усилие в сечениях $r=\mathrm{const}$, а D_{rr}, $D_{\theta\theta}$ и $D_{r\theta}$—жесткости пластинки рассматриваемой структуры [1]

$$D_{rr}=\frac{[(B_{rr}-B_{\theta\theta})\xi+B_{\theta\theta}]h^3}{12}, \quad D_{\theta\theta}=\frac{[(B_{\theta\theta}-B_{rr})\xi+B_{rr}]h^3}{12}, \quad D_{r\theta}=\frac{B_{r\theta}h^3}{12} \tag{4}$$

Здесь B_{rr}, $B_{\theta\theta}$ и $B_{r\theta}$—упругие характеристики монослоя ортотропного композиционного материала.

При выводе этих выражений пренебрегались члены порядка $1/n$ и $1/n^2$, где n—общее число монослоев армированных в радиальном и кольцевом направлениях.

Решение краевой задачи (1) и (2) с учетом (3) имеет вид

$$W_1=\frac{qR^4\cdot 12}{64B_{rr}h^3}\,\frac{32}{(1-\bar{B}_{rr})\xi+\bar{B}_{rr}}\left\{(\beta^{1+k}-\gamma^{1+k})\left[\frac{3+\mu}{(9-k^2)(1+k)(k+\mu)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{k(1+\mu)(\beta^{1-k}+\beta^{1+k}-2)+(k^2+\mu)(\beta^{1-k}-\beta^{1+k})}{2k(1-k^2)(1+k)(k+\mu)}\right]-(\beta^4-\gamma^4)\frac{1}{4(9-k^2)}\right\} \tag{5}$$

$$W_2=\frac{qR^4\cdot 12}{64B_{rr}h^3}\,\frac{32}{(1-\bar{B}_{rr})\xi+\bar{B}_{rr}}\left\{\beta\gamma\left[\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^k-\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^k\right]\frac{1}{2k(1-k^2)}+\right.$$
$$+\frac{\beta^2-\gamma^2}{2(1-k^2)}+(\beta^{1+k}-\gamma^{1+k})\left[\frac{3+\mu}{(9-k^2)(1+k)(k+\mu)}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{k(1+\mu)(\beta^{1-k}+\beta^{1+k}-2)+(k^2+\mu)(\beta^{1-k}-\beta^{1+k})}{2k(1-k^2)(1+k)(k+\mu)}\right]\right\} \tag{6}$$

где введены обозначения:

$$k^2=\frac{D_{\theta\theta}}{D_{rr}}=\frac{(\bar{B}_{\theta\theta}-1)\xi+1}{(1-\bar{B}_{\theta\theta})\xi+\bar{B}_{\theta\theta}}, \quad \gamma=r/R, \quad \beta=R_1/R$$

$$\mu = \frac{D_{r\theta}}{D_{rr}} = \frac{\bar{B}_{r\theta}}{(1-\bar{B}_{\theta\theta})\xi + \bar{B}_{\theta\theta}}$$

в которых $\bar{B}_{r\theta}=B_{r\theta}/B_{rr}$ и $\bar{B}_{\theta\theta}=B_{\theta\theta}/B_{rr}$.

Ставится задача нахождения оптимального значения параметров ξ и β, обеспечивающих максимальную жесткость пластинки, то есть

$$W_{\text{опт}}=\min_{\xi,\beta}\max_{\gamma} W_i(\xi, \beta, \gamma) \tag{7}$$

при ограничениях

$$0\leqslant\xi\leqslant1,\quad 0<\beta\leqslant1,\quad 0\leqslant\gamma\leqslant\beta \quad (i=1);\quad \beta\leqslant\gamma\leqslant1 \quad (i=2) \tag{8}$$

и при заданных R, h, B_{rr}, $B_{\theta\theta}$, $B_{r\theta}$, q.

В качестве примера рассматривается пластинка, изготовленная из монослоев ортотропного боропластика, армированных в радиальном и кольцевом направлениях.

Разработан алгоритм численного решения задачи (7) при (8) и составлена соответствующая программа.

В табл. 1 для различных значений структурного параметра ξ, характеризующего анизотропию пластинки, приведены значения $\beta_{\text{опт}}=\beta_*$, значение $\gamma=r/R$, при котором достигается $\max \bar{W}_i(\gamma, \beta, \xi)$ и соответствующее $\min_{\beta}\max_{\gamma} \bar{W}_i(\gamma, \beta, \xi)$. Здесь

$$\bar{W}=W_i 64 B_{rr} h^3/12 q R^4$$

есть безразмерное значение прогиба пластинки.

Как видно из табл. 1, оптимальное значение параметра β, характеризующее расположение опорного контура для всех значений структурного параметра ξ, монотонно меняется в узком диапазоне

$$0{,}672\leqslant\beta\leqslant0{,}693$$

Таблица 1

ξ	β	γ	$\bar{W}$
0,00	0,693	1,00	0,6452
0,05	0,691	1,00	0,5463
0,10	0,689	1,00	0,4834
0,15	0,688	0,00	0,4325
0,20	0,687	0,00	0,3896
0,25	0,685	1,00	0,3688
0,30	0,684	1,00	0,3437
0,35	0,683	1,00	0,3235
0,40	0,682	1,00	0,3072
0,45	0,681	1,00	0,294
0,55	0,680	0,00	0,2674
0,60	0,679	0,00	0,2550
0,65	0,678	1,00	0,2486
0,70	0,677	1,00	0,2442
0,75	0,676	1,00	0,2410
0,80	0,676	0,00	0,2332
0,85	0,675	0,00	0,2262
0,90	0,674	0,00	0,2211
0,95	0,673	0,00	0,2195
1,00	0,672	0,00	0,2262

Оптимальный проект пластинки реализуется при

$$\xi=0{,}95,\quad \beta=0{,}673 \quad \text{и при этом} \quad \overline{W}_{\text{опт}}=0{,}2195$$

причем этот проект содержит всего 5% монослоев, армированных в кольцевых направлениях. Наихудший проект достигается при $\xi=0$ (пластинка из монослоев, армированных только в кольцевом направлении) и при этом

$$\max_{\xi}\min_{\beta}\max_{\tau}\overline{W}=0{,}6452$$

Таким образом, структурная оптимизация приводит к существенному улучшению проекта пластинки в смысле жесткости, причем

$$\max_{\xi}\min_{\beta}\max_{\tau}\overline{W}=2{,}91\min_{\xi}\min_{\beta}\max_{\tau}\overline{W}$$

то есть приблизительно в 3 раза.

DESIGNING OF AN OPTIMAL PLATE OF THE GREATEST RIGIDITY FROM COMPOSITE MATERIAL

S. A. GRIGORIAN

ԱՌԱՎԵԼԱԳՈՒՅՆ ԿՈՇՏՈՒԹՅԱՄԲ ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՆՅՈՒԹԻՑ ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ

Ս. Հ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է օրթոտրոպ կլոր սալի նախագծման խնդիրը: Փոփոխելով սալի կոմպոզիցիոն նյութի կառուցվածքը և հենման կոնտուրի վիճակը, գտնված է առավելագույն կոշտությամբ սալ: Ցույց է տրված, որ օպտիմալ ձևով ընտրելով սալի նյութի կառուցվածքը կարելի է էապես փոքրացնել սալի ամենամեծ ճկվածքը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белубкян Э. В., Гнуни В. Ц.* К вопросу проектирования гибкой круглой пластинки из композиционного материала.—Инж. проблемы строительной механики, Ереван, 1985, с. 72—76.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки.—М.: ОГИЗ, 1947. 354 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
13.X.1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 1, 1990 Механика

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ УПРУГОМ ШАРЕ

СААКЯН С. Г.

В работе рассматривается осесимметричная задача о распространении упругих волн в радиально-неоднородном упругом шаре при условии, что на его поверхности известны радиальное и касательные напряжения. Изучены также стоячие колебания радиально-неоднородного упругого шара.

1. Общие формулы. Пусть коэффициенты Ламе λ, μ и плотность ρ упругого шара в сферических координатах (r, θ, φ) заданы функциями:

$$\lambda=\lambda_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}};\quad \mu=\mu_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}};\quad \rho=\rho_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{4}{\gamma-2}} \tag{1.1}$$

где $\lambda_0=(\gamma-2)\mu_0$; μ_0, ρ_0 — коэффициенты Ламе и плотность среды при $r=r_0$; $\gamma=(\lambda_0+2\mu_0)/\mu_0$.

Волновое поле перемещений в неоднородном изотропном упругом шаре $r<r_0$ в любой момент времени $t>0$ определяется векторным уравнением упругости

$$(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}+\operatorname{grad}\lambda\operatorname{div}\vec{u}+$$

$$+\operatorname{grad}\mu\times\operatorname{rot}\vec{u}+2\operatorname{grad}\mu\operatorname{grad}\vec{u}=\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

при условиях

$$\vec{u}|_{t=0}=\left.\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \tag{1.3}$$

$$\sigma_{rr}(r_0, \theta, t)=\sigma_0 f_1(\theta, t);\quad \sigma_{r\theta}(r_0, \theta, t)=\sigma_0 f_2(\theta, t);\quad \sigma_{r\varphi}(r_0, \theta, t)=\sigma_0 f_3(\theta, t) \tag{1.4}$$

Принимая предположение Рэлея, по которому зависимость между компонентами тензора напряжений и вектора перемещений $\vec{u}\,(u_r, u_\theta, u_\varphi)$ неоднородной упругой среды такая же, как и для однородной, в осесимметричном случае имеем

$$\sigma_{rr}=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r};\quad \sigma_{r\theta}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right) \tag{1.5}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\lambda\Theta+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right);\quad \sigma_{r\varphi}=\mu\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}\right) \tag{1.6}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\lambda\Theta+2\mu\left(\frac{u_r}{r}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta\right);\quad \sigma_{\theta\varphi}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-\frac{u_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta\right) \tag{1.7}$$

где

$$\Theta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_\theta) \tag{1.8}$$

Вектор перемещений $\vec{u}$ радиально-неоднородной упругой среды представим через обобщенные потенциалы Φ_1, Φ_2, Φ_3 в следующем виде:

$$\vec{u}(r,\theta,t)=\operatorname{grad}\Phi_1(r,\theta,t)+\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\frac{4}{\gamma-2}}\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\Phi_2(r,\theta,t)\vec{e}_r]+\operatorname{rot}[\Phi_3(r,\theta,t)\vec{e}_r] \tag{1.9}$$

то есть компоненты вектора перемещений $\vec{u}$ определим по формулам:

$$u_r=r_0\left[\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial R}-R^{-\frac{2\gamma}{\gamma-2}}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial\theta}\right)\right] \tag{1.10}$$

$$u_\theta=r_0\left[\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial R}+R^{-\frac{\gamma+2}{\gamma-2}}\frac{\partial^2\Phi_2^*}{\partial R\partial\theta}\right] \tag{1.11}$$

$$u_\varphi=-\frac{r_0}{R}\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial\theta} \tag{1.12}$$

где $\vec{e}_r$—орт по оси r, $R=r/r_0$; $\Phi_i^*=\Phi_i/r_0^2$, $i=1,2,3$.

Тогда, представление вектора перемещений (1.9) допускает разделение векторного уравнения движения (1.2) на следующие независимые скалярные уравнения [1]:

$$\Delta\Phi_1^*+\frac{4}{(\gamma-2)R}\frac{\partial\Phi_1^*}{\partial R}-\frac{4}{(\gamma-2)R^2}\Phi_1^*-\frac{1}{\gamma R^2}\frac{\partial^2\Phi_1^*}{\partial\tau^2}=0 \tag{1.13}$$

$$\Delta\Phi_2^*-\frac{2\gamma}{(\gamma-2)R}\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial R}-\frac{4\gamma}{(\gamma-2)R^2}\Phi_2^*-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi_2^*}{\partial\tau^2}=0 \tag{1.14}$$

$$\Delta\Phi_3^*+\frac{4}{(\gamma-2)R}\frac{\partial\Phi_3^*}{\partial R}-\frac{\gamma}{(\gamma-2)R^2}\Phi_3^*-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi_3^*}{\partial\tau^2}=0 \tag{1.15}$$

где

$$\Delta=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}R^2\frac{\partial}{\partial R}+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta};\quad \tau=\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}\frac{t}{r_0}$$

2. Распространение волн в неоднородном упругом шаре при действии на его поверхности радиальных давлений, зависящих от времени. В этом случае обобщенный потенциал Φ_1^* зависит от R и τ; $\Phi_2^*=\Phi_3^*=0$. Распространение волн в шаре описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial R^2}+\frac{2\gamma}{(\gamma-2)R}\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial R}-\frac{4}{(\gamma-2)R^2}\Phi_1^*-\frac{1}{\gamma R^2}\frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial \tau^2}=0 \tag{2.1}$$

при условиях

$$\Phi_1^*\Big|_{\tau=0}=\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}=0 \tag{2.2}$$

$$\left|\gamma R^{\frac{4\gamma}{\gamma-2}}\frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial R^2}+2(\gamma-2)R^{\frac{\gamma+2}{\gamma-2}}\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial R}\right|_{R=1}=-\frac{\sigma_0}{\mu_0}f(\tau) \tag{2.3}$$

Уравнение (2.1) и условие (2.3) в образе преобразования Лапласа по τ

$$\overline{\Phi}_1^*(R,p)=\int_0^\infty \Phi_1^*(R,\tau)\exp(-p\tau)d\tau \tag{2.4}$$

следующие:

$$\frac{d^2\overline{\Phi}_1^*}{dR^2}+\frac{2\gamma}{(\gamma-2)R}\frac{d\overline{\Phi}_1^*}{dR}-\left(\frac{p^2}{\gamma}+\frac{4}{\gamma-2}\right)\frac{\overline{\Phi}_1^*}{R^2}=0 \tag{2.5}$$

$$\left|\gamma R^{\frac{4\gamma}{\gamma-2}}\frac{d^2\overline{\Phi}_1^*}{dR^2}+2(\gamma-2)R^{\frac{\gamma+2}{\gamma-2}}\frac{d\overline{\Phi}_1^*}{dR}\right|_{R=1}=-\frac{\sigma_0}{\mu_0}\overline{f}(p) \tag{2.6}$$

Решение уравнения Эйлера (2.5), при условии (2.6) и ограниченности в центре шара, имеет вид

$$\overline{\Phi}_1^*(R,p)=-\frac{\sigma_0\overline{f}(p)R^{\alpha-c}}{\gamma\mu_0(\alpha-c)(\alpha-d)} \tag{2.7}$$

где

$$c=\frac{\gamma+2}{2(\gamma-2)};\quad d=c-\frac{\gamma-4}{\gamma};\quad \alpha=\sqrt{\frac{p^2}{\gamma}+c^2+\frac{4}{\gamma-2}}$$

Ветвь радикала α фиксирована условием $\arg\alpha=0$ при $p>0$. Согласно (1.10)—(1.12) и (1.5)—(1.8) компоненты вектора перемещений и тензора напряжений имеют вид

$$\overline{u}_r(R,p)=-\frac{r_0\sigma_0\overline{f}(p)R^{\alpha+c_0+1}}{\gamma\mu_0(\alpha-d)} \tag{2.8}$$

$$\overline{\sigma}_{rr}(R,p)=-\sigma_0\overline{f}(p)R^{\alpha+c_0} \tag{2.9}$$

$$\overline{\sigma}_{\theta\theta}(R,p)=\overline{\sigma}_{\varphi\varphi}(R,p)=-\frac{\gamma-2}{\gamma}\sigma_0\overline{f}(p)\left(1+\frac{b}{\alpha-d}\right)R^{\alpha+c_0} \tag{2.10}$$

где

$$c_0=\frac{6-\gamma}{2(\gamma-2)};\quad b=\frac{2(3\gamma-4)}{\gamma(\gamma-2)}$$

Обратное преобразование Лапласа изображений (2.8)—(2.10) получим при условии $\overline{f}(p)=1$, то есть $f(\tau)=\delta(\tau)$, где δ—функция Дирака. В общем случае для любой $\bar{f}(p)$, обращение выражений (2.8)—(2.10) находим по формуле свертки.

Из формул [2]

$$\exp(-a\sqrt{p^2+b^2}) = \delta(\tau-a) - H(\tau-a)\frac{ab}{\sqrt{\tau^2-a^2}} J_1(b\sqrt{\tau^2-a^2})$$

$$\bar{f}(\sqrt{p^2+b^2}) = f(\tau) - b\int_0^{\tau} f(\sqrt{\tau^2-u^2}) J_1(bu)\,du \tag{2.11}$$

получим

$$u_r(R,\tau) = -\frac{r_0\sigma_0}{\sqrt{\gamma}\mu_0} R^{c_1+1} H\left(\tau - \frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)\left\{\exp\left[-d\sqrt{\gamma}\left(\tau - \frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - R^{-d}\int_0^{\sqrt{\tau^2-\left(\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}} \exp[-d\sqrt{\gamma}\sqrt{\tau^2-u^2}]\, J_1(\sqrt{\gamma}\,\alpha_0 u)\,du\right\} \tag{2.12}$$

$$\sigma_{rr}(R,\tau) = -\sigma_0 R^{c_1}\left\{\delta\left(\tau - \frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha_0 \ln R^{-1} H\left(\tau - \frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}} J_1\left(\alpha_0\sqrt{\gamma}\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}\right)\right\} \tag{2.13}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(R,\tau) = \sigma_{\varphi\varphi}(R,\tau) = -\frac{\gamma-2}{\gamma}\sigma_0 R^{c_1}\left\{\delta\left(\tau - \frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right) - \right.$$

$$- H\left(\tau - \frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)\left[\frac{\alpha_0 \ln R^{-1}}{\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}} J_1\left(\alpha_0\sqrt{\gamma}\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}\right) - \right.$$

$$- b\sqrt{\gamma}\exp\left[-d\sqrt{\gamma}\left(\tau - \frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)\right] - b\alpha_0\sqrt{\gamma}R^{-d}\int_0^{\sqrt{\tau^2-\left(\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}} \exp[-d\sqrt{\gamma}\sqrt{\tau^2-u^2}]\times$$

$$\left.\left. \times J_1(\alpha_0\sqrt{\gamma}\,u)\,du\right]\right\} \tag{2.14}$$

где H—функция Хевисайда, J_1—функция Бесселя.

В радиально-неоднородном упругом шаре при действии на его поверхности давлений, зависящих только от времени, распространяются волны перемещений и напряжений, фронт которых в любой $\tau > 0$ определяется уравнением

$$\tau-\frac{\ln R^{-1}}{\sqrt{\gamma}}=0 \tag{2.15}$$

Уравнение (2.15) определяет сферу с радиусом $R=\exp(-\sqrt{\gamma}\tau)$. Быстрое убывание по времени радиуса фронта волны приводит к тому, что волны перемещений и напряжений оказывают существенное воздействие вблизи поверхности шара. Эти волны не доходят до центра шара и, следовательно, от центра отраженных волн не возникают.

В формулах (2.12)—(2.14) члены при функции Хевисайда описывают волны, которые не возникают в однородной среде. Она распространяется со следом и ее появление можно объяснить дисперсией проходящих волн в неоднородной среде. Вблизи фронта (2.15) так называемая волна со следом имеет конечный разрыв, который следует из формул (2.12)—(2.14), если учесть, что предел $z^{-1}J_1(bz)$ при $z\to 0$ конечный.

Рассмотрим установившиеся волны в радиально-неоднородном шаре. При граничном условии $f(\tau)=\sigma_0 e^{i\omega\tau}$ получим

$$u_r(R,\tau)=-\frac{r_0\sigma_0 R^{n+1}\exp(i\Omega)}{\gamma\mu_0(\sigma-d)} \tag{2.16}$$

где фаза Ω определяется соотношением

$$\Omega=\omega\tau-\ln R^{-1}\sqrt{\frac{\omega^2}{\gamma}-c^2-\frac{4}{\gamma-2}} \tag{2.17}$$

Из условия $\Omega=\text{const}$ определяется фазовая скорость

$$v_\varphi=\frac{d(1-R)}{d\tau}=\frac{\omega R}{\sqrt{\frac{\omega^2}{\gamma}-c^2-\frac{4}{\gamma-2}}} \tag{2.18}$$

Волновое число следующее:

$$K(\omega)=\frac{\omega}{v_\varphi}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\omega^2}{\gamma}-c^2-\frac{4}{\gamma-2}} \tag{2.19}$$

Для групповой скорости получим выражение

$$v_g=\frac{d\omega}{dK}=\frac{R\gamma}{\omega}\sqrt{\frac{\omega^2}{\gamma}-c^2-\frac{4}{\gamma-2}} \tag{2.20}$$

Фазовая и групповая скорости зависят, как видно из формул (2.18) и (2.20), от частоты ω, координаты R и величины γ.

При частотах, меньше предельного

$$\omega^*=\sqrt{\gamma\left(c^2+\frac{4}{\gamma-2}\right)} \tag{2.21}$$

в радиально-неоднородном шаре появляются стоячие колебания.

3. Резонансные частоты радиально-неоднородного упругого шара.

при стоячих колебаниях. Рассмотрим решение системы уравнений (1.13)—(1.15), полагая, что обобщенные потенциалы имеют вид

$$\Phi^*_j(R, \theta, \tau)=\varphi_j(R)P_n(\cos\theta)e^{i\omega\tau}, \quad j=1, 2, 3 \tag{3.1}$$

где $P_n(\cos\theta)$—функция Лежандра, и на поверхности шара радиальное и касательные напряжения равны нулю.

Подставляя (3.1) в (1.13)—(1.15) и (1.4), имеем систему уравнений

$$\frac{d^2\varphi_1}{dR^2}+\frac{2\gamma}{(\gamma-2)R}\frac{d\varphi_1}{dR}-\left[n(n+1)+\frac{4}{\gamma-2}-\frac{\omega^2}{\gamma}\right]\frac{\varphi_1}{R^2}=0 \tag{3.2}$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dR^2}-\frac{4}{(\gamma-2)R}\frac{d\varphi_2}{dR}-\left[n(n+1)+\frac{4\gamma}{\gamma-2}-\omega^2\right]\frac{\varphi_2}{R^2}=0 \tag{3.3}$$

$$\frac{d^2\varphi_3}{dR^2}+\frac{2\gamma}{(\gamma-2)R}\frac{d\varphi_3}{dR}-\left[n(n+1)+\frac{\gamma}{\gamma-2}-\omega^2\right]\frac{\varphi_3}{R^2}=0 \tag{3.4}$$

при граничном условии

$$\left\{\mu_0R^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}}\left[(\gamma-2)\theta+2\frac{\partial u_r}{\partial R}\right]\right\}_{R=1}=0 \tag{3.5}$$

$$\left\{\mu_0R^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial R}+\frac{u_\theta}{R}\right]\right\}_{R=1}=0 \tag{3.6}$$

$$\left\{\mu_0R^{\frac{2\gamma}{\gamma-2}}\left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial R}-\frac{u_\varphi}{R}\right]\right\}_{R=1}=0 \tag{3.7}$$

где

$$u_r=r_0\left[\frac{d\varphi_1}{dR}+n(n+1)R^{-\frac{2\gamma}{\gamma-2}}\varphi_2\right]P_n(\cos\theta) \tag{3.8}$$

$$u_\theta=r_0\left[\frac{\varphi_1}{R}-R^{-\frac{\gamma+2}{\gamma-2}}\frac{d\varphi_2}{dR}\right]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \tag{3.9}$$

$$u_\varphi=-\frac{r_0}{R}\varphi_3\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \tag{3.10}$$

Решение уравнений Эйлера (3.2)—(3.4), при условии ограниченности в центре шара, следующие:

$$\varphi_1(R)=A_nR^{\alpha_n+c}; \quad \varphi_2(R)=B_nR^{\beta_n+c}; \quad \varphi_3(R)=C_nR^{\gamma_n-c} \tag{3.11}$$

где A_n, B_n, C_n—произвольные постоянные,

$$\alpha_n=\sqrt{a_n^2-\frac{\omega^2}{\gamma}}; \quad \beta_n=\sqrt{b_n^2-\omega^2}; \quad \gamma_n=\sqrt{c_n^2-\omega^2}$$

$$a_n^2 = n(n+1)+c^2-\frac{4}{\gamma-2};\quad b_n^2=n(n+1)+c^2+\frac{4\gamma}{\gamma-2};\quad c_n^2=n(n+1)+c^2+\frac{4}{\gamma-2}$$

Радиальные колебания неоднородного упругого шара имеют место при $n=0$. Решения (3.11) при $n=0$ с граничным условием (3.5)—(3.7) даст уравнение частот

$$(\alpha_0-c)(\alpha_0-d)=0 \tag{3.12}$$

Корни уравнения (3.12), определяющие резонансные частоты радиальных колебаний, следующие:

$$\omega_{1p}=2\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-2}};\quad \omega_{2p}=2\sqrt{\frac{3\gamma-4}{\gamma}} \tag{3.13}$$

При $n>0$, подставляя (3.11) в граничное условие (3.5)—(3.7), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно A_n, B_n, C_n. Условие, при котором однородная система имеет нетривиальное решение, следующее:

$$\Delta_n(\omega)\equiv\{(\alpha_n-c)[\gamma(\alpha_n-c)+\gamma-4]-(\gamma-2)n(n+1)\}[(\beta_n+c)(\beta_n-c-2)+$$
$$+n(n+1)]-4n(n+1)(\alpha_n-c-1)(\beta_n-c-3)=0 \tag{3.14}$$

Таблица 1

Корни уравнения частоты $\Delta_n(\omega)=0$

γ \ n	0	1	2	3	4	5	6
2.5	2.3665 4.4722	0.0016 2.8647 4.4722	1.2245 4.0385 4.4722	1.6942 4.4722 5.4739	2.2565 4.4722 6.9535	2.9270 4.4722 8.3666	3.6715 4.4722
3	2.5821 3.4642	2.5821 3.4642	0.0030 3.0817 3.4642	1.3040 3.4642 4.1854	1.9568 3.4642 5.4777	2.6994 3.4642	3.4642 3.5126
10	2.2362 3.2849	0.0033 2.2362 2.6439	1.4912 2.2362	2.2362 2.4089	2.2362 3.3412	2.2362 4.2849	2.2362 5.2334

Корни уравнения (3.14) определяют безразмерную величину резонансных частот радиально-неоднородного упругого шара, которые для некоторых n и γ приведены в табл. 1.

WAVES PROPOGATION IN RADIALLY NON-HOMOGENEOUS ELASTIC SPHERE

S. G. SAHAKIAN

ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ-ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԳՆԴՈՒՄ

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Ամփոփում

Շառավղային-անհամասեռ առաձգական գնդի համար լուծված է եզրային խնդիր, երբ հայտնի են շառավղային և շոշափող լարումները մակերևույթի վրա։ Ներկայացնելով տեղափոխության վեկտորը ընդհանրացված պոտենցիալների միջոցով, անհամասեռ առաձգական միջավայրի շարժման վեկտորական հավասարումը տրոհվել է երկուսի՝ անկախ, սկալյար, դիֆերենցիալ հավասարումների։ Կոնկրետ տատանումների դեպքում որոշվել են ռեզոնանսային հաճախությունները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саакян С. Г.* Независимые скалярные уравнения движения некоторых радиально-неоднородных изотропных упругих сред.—Докл. АН Арм. ССР, 1987, т. 85, № 4.
2. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z—преобразования.—М.: Наука, 1971. 288 с.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию
6.II.1989