ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 1, 1990 Механика

УДК 539.3

О ЧАСТОТАХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН, ЗАГРУЖЕННЫХ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКОЙ

ГНУНИ В. Ц.

Как известно, в линейной теории изгиба пластинок, загруженных поперечной нагрузкой, в срединной плоскости пластинки не возникают усилия T_{ik} $(i, k=1,2)$ и, следовательно, считается, что действующая на пластинку поперечная нагрузка не влияет на частоты собственных колебаний. Однако при изгибе весьма тонких (гибких) пластинок, при прогибах, сравнимых с толщиной пластинки, в срединной плоскости пластинки возникают значительные растягивающие и сдвигающие усилия, которые могут привести к существенному изменению частот собственных колебаний пластинки.

В настоящей работе делается попытка дать качественную картину влияния поперечной нагрузки на частоты собственных колебаний пластинки.

1. Пусть гибкая прямоугольная пластинка размерами a, b, h шарнирно оперта по контуру и находится под действием равномерной поперечной нагрузки интенсивности q.

Уравнения изгиба гибкой пластинки, отнесенной к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, представляются в виде [1]

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi_0+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)^2=0$$

$$D\Delta^2 w_0-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}=q \tag{1.1}$$

где w_0, Φ_0—функции прогиба и усилий начального статического состояния, $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$, E—модуль Юнга, ν—коэффициент Пуассона. Через функцию Φ_0 усилия в срединной плоскости определяются следующим образом:

$$T^0_{11}=\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y^2},\quad T^0_{22}=\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2},\quad T^0_{12}=-\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\,\partial y} \tag{1.2}$$

Малые поперечные колебания пластинки около изогнутого состояния равновесия (1.1) описываются уравнениями [2]:

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=0$$

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+D\Delta^2 w-T^0_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2T^0_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}-T^0_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}- \tag{1.3}$$

$$-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=0$$

где w, Φ—функции прогиба и усилий возмущенного (колебательного) состояния, ρ—плотность материала пластинки, t—время.

В уравнениях (1.3) учтены как усилия $T^0_{(k)}$, так и прогибы w_0 начального состояния.

Представления

$$\Phi_0=\Phi_{011}\sin\lambda_1 x\sin\mu_1 y,\quad w_0=f_{011}\sin\lambda_1 x\sin\mu_1 y \tag{1.4}$$

$$\Phi=\Phi_{mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\cos\omega_{mn}t,\quad w=f_{mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\cos\omega_{mn}t \tag{1.5}$$

где $\lambda_m=m\pi/a$, $\mu_n=n\pi/b$, тождественно удовлетворяют граничным условиям шарнирного опирания пластинки

$$\begin{aligned}&T_{11}=0,\quad v=0,\quad w=0,\quad M_{11}=0\quad \text{при}\quad x=0,\ x=a\\ &T_{22}=0,\quad u=0,\quad w=0,\quad M_{22}=0\quad \text{при}\quad y=0,\ y=b\end{aligned} \tag{1.6}$$

Как показано в [1], представление (1.4), в пределах прогибов начального состояния w_0 порядка двух-трех толщин пластинки, достаточно хорошо описывает начальное изогнутое состояние.

При (1.4), (1.5) применением процедуры метода Бубнова-Галеркина из систем уравнений (1.1), (1.3) получается

$$K_{11}f_{011}+d_{11}f^3_{011}=\frac{16}{\pi^2}q \tag{1.7}$$

$$\omega_{mn}=\omega_{0mn}\left(1+\frac{d_{mn}}{K_{mn}}f_0^2\right)^{1/2} \tag{1.8}$$

Здесь введены обозначения ω_{mn}—частоты собственных колебаний пластинки около изогнутого положения равновесия,

$$\omega_{0mn}=\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\,(\lambda_m^2+\mu_n^2) \tag{1.9}$$

—частоты собственных колебаний незагруженной пластинки,

$$K_{mn}=D(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2,\quad d_{mn}=\frac{Eh}{3}\left|\frac{\beta_{11}}{2(\lambda_1^2+\mu_1^2)^2}+\frac{\beta_{mn}}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}\right|\beta_{mn}$$

$$\beta_{mn}=\frac{32\pi^2}{a^2b^2}\,\frac{m^2n^2}{(4m^2-1)(4n^2-1)}\left|2mn\left(\frac{\lambda_1\mu_n}{\mu_1\lambda_m}+\frac{\mu_1\lambda_m}{\lambda_1\mu_n}\right)-1\right| \tag{1.10}$$

Как видно из (1.8), частоты собственных колебаний пластинки, загруженной давлением q, увеличиваются по сравнению со свободной от давления пластинки и очевидно, что при прогибах начального состояния, значительно меньших толщин, влиянием начального состояния можно пренебречь.

2. Для иллюстрации, в качестве примера, рассмотрим квадратную

в плане пластинку при $\nu=0,3$. В этом случае уравнение (1.7) записывается в виде

$$f_*^3+2,51 f_*-q_*=0 \tag{2.1}$$

где $f_*=f_{011}/h$, $q_*=9a^4q/8\pi^2h^4E$ — безразмерные параметры стрелы прогиба и нагрузки.

В табл. 1 для различных значений q_* приводятся значения f_*.

Таблица 1

q_*	1	2	3	4	5	10	15	20
f_*	0,37	0,67	0,90	1,1	1,2	1,8	2,1	2,4

Из (1.8) для частот собственных колебаний загруженной квадратной пластинки при $\nu=0,3$ получается

$$\omega_{mn}=3\frac{h}{a^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left[(m^2+n^2)^2+0,2(1+3\alpha_{mn})\alpha_{mn}f_*^2\right]^{1/2} \tag{2.2}$$

где введено обозначение

$$\alpha_{mn}=\frac{m^2n^2(m^2+n^2-0,5)}{(m^2-0,25)(n^2-0,25)}$$

На основе (2.2) для различных значений q_* определены приведенные частоты собственных колебаний загруженной пластинки

$$\omega_{*mn}=\frac{a^2}{3h}\sqrt{\frac{\rho}{E}}\,\omega_{mn} \tag{2.3}$$

для $m=n=1$, при которых $\omega_{mn}\to\min\limits_{m,n}$.

Результаты расчета первой (наименьшей) частоты собственных колебаний загруженной панели приводятся в табл. 2.

Таблица 2

q_*	0	1	2	3	4	5	10	15	20
ω_{11}^*	2	2,6	3,3	3,9	4,6	5,2	7,1	8,4	9,3

Принципиальное значение учета усилий и прогибов начального состояния на значение частот собственных колебаний загруженной пластинки при сравнимых с толщиной прогибах очевидно.

Численные результаты, полученные в п. 2, являются общими для произвольных квадратных в плане пластинок. Однако, нетрудно показать, что эти результаты правомочны лишь для достаточно тонких пластинок, способных допускать сравнимые с толщиной прогибы в пределах упругости или до хрупкого разрушения. Из условия

$$\sigma_{11}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}^2+3\sigma_{12}^2\leqslant\sigma_{\text{доп}}^2 \tag{2.4}$$

где основные напряжения σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} определяются формулами [1],

$$\sigma_{11}=\frac{1}{h}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y^2}-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_{22}=\frac{1}{h}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right),\quad \sigma_{12}=-\frac{1}{h}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\,\partial y}-\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

можно получить следующую оценку для допускаемой относительной толщины h/a

$$\frac{h}{a}\leqslant\sqrt{\frac{2\sigma_{\text{доп}}}{E}}(14{,}1f_*-0{,}889f_*^2)^{-1/2}$$

Здесь f_* для заданного q определяется из уравнения (2.1).

Таким образом, при заданных a, E, $\sigma_{\text{доп}}$ существуют реальные пластинки, для которых учет начального состояния существенен при определении частот собственных колебаний. Так например, при $\sigma_{\text{доп}}/E=0{,}005$ и $f_*=2{,}1$, $a=100$ см получается, что $h\leqslant2{,}53$см. Отметим, что $f_*=2{,}1$ соответствует значению приведенной нагрузки $q_*=15$.

В заключение отметим, что вопросы влияния внешнего статически приложенного давления на частоты собственных колебаний оболочек исследованы достаточно полно. Причем в случае оболочек начальное состояние, вызываемое внешними нагрузками, можно рассматривать как безмоментным [3] или моментным, так и нелинейным [2, 4]. В случае же пластинок лишь геометрическая нелинейность дает возможность учета начального состояния на частоты малых колебаний около изогнутого состояния равновесия. В этом смысле из результатов работ [2,4], полученных для цилиндрической панели [2] и для гофрированных оболочек вращения [4], соответственно можно получить соотношения для исследования частот собственных колебаний, загруженных поперечным давлением прямоугольных в плане пластинок и для круглых пластинок.

Отметим также, что на основе [2] можно получить приближенное аналитическое выражение для частоты собственных колебаний загруженной пластинки, а на основе [4] можно провести точный численной анализ частот круглой загруженной давлением пластинки.

ON FREE-VIBRATION FREQUENCIES OF A PLATE UNDER ACTION OF A TRANSVERSE LOAD

V. Ts. GNUNY

ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ԲԵՌՈՎ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ ՍԱԼԵՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Ց. ԳՆՈՒՆԻ

Ամփոփում

Ինչպես հայտնի է, սալի սեփական գծային տատանումների հաճախականությունները կախված չեն արտաքին ճնշման մեծությունից։ Խիստ բարակ (ճկուն) սալերի ծռման դեպքում սալի միջին հարթությունում առաջանում են զգալի ձգող և շոշափող ճիգեր, որոնք բերում են բեռնավորված սալի սեփական տատանումների հաճախականության զգալի փոփոխության։ Ստացված են անհավասարություններ, որոնք հնարավորություն են տալիս արտաքին բեռի տրված արժեքների համար հաշվել բեռնավորված սալի սեփական գծային տատանումների հաճախականությունները։ Հաշված է սալի հարաբերական հաստության այն արժեքը, երբ տրված արտաքին բեռի տակ սալում առաջացած լարումները բավարարում են ամրության պայմանին, իսկ հաճախականությունների մեծացումը զգալի է։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки.—М.: Гостехиздат, 1956. 419 с.
2. *Гнуни В. Ц.* О собственных колебаниях цилиндрической панели, загруженной внешним давлением.—Инж. журнал МТТ, 1968, №2, с. 127—130.
3. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем.—М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
4. *Нарайкин О. С., Иванов И. П.* Численный расчет свободных колебаний предварительно нагруженных гофрированных оболочек вращения.—Изв. высших учебных заведений. Машиностроение, 1986, №2, с. 42—46.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
19.XII.1988