

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ
 С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

ЗОБНИН А. И., КУДРЯВЦЕВ Б. А., ПАРТОН В. З.

Рассматривается задача усреднения уравнений Максвелла для среды с упорядоченной микроструктурой, локальные свойства которой резко изменяются в пределах одной ячейки периодичности. Широкий круг физических задач, связанных с проблемой усреднения, рассматривается в [1—3], общая схема усреднения в задачах электромагнетизма представлена в [2]. Вывод усредненных уравнений Максвелла и общая вариационная формулировка задачи на ячейке для смеси изолятора и проводника приводятся и в [4]. В данной работе построены решения задач на ячейке и получены формулы для эффективной комплексной диэлектрической проницаемости слоистого композита, однонаправленного волокнистого композита, а также композита с дисперсными шаровыми включениями.

1. Следуя [2], рассмотрим систему уравнений Максвелла для неоднородной среды с периодической структурой, предполагая, что тензоры диэлектрической проницаемости ε_{kl} , магнитной проницаемости μ_{kl} и электропроводности σ_{kl} являются Y -периодичными [2] по пространственным переменным $\vec{y} = \vec{x}/\alpha$, где α — малый положительный параметр, характеризующий размеры ячейки периодичности. Свойства материала будем считать идентичными для соответствующих точек параллелепипеда Y с ребрами \vec{l}_s ($s=1, 2, 3$) и центром в начале координат, а также всех параллелепипедов, получаемых параллельным переносом на векторы $n_s \vec{l}_s$ (n_s — целые числа)

$$D_k^* = \varepsilon_{kl}(\vec{y}) E_l^*, \quad j_k^* = \sigma_{kl}(\vec{y}) E_l^*, \quad B_k^* = \mu_{kl}(\vec{y}) H_l^* \quad (1.1)$$

Рассмотрим поведение такого материала в монохроматическом поле с временным множителем $\exp(-i\omega t)$, предполагая размер ячейки α малым по сравнению с длиной волны. Первые два соотношения (1.1) формально объединяются в одно

$$-i\omega D_k^* + j_k^* = -i\omega \varepsilon_{kl}^*(\vec{y}) E_l^* \quad (1.2)$$

после введения комплексной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{kl}^* = \varepsilon_{kl} + (i/\omega)\sigma_{kl}$$

Система уравнений Максвелла для рассматриваемого поля имеет вид

$$-i\omega\vec{D}^s + \vec{j}^s = \text{rot}\vec{H}^s, \quad -i\omega\vec{B}^s = -\text{rot}\vec{E}^s \quad (1.3)$$

$$\text{div}\vec{D}^s = \rho^s \quad \text{div}\vec{B}^s = 0 \quad (1.4)$$

$$\text{div}(-i\omega\vec{D}^s + \vec{j}^s) = 0, \quad -i\omega\rho^s + \text{div}\vec{j}^s = 0 \quad (1.5)$$

В соответствии с методом двухмасштабного разложения [2] решение уравнений Максвелла будем искать в виде рядов по параметру α :

$$\vec{E}^s(\vec{x}) = E^{(0)}(\vec{x}, \vec{y}) + \alpha E^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) + \dots$$

$$\vec{H}^s(\vec{x}) = H^{(0)}(\vec{x}, \vec{y}) + \alpha H^{(1)}(\vec{x}, \vec{y}) + \dots$$

в которых $E^{(0)}$, $E^{(1)}$, ..., $H^{(0)}$, $H^{(1)}$, ... являются Y -периодичными по переменным $\vec{y} = \vec{x}'/\alpha$. Аналогичные разложения для \vec{D}^s , \vec{j}^s , \vec{B}^s получаются из (1.1), а разложение для плотности объемных зарядов ρ^s следует из (1.4) и начинается в общем случае с члена, пропорционального α^{-1} .

Подставив упомянутые разложения в (1.3)–(1.5) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях α^{-1} и α^0 , получим

$$\text{rot}_y \vec{j}^{(0)} = 0, \quad \text{rot}_y \vec{E}^{(0)} = 0 \quad (1.6)$$

$$\text{div}_y(-i\omega\vec{D}^{(0)} + \vec{j}^{(0)}) = 0, \quad \text{div}_y \vec{B}^{(0)} = 0 \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \text{div}_y \vec{D}^{(0)} = \rho^{(-1)}, \quad \text{div}_y \vec{j}^{(0)} = i\omega\rho^{(-1)}, \quad -i\omega\vec{D}^{(0)} + \vec{j}^{(0)} = \text{rot}_x \vec{H}^{(0)} + \text{rot}_y \vec{H}^{(1)} \\ -i\omega\vec{B}^{(0)} = -\text{rot}_x \vec{E}^{(0)} - \text{rot}_y \vec{E}^{(1)}, \quad \text{div}_x \vec{D}^{(0)} + \text{div}_y \vec{D}^{(0)} = \rho^{(0)} \\ \text{div}_x \vec{B}^{(0)} + \text{div}_y \vec{B}^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь индексами x и y обозначены переменные, по которым выполняется дифференцирование.

Применив к полученным уравнениям оператор усреднения

$$\langle f \rangle(\vec{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y}$$

где $|Y|$ — объем ячейки Y и учитывая периодичность слагаемых по \vec{y} , получим условие $\langle \rho^{(-1)} \rangle = 0$, а также усредненные уравнения Максвелла для эквивалентной однородной среды. Эти уравнения полностью совпадут с исходной системой (1.3)–(1.5), если в ней заменить \vec{D}^s , \vec{j}^s , ... на средние значения нулевых приближений $\langle \vec{D}^{(0)} \rangle$, $\langle \vec{j}^{(0)} \rangle$, ..., зависящие только от макроскопических переменных \vec{x} .

Уравнения (1.6)–(1.7) описывают локальное поведение материала, влияющее на эффективные характеристики эквивалентного одно-

родного материала. Из (1.6) следует существование периодических по \vec{y} потенциалов $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ и $\psi(\vec{x}, \vec{y})$:

$$\vec{E}^{(0)} = \langle \vec{E}^{(0)} \rangle(\vec{x}) + \text{grad}_y \varphi(\vec{x}, \vec{y}), \quad \vec{H}^{(0)} = \langle \vec{H}^{(0)} \rangle(\vec{x}) + \text{grad}_y \psi(\vec{x}, \vec{y}) \quad (1.9)$$

После подстановки (1.9) в (1.7) и разделения переменных

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \langle E_n^{(0)} \rangle(\vec{x}) \Phi_n(\vec{y}), \quad \psi(\vec{x}, \vec{y}) = \langle H_n^{(0)} \rangle(\vec{x}) \Psi_n(\vec{y}) \quad (1.10)$$

получим систему уравнений для определения Y -периодических функций $\Phi_n(\vec{y})$ и $\Psi_n(\vec{y})$ ($n=1, 2, 3$):

$$(\epsilon_{kj}^*(\vec{y}))(\delta_{nj} + \Phi_{n,k}(\vec{y}))_{,k} = 0 \quad (1.11)$$

$$(\mu_{kj}(\vec{y}))(\delta_{nj} + \Psi_{n,k}(\vec{y}))_{,k} = 0 \quad (1.12)$$

Здесь и далее запятыми в индексах отмечается дифференцирование по локальным переменным.

Используя (1.9) и (1.10), запишем выражения для нулевых приближений $\vec{D}^{(0)}$, $\vec{j}^{(0)}$ и $\vec{B}^{(0)}$:

$$-i\omega \vec{D}_m^{(0)} + \vec{j}_m^{(0)} = -i\omega \epsilon_{mk}^*(\vec{y})(\delta_{nk} + \Phi_{n,k}(\vec{y})) \langle E_n^{(0)} \rangle(\vec{x}) \quad (1.13)$$

$$\vec{B}_m^{(0)} = \mu_{mk}(\vec{y})(\delta_{nk} + \Psi_{n,k}(\vec{y})) \langle H_n^{(0)} \rangle(\vec{x}) \quad (1.14)$$

Усреднение (1.13) и (1.14) приводит к материальным соотношениям для эквивалентного однородного тела

$$-i\omega \langle D_m^{(0)} \rangle + \langle j_m^{(0)} \rangle = -i\omega \hat{\epsilon}_{mn}^* \langle E_n^{(0)} \rangle, \quad \langle B_m^{(0)} \rangle = \hat{\mu}_{mn} \langle H_n^{(0)} \rangle$$

с эффективными постоянными, определяемыми по формулам

$$\hat{\epsilon}_{mn}^* = \langle \epsilon_{mk}^*(\delta_{nk} + \Phi_{n,k}) \rangle, \quad \hat{\mu}_{mn} = \langle \mu_{mk}(\delta_{nk} + \Psi_{n,k}) \rangle \quad (1.15)$$

в которых вторые члены дают поправки к средним значениям постоянных $\langle \epsilon_{mn}^* \rangle$ и $\langle \mu_{mn} \rangle$.

Наличие грани раздела f требует при решении локальных задач выполнения условий

$$[\vec{D}^*]_{\vec{n}} \cdot \vec{\nu} = \gamma, \quad [\vec{j}^*]_{\vec{n}} \cdot \vec{\nu} = i\omega \gamma, \quad [\vec{B}^*]_{\vec{n}} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad (1.16)$$

Здесь $[\vec{f}]_{\vec{n}} = f_1 - f_2$ — разности предельных значений в данной точке Γ , $\vec{\nu}$ — нормаль, внешняя по отношению к области 2, γ — плотность поверхностных зарядов на границе раздела. Поверхностными токами мы, как и в [4], пренебрегаем в силу конечной проводимости компонент.

В нулевом приближении из (1.16) следуют условия

$$[-imD_m^{(0)} + j_m^{(0)}]_{\Gamma} \cdot \nu_m = 0, \quad [B_m^{(0)}]_{\Gamma} \cdot \nu_m = 0 \quad (1.17)$$

используемые при получении периодических решений уравнений (1.11) и (1.12).

Задачи об определении эффективных магнитных и диэлектрических постоянных решаются независимо. Ограничимся в дальнейшем рассмотрением примеров расчета эффективных значений диэлектрической проницаемости, считая для простоты неоднородную среду изотропной в каждой точке

$$\varepsilon_{mn}^* = \varepsilon^*(y) \delta_{mn} \quad (1.18)$$

Следующие из (1.17) и (1.13) условия на границе раздела Γ примут в таком случае вид

$$[\varepsilon^*(\partial_{zn} + \Phi_{n,m})]_{\Gamma} \cdot \nu_m = 0 \quad (1.19)$$

К ним, очевидно, можно добавить условие непрерывности Φ_n на Γ :

$$[\Phi_n]_{\Gamma} = 0 \quad (1.20)$$

2. В качестве простейшего примера рассмотрим слоистую неоднородную среду, периодичную по x_3 с периодом a . Будем считать, что ячейка периодичности Y единичной длины состоит из N однородных слоев Y_p ($p = 1, 2, \dots, N$) с относительными толщинами h_p ($h_1 + \dots + h_p = 1$) и диэлектрическими постоянными ε_p^* . Из (1.15) следует, что $\varepsilon_{mn}^* = \langle \varepsilon^* \rangle \delta_{mn}$ при $m \neq 3$, а

$$\varepsilon_{3n}^* = \langle \varepsilon^*(y_3) \left(\partial_{3n} + \frac{d\Phi_n}{dy_3} \right) \rangle \quad (2.1)$$

Для определения 1-периодических функций $\Phi_n(y_3)$ служат следующие из (1.11) и (1.17) обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{d}{dy_3} \left(\varepsilon^*(y_3) \left(\partial_{3n} + \frac{d\Phi_n}{dy_3} \right) \right) = 0 \quad (2.2)$$

с условиями на границах слоев

$$\left[\varepsilon^*(y_3) \left(\partial_{3n} + \frac{d\Phi_n}{dy_3} \right) \right]_{\Gamma} = 0 \quad (2.3)$$

Из (2.2), (2.3) вытекает, что в слое Y_p

$$\varepsilon_p^* \left(\partial_{3n} + \frac{d\Phi_n}{dy_3} \right) = c_n = \text{const} \quad (2.4)$$

а следовательно, $\varepsilon_{3n}^* = c_n$. Константы c_n определяются из (2.4) с помощью условия 1-периодичности функций $\Phi_n(y_3)$.

Итак, в результате несложных вычислений метод усреднения приводит к известным [5] расчетным формулам для ненулевых компонент

тензора эффективной комплексной диэлектрической проницаемости сложной среды

$$\hat{\epsilon}_{11}^* = \hat{\epsilon}_{22}^* = \sum_{p=1}^N h_p \epsilon_p^*, \quad 1/\hat{\epsilon}_{33}^* = \sum_{p=1}^N (h_p/\epsilon_p^*) \quad (2.5)$$

3. Более сложным является расчет эффективной диэлектрической проницаемости однонаправленного волокнистого композита с периодической структурой. Предположим, что волокна композита имеют круговое сечение радиуса rR , а оси их перпендикулярны плоскости x_1x_2 и проходят через центры ячеек. Рассмотрим такую укладку волокон, при которой в поперечном сечении композита волокна образуют правильную квадратную, либо правильную треугольную решетку. Ячейкой периодичности Y служат единичный квадрат или ромб с единичной стороной и острым углом в 60° . Матрицу Y_1 и волокно Y_2 будем считать изотропными и однородными, полагая значения их комплексных диэлектрических проницаемостей постоянными (ϵ_1^* и ϵ_2^* соответственно). Из (1.11) следует, что в таком случае в каждой из областей Y_1 и Y_2 функции $\Phi_n = \Phi_n(y_1, y_2)$ являются гармоническими, условия на границе Γ ($y_1^2 + y_2^2 = R^2$) раздела волокна и матрицы имеют вид (1.19), (1.20).

Двоякопериодическую гармоническую функцию Φ_1 комплексной переменной $z = y_1 + iy_2$ следует [6, 7] искать в Y_1 в следующем виде:

$$\Phi_1 = A_1^{(0)} \text{Re}(-\gamma \pi z + \zeta(z)) + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+3}^{(0)} \text{Re} \frac{\Gamma^{(2k+1)}(z)}{(2k+2)!} \quad (3.1)$$

Здесь $A_1^{(0)}$, $A_{2k+3}^{(0)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) — комплексные коэффициенты, $\zeta(z)$ — функция Вейерштрасса, $\gamma = 1$ для квадратной и $\gamma = 2\sqrt{3}$ — для правильной треугольной решетки.

При получении разложения Φ_1 в тригонометрический ряд на контуре Γ следует воспользоваться разложениями $\zeta(z)$ и $\Gamma^{(2k+1)}(z)$ в ряд Лорана в окрестности начала координат [6]:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+2} z^{2j+3} \quad (3.2)$$

$$\frac{\Gamma^{(2k+1)}(z)}{(2k+2)!} = -\frac{1}{z^{2k+3}} + \sum_{j=0}^{\infty} Q_{j,k} z^{2j+1}, \quad Q_{j,k} = C_{2j+2k+3}^{2k+2} g_{j+k+2} \quad (3.3)$$

Значения констант g_k приведены в [6].

В области Y_2 функция Φ_1 , регулярная в точке $z=0$, представима в виде ряда Тейлора с комплексными коэффициентами

$$\Phi_1 = \sum_{k=0}^{\infty} R A_{2k+1}^{(0)} \text{Re}(z/R)^{2k+1} \quad (3.4)$$

Подставив разложения (3.1)–(3.4) при $z = R \exp(i\theta)$ в граничные условия (1.19), (1.20), получим выражения для коэффициента $A_1^{(0)}$:

$$A_1^{(1)} = \frac{\alpha R^2}{1 + \alpha v} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+3}^{(1)} (2k+3) g_{k+2} \right), \quad \alpha = \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*} \quad (3.5)$$

(здесь $v = |Y_2|/|Y|$ — объемное содержание волокон) и бесконечную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A_{2k+3}^{(1)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$A_{2j+1}^{(1)} + \alpha R^{2j+2} \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+3}^{(1)} D_{j,k} = \frac{\alpha^2 R^{2j+4}}{1 + \alpha v} g_{j+1} \quad (3.6)$$

$$\left(D_{j,k} = Q_{j,k} - \frac{(2k+3)g_{j+1}g_{k+2}\alpha R^2}{1 + \alpha v}, \quad j = 1, 2, \dots \right)$$

Коэффициенты $A_{2k+1}^{(2)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) при этом выражаются как

$$A_1^{(2)} = A_1^{(1)} \frac{1 + \alpha}{\alpha R^2} - 1, \quad A_{2l+1}^{(2)} = -A_{2l+1}^{(1)} \frac{1 + \alpha}{\alpha R^{2l-2}}$$

Воспользуемся выражениями (3.1), (3.4) для определения тензора эффективных комплексных диэлектрических проницаемостей однонаправленного композита по формуле (1.15). Вычисляя соответствующие интегралы и используя свойства симметрии задачи, получим выражения для ненулевых компонент анизотропного тензора

$$\hat{\varepsilon}_{33}^* = \varepsilon_1^*(1 - v) + \varepsilon_2^*v, \quad \hat{\varepsilon}_{11}^* = \hat{\varepsilon}_{22}^* = \varepsilon_1^* \left(1 - \frac{2v}{R^2} A_1^{(1)} \right) \quad (3.7)$$

Приближенное вычисление $A_1^{(1)}$ с любой степенью точности не представит большого труда, если воспользоваться при решении системы (3.6) разложением неизвестных коэффициентов в ряд по R или v . Упомянутый прием приводит к выражению, которое при необходимости может уточняться:

$$\hat{\varepsilon}_{11}^* = \hat{\varepsilon}_{22}^* = \varepsilon_1^* \left(\frac{1 - \alpha v}{1 + \alpha v} - \frac{A \alpha^2 v^k}{(1 + \alpha v)^2} \right) + O(v^{2k-2}) \quad (3.8)$$

Здесь $A = 0,151$ и $k = 7$ для треугольной и $A = 0,612$ и $k = 5$ для квадратной решетки. Первый член в (3.8) совпадает с известными для квадратной решетки формулами [5]. Поправки, вносимые последующими членами, как правило, невелики, например, для стеклопластика ($\varepsilon_1 = 6$ и $\varepsilon_2 = 2,5$) с квадратной укладкой волокон второй член не превышает 1% от первого при $v < 0,6$. При выводе (3.8) не использовались предположения о близости диэлектрических проницаемостей компонент или о малости объемного содержания волокон в композите.

Отметим, что локальная задача (1.11), (1.19), (1.20) возникает при расчете эффективных коэффициентов теплопроводности λ_{ij} в композите с периодической структурой [3] так, что формулы (3.7), (3.8) годятся для подсчета компонент тензора λ_{ij} в однонаправленном волокнистом композите с изотропными однородными волокнами Y_2 и

матрицей Y_1 , имеющими коэффициенты теплопроводности λ_2 и λ_1 соответственно.

4. В качестве последнего примера приведем пространственную задачу об определении эффективных диэлектрических проницаемостей однородного изотропного диэлектрика с периодически расположенными однородными изотропными шаровыми включениями радиуса αR (α — характерный размер ребра ячейки периодичности αY). Для решения такой задачи требуется построение Y -периодических гармонических функций $\Phi_m(\vec{y})$, удовлетворяющих на границе Γ раздела связующего Y_1 и включения Y_2 условиям (1.19) и (1.20) при $m, n = 1, 2, 3$.

Аналогичная локальная задача, возникающая при усреднении уравнения теплопроводности, решена в [3] с помощью разложений в ряды по периодическим гармоническим функциям, являющимся пространственными аналогами функций Вейерштрасса. Воспользовавшись данным решением, выпишем готовое соотношение для шарового тензора эффективной диэлектрической проницаемости композита с шаровыми включениями, расположенными в узлах кубических решеток:

$$\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_1^* \delta_{ij} \left(\frac{3 + \nu - 4\nu\eta}{3 + \nu + 2\nu\eta} - \frac{A \alpha^3 \eta^{33/8}}{(7 + \alpha)(3 + \nu + 2\nu\eta)^2} \right) + C(\nu^{17/8})$$

Здесь $A = 93,926$ для простой кубической решетки, $A = 9,312$ — для объемноцентрированной и $A = 5,490$ — для границентрированной решеток.

MAXWELL EQUATIONS FOR NON-HOMOGENEOUS MEDIA WITH PERIODIC STRUCTURE

A. I. ZOBNIN, B. A. KUDRYAVTSEV, V. Z. PARTON

ՄԱԿՎԵԼԻ ԶԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՊԵՐԻՈԴԻԿԱՆ ԿԱՌՈՒՅՎԱԾՔՈՎ ԱՆՀԱՏՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ԶԱՄԱՐ

Ա. Ի. ՉՈՅՆԻՆ, Բ. Ա. ԿՈՒԴՐՅԱՎՏՅԵՎ, Վ. Զ. ՊԱՐՏՈՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Պարբերական կառուցվածքով անհամասեռ միջավայրի համար դիտարկվում է Մարտինի հավասարումների միջինացման խնդիրը: Կառուցված են պարբերականության բջիք վրա տեղական խնդիրների լուծումները և ստացված են շերտավոր կամ պողպի արդյունավետ կամպլեքսային դիէլեկտրիկ թափանցելիության, մի ուղղությամբ դասավորված թելիկավոր կամ պողպի, ինչպես նաև դիսպերսային գնդային ներդրակներով կամ պողպի հաշվարկների համար բանաձևեր:

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах.—М.: Наука, 1984. 352 с.
2. Савинс-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний.—М.: Мир, 1984. 472 с.
3. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды.—М.: Наука, 1983. 448 с.
4. Caillerie D., Lévy T. Application de l'homogénéisation au comportement électromagnétique d'un mélange isolant-conducteur. —Compte rendu de l'Acad. des Sci., 1983, Sér. II, 296. № 14, p. 1035-1038.
5. Электрические свойства полимеров. Под ред. Б. И. Сажина. Л.: Химия, 1970. 376 с.
6. Григорюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
7. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. университета, 1984. 336 с.

Московский институт
химического машиностроения

Поступила в редакцию
19.VII.1988