

УДК 539.1

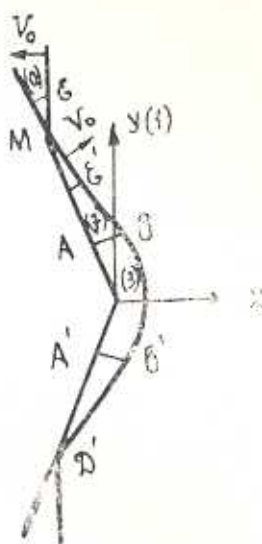
ДИФРАКЦИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОКОЛО СТЕНКИ,  
 ОБРАЗУЮЩЕЙ ТУПОЙ УГОЛ

АЗАТЯН Л. Д., БАГДОЕВ А. Г.

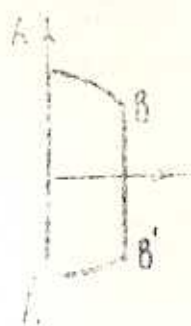
В работе рассматривается задача о дифракции сильной ударной волны около упругой стенки, образующей тупой угол. Аналогичная задача в случае твердой стенки и ее аналитическое решение в линейном приближении с помощью преобразования Чаплыгина получено Лайтхиллом [2].

§ 1. Формулировка граничной задачи

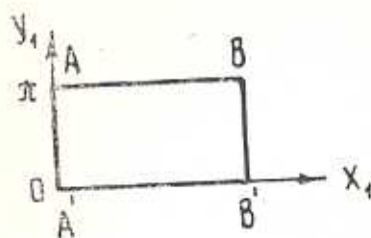
Пусть фронт плоской ударной волны движется со скоростью  $U_0$  по покоящемуся газу и в момент времени  $t \neq 0$  сталкивается с углом, стороны которого образуют со скачком малый угол  $\epsilon$ . Для некоторого значения  $t \neq 0$  картина движения показана на фиг. 1. Параметры однородного потока (1) за падающей ударной волной определяются из условий динамической совместности [1]



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$$P_1 = \frac{1}{\gamma(\gamma+1)} \frac{2\gamma M^2 - (\gamma-1)}{M^2} \rho_0 U_0^2$$

$$q_1 = \frac{(\gamma+1)M^2}{(\gamma-1)M^2+2} p_0, \quad q_2 = \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{(M^2-1)}{M^2} U_0 \quad (1.1)$$

(обозначения параметров общепринятые).

Определим течение в области (2) за отраженной ударной волной. В случае упругой стенки, считая, что движение в стенке одномерно, получим в упругой области

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\rho_{ст}}{\lambda+2\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

где  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные Ламе,  $\rho_{ст}$  — плотность упругого тела,  $w$  — нормальное смещение упругой среды,  $a$  — скорость распространения упругой продольной волны. На границе  $x=0$  из условия совместного движения стенки и прилегающих к ней частиц жидкости (газа) имеем

$$q_{2n} = \frac{\partial w}{\partial t} = af'(at)$$

где  $n$  — нормаль к стенке, а решение в упругой области есть  $w = f(x+at)$ . Записывая условия непрерывности

$$p_{2x}|_{x=0} = -P_2, \quad \sigma_{2x}|_{x=0} = \left( \lambda \frac{\partial w}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \rho_{ст} a^2 f'(at)$$

можно получить два условия на стенке

$$q_{2n} = af'(at), \quad \rho_{ст} a^2 f'(at) = -P_2$$

откуда имеем

$$q_{2n} = -\frac{P_2}{\rho_{ст} a} = -\frac{bP_2}{\rho_2 c_2} \quad (1.2)$$

где  $b = \rho_{ст} c_2 / \rho_2 a$ .

Таким образом, учет одномерной модели в упругой среде дает граничное условие в виде винклера основания. Параметры потока в области (2) определяются из соотношений для косоугольного скачка уплотнения [1]. Исключая из этих соотношений  $P_2, \rho_2$ , с учетом (1.2), получим в порядке  $\epsilon$  кубическое уравнение для определения нормальной скорости  $V_0$  отраженного скачка

$$2\gamma q_1^2 (xP_1 - q_1) V_0^3 + 2\gamma q_1 (xP_1 - q_1) (1 + 3\alpha q_1) V_0^2 + [(\gamma-3)\gamma q_1^2 + 6\gamma q_1^2 q_1^2 (xP_1 - q_1) + 2\gamma q_1 q_1 P_1 - (\gamma-1)x^2 \rho_1 P_1^2] V_0 - 2\gamma P_1 (xP_1 - q_1) + (\gamma-1)\gamma q_1^3 - 2\gamma q_1^2 q_1^2 + 2\gamma^2 q_1^2 q_1^2 P_1 - (\gamma-1)x^2 \rho_1 q_1 P_1^2 = 0, \quad x = b/\rho_2 c_2 \quad (1.3)$$

Далее в том же приближении из соотношений для косоугольного скачка уплотнения получим значения остальных параметров за плоским отраженным скачком

$$P_2 = \frac{P_1 + \rho_1 q_1 (q_1 + V_0)}{1 + \alpha \rho_1 (q_1 + V_0)}, \quad \rho_2 = \frac{\rho_1 (q_1 + V_0) [1 + \alpha \rho_1 (q_1 + V_0)]}{\alpha P_1 + \alpha \rho_1 (q_1 + V_0)^2 + V_0}$$

$$q_2 = q_1(z + \varepsilon'), \quad c_2 = \left( \frac{\gamma P_2}{\rho_2} \right)^{1/2} \quad (1.4)$$

а угол  $\varepsilon'$  — угол отражения, определяется из условия неотрывности в точке  $M$  падающей и отраженной ударных волн

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon V_0}{U_0} \quad (1.5)$$

В области неравномерного течения (3) всем величинам будем присписывать индекс «3». Границами области дифракции являются: дуги  $AB$  и  $A'B'$ , представляющие собой фронты возмущений, порожденных малым углом  $\varepsilon$ , стенка  $AOA'$  и искривленная ударная волна  $BCB'$ , которая является результатом дифракции от вершины.

Задача состоит в определении параметров движения в области (3). Так как угол  $\varepsilon$  мал, то величины

$$P = \frac{P_3 - P_2}{\rho_2 c_2}, \quad \rho = \rho_3 - \rho_2, \quad \bar{q}(u, v) = \bar{q}_3 - \bar{q}_2 \quad (1.6)$$

будут порядка  $\varepsilon$ , и для нахождения этих малых величин может быть применена теория возмущений. Так как отсутствует характерный размер длины, то задачу можно считать автомодельной, и тогда уравнения газовой динамики после их линеаризации по  $\varepsilon$  в переменных

$$\xi = \frac{x - q_2 t}{c_2 t}, \quad \eta = \frac{y}{c_2 t}$$

запишутся в виде

$$\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad \xi \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial P}{\partial \eta}, \quad \xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (1.7)$$

На плоскости  $\xi, \eta$  дифрагированную ударную волну  $BCB'$  и стенку  $AOA'$  можно аппроксимировать прямолинейными отрезками  $BB'$  и  $AA'$  (фиг. 2).

При этом значение  $\xi$  на стенке равно нулю, а на искривленном скачке значение  $\xi$  равно

$$\xi = \frac{V_0 - q_2 \varepsilon}{c_2} = k_0, \quad (k_0 < 1)$$

Дуги  $AB$  и  $A'B'$  в системе  $\xi, \eta$  совпадают с дугой единичной окружности.

Решение системы (1.7) должно удовлетворять определенным условиям на границе области дифракции. На фронтах возмущений  $AB$  и  $A'B'$  функции непрерывны, следовательно, на этих дугах

$$P = 0, \quad \rho = 0, \quad \bar{q}(u, v) = 0 \quad (1.8)$$

На стенке, согласно (1.2) имеем

$$q_{2x} = -\frac{bP_2}{\rho_2 c_2} = -\frac{b(P_2 + \rho_2 c_2 P)}{\rho_2 c_2} = -\frac{bP_2}{\rho_2 c_2} - bP$$

откуда следует, что на стенке в области (3)

$$u = -bP$$

Тогда, как следует из второго уравнения (1.7), при  $\xi = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = -b\gamma \frac{\partial P}{\partial \gamma} \quad (1.9)$$

Для того, чтобы найти граничное условие на  $\xi = k_0$ , представим возмущенный фронт ударной волны в виде  $\xi = k_0 + \psi(\eta)$ , где  $\psi(\eta)$  — функция, определяющая неизвестную форму ударной волны. Написав условия динамической совместности на искривленной части скачка  $BB'$  и линеаризуя их относительно потока за плоской отраженной волной, получим следующую систему уравнений:

$$q_{1z} - (\rho_2 - \rho_1)V' + \rho(q_{2x} - V_0) = 0, \quad \rho_2 c_2 P + 2\rho_2 \eta(q_{2x} - V_0) + \rho(q_{2x} - V_0)^2 = 0 \quad (1.10)$$

$$q_1 V' + u V_0 - \frac{\gamma}{\gamma - 1} c_2 P + \frac{-\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_2 \rho}{\rho_2^2} - q_{2x}(u - V') = 0$$

$$v = -q_2 \psi' - q_1(\xi + \xi')$$

где в линейном приближении проекции на нормаль и касательную к ударной волне заменяются через проекции на оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $V_0 + V'$  — скорость искривленной ударной волны,  $V' = c_2(\psi - \eta\psi')$ .

Решение системы (1.10) имеет вид

$$P = Q(\psi - \eta\psi')/E, \quad u = G(\psi - \eta\psi')/E, \quad v = -q_1\psi' - q_2(\xi + \xi')$$

$$Q = \{(\rho_2 - \rho_1)[2\gamma P_2 + (\gamma - 1)(q_{2x} - V_0)^2 \rho_2] - (\gamma - 1)(q_1 + q_{2x})(q_{2x} - V_0)\rho_2^2\}(q - V_0) \quad (1.11)$$

$$G = \{(\gamma - 1)(q_1 + q_{2x})(q_{2x} - V_0)\rho_2^2 - \gamma(\rho_1 - \rho_2)[P_2 + \rho_2(q_{2x} - V_0)^2]\}c_2$$

$$E = \rho_2[\gamma P_2 - \rho_2(q_{2x} - V_0)^2]$$

Исключая из (1.11) функцию  $\psi$ , получим

$$u = A_0 P, \quad \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} = B_0 \frac{\partial P}{\partial \eta} \quad \text{на } \xi = k_0 \quad (1.12)$$

где  $A_0 = G/Q$ ,  $B_0 = q_1 E/Q$ .

Теперь при помощи уравнений (1.7) из уравнений (1.12) можно исключить  $u$ ,  $v$ , что дает условие на скачке для одного только  $P$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \frac{\gamma(A_0 + k_0) - B_0 k_0 \gamma^{-1}}{1 - k_0^2} \quad (1.13)$$

Дополнительно к условию (1.13) берется условие, которое заключается в том, что изменение  $v$  вдоль скачка от центра  $C$  до вершины  $B$  равно

$$\int \frac{\partial v}{\partial \tau_i} d\tau_i = \int \frac{B_0}{\tau_i} \frac{\partial P}{\partial \tau_i} d\tau_i = q_i \quad (1.14)$$

Система (1.7) может быть сведена к одному уравнению для  $P$

$$\Delta P - \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \tau_i \frac{\partial}{\partial \tau_i} + 1 \right) \left( \xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + \tau_i \frac{\partial P}{\partial \tau_i} \right) = 0 \quad (1.15)$$

Для решения сформулированной граничной задачи по решению уравнения (1.15) при граничных условиях (1.8—1.9), (1.13—1.14) применяется преобразование Чаплыгина-Буземана [2]

$$\xi = r \cos \beta, \quad \tau_i = r \sin \beta, \quad \left( r = \frac{2\phi}{1-\phi^2}, \quad \beta = \text{arctg} \frac{\eta}{\xi} \right) \quad (1.16)$$

которое переводит (1.15) в уравнение Лапласа в переменных  $\phi, \beta$ . Далее применяется конформное отображение [2]

$$z_1 = \ln \left( \frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{1}{2} \pi i, \quad (z = \rho e^{i\theta}, \quad z_1 = x_1 + iy_1) \quad (1.17)$$

Функция (1.17) переводит область дифракции AA'B'B в прямоугольник (фиг. 3)

$$0 \leq x_1 \leq l, \quad 0 \leq y_1 \leq \pi, \quad l = \frac{1}{2} \ln \frac{1-k_0}{1-k_0'} \quad (1.18)$$

Итак, задача заключается в определении функции  $P$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа  $\Delta P = 0$  в переменных  $x_1, y_1$  внутри прямоугольника (1.18) и условиям:

$$\text{на } AB \text{ и } A'B' \text{ имеем } P = \frac{\partial P}{\partial x_1} = 0 \quad (1.19)$$

$$\text{на } AA': \frac{\partial P}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} = b \text{ ctg } y_1 \quad (1.20)$$

$$\text{на } BB': -\frac{\partial P}{\partial x_1} \sin y_1 \cos y_1 = \frac{\partial P}{\partial y_1} \left( A_0 \cos^2 y_1 - B_0 \frac{k_0}{(k_0')^2} \right), \quad k_0' = (1-k_0^2)^{1/2} \quad (1.21)$$

В силу условия (1.20) имеется отличие данной задачи от задачи [2], в которой  $b=0$ , а функция  $\omega(z_1) = \frac{\partial P}{\partial x_1} - i \frac{\partial P}{\partial y_1}$  довольно сложного вида определена подбором.

## § 2. Решение сформулированной граничной задачи методом разделения переменных

Решение уравнения Лапласа  $\Delta P = 0$  будем искать в виде [3]

$$P(x_1, y_1) = X(x_1)Y(y_1)$$

В этом случае получим

$$X = A \exp(\alpha x_1) + B \exp(-\alpha x_1), \quad Y = C \sin \alpha y_1 + D \cos \alpha y_1$$

Удовлетворяя условию (1.19), получим

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \exp(kx_1) + B_k \exp(-kx_1)) \sin ky_1 \quad (2.1)$$

Условие (1.20) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} k [(A_k - B_k) \sin ky_1 \sin y_1 - \theta (A_k + B_k) \cos y_1 \cos ky_1] = 0 \quad (2.2)$$

а условие (1.21) — в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left[ (A_k \exp(kr) - B_k \exp(-kr)) \sin ky_1 \sin 2y_1 + (A_k \exp(kr) + B_k \exp(-kr)) \times \right. \\ \left. \times \left( A_0 \cos 2y_1 - A_0 - B_0 \frac{2k_0}{(k_0)^2} \right) \cos ky_1 \right] = 0 \quad (2.3)$$

Умножая (2.2) и (2.3) на  $\cos ly_1$  ( $l=0, 1, 2, \dots$ ) и интегрируя от  $-\pi$  до  $\pi$ , получим систему уравнений для определения  $A_k$  и  $B_k$ . При совместном решении этих систем уравнений, можно показать, что  $A_k$  и  $B_k$  при четном  $k$  равны нулю, а  $A_k$  и  $B_k$  при нечетном  $k$  будут определяться из следующей системы уравнений:

$$A_1(1-\theta) = B_1(1+\theta), \quad (1+\theta)A_1 - (1-\theta)B_1 = 3[(1-\theta)A_3 - (1+\theta)B_3] \\ (1+A_0)A_1 e^{-\lambda} - (1-A_0)B_1 e^{-\lambda} + \frac{\pi}{2} (A_1 e^{\lambda} + B_1 e^{-\lambda}) \left( A_0 - 2 \frac{B_0 k_0}{(k_0)^2} \right) + \\ + 3[A_3(1+A_0)e^{3\lambda} - B_3(1-A_0)e^{-3\lambda}] = 0 \quad (2.4)$$

$$A_{n+3} = [(1+\theta)(F-R) - (1-A_0)N \exp(-(n+3)\lambda)] / W$$

$$B_{n+3} = [(1-\theta)(F-R) - (1+A_0)N \exp((n+3)\lambda)] / W$$

где

$$F = (n-1)[(1-A_0)A_{n-1} \exp((n-1)\lambda) - (1+A_0)B_{n-1} \exp(-(n-1)\lambda)]$$

$$R = 2(n+1) \left( A_0 - 2 \frac{B_0 k_0}{(k_0)^2} \right) (A_{n+1} \exp((n+1)\lambda) + B_{n+1} \exp(-(n+1)\lambda))$$

$$N = (n+1)[(1+\theta)A_{n+1} - (1-\theta)B_{n+1}]$$

$$W = (n+3)[(1+A_0)(1+\theta) \exp((n+3)\lambda) - (1-A_0)(1-\theta) \exp(-(n+3)\lambda)]$$

Из (2.4) все  $A_k$  и  $B_k$  определяются через  $A_1$  ( $n > 2$ ). Для нахождения  $A_1$  используется условие (1.14). В дальнейшем  $\bar{A}_k = A_k / A_1$ ,  $\bar{B}_k = B_k / A_1$ . Доказательство сходимости ряда (2.1) проводится так же, как и в работе [3].

§ 3. Определение параметров течения газа (жидкости)  
в области дифракции

Запишем выражение (2.1) для возмущенного давления в переменных  $\xi, \eta$ . Из формул (1.16) и (1.17) имеем

$$x_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}, \quad y_1 = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} + \pi i \quad (3.1)$$

С использованием (3.1) выражение (2.1) в плоскости  $\xi, \eta$  имеет вид

$$\begin{aligned} p = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_{2n+1} \left( \frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{\frac{2n+1}{2}} + B_{2n+1} \left( \frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^{\frac{2n+1}{2}} \right] \times \\ \times \sin \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} + (2n+1) \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Компоненты  $u, v$  могут быть определены из уравнений системы (1.7). Для нахождения коэффициента  $A_1$  найдем компонент  $v$  на  $\xi=0$  из третьего уравнения системы (1.7)

$$\begin{aligned} v = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\tau_i} \frac{\partial p}{\partial \tau_i} d\tau_i = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n+1) (A_{2n+1} + B_{2n+1}) \times \\ \times \left[ \operatorname{arc} \sin \tau_i + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2k \operatorname{arc} \sin \tau_i) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Величина  $v$  при  $\xi=0, \eta=1$  равна значению  $q_2$ , следовательно,

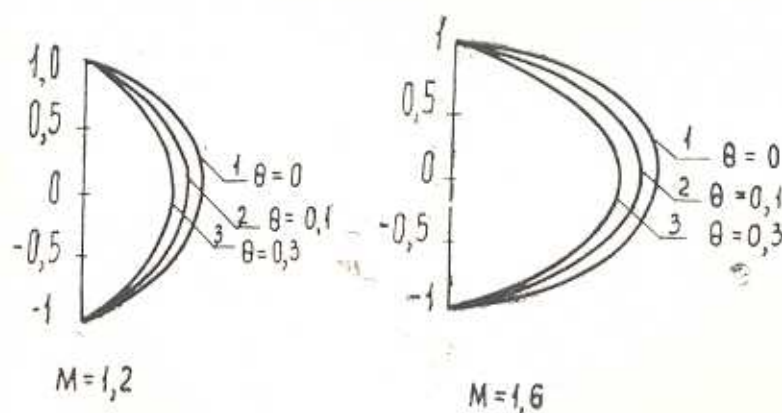
$$A_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n+1) (\bar{A}_{2n+1} + \bar{B}_{2n+1}) \frac{\pi}{2} = q_2$$

где  $q_2$  определяется по формуле (1.4). Отсюда имеем

$$A_1 = \frac{2q_2}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n+1) \pi (\bar{A}_{2n+1} + \bar{B}_{2n+1})}$$

Для выяснения качественной картины отражения ударной волны от стенки приведены численные расчеты. По формуле (3.2) вычислено давление на стенке при значениях чисел  $M=V_0/c_0=1,2; 1,6; 2$  и  $\theta=0; 0,1; 0,3$ . Расчеты для распределения безразмерного давления  $\bar{P} = -P'/U_0$  на стенке показывают, что качественно сохраняется картина, имеющая место для жесткой стенки, и кроме того, имеет место уменьшение давления  $\bar{P}$  при увеличении  $\theta$ . Рассчитано также для  $\varepsilon=0,1$  распределение полного давления  $P_2$  на стенке, причем с увеличением  $\theta$  давление  $P_2$  уменьшается. Из табл. 1 видно также, что  $\bar{P}$  и  $P_2$  на стенке в области дифракции увеличиваются с ростом числа Маха при фиксированном значении  $\theta$ .

	M=1,2			M=1,6			M=2		
	$\theta=0$	$\theta=0,1$	$\theta=0,3$	$\theta=0$	$\theta=0,1$	$\theta=0,3$	$\theta=0$	$\theta=0,1$	$\theta=0,3$
$\bar{P}(1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\bar{P}(0,5)$	0,24	0,21	0,16	0,41	0,36	0,31	0,49	0,43	0,37
$P(0)$	0,28	0,25	0,21	0,48	0,44	0,40	0,58	0,52	0,47
$\bar{P}(-0,5)$	0,24	0,21	0,16	0,41	0,36	0,31	0,48	0,43	0,37
$P(-1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$P_3(1)$	1,11	1,05	0,94	1,92	1,85	1,74	2,68	2,61	2,49
$P_3(0,5)$	1,07	1,01	0,91	1,79	1,73	1,65	2,50	2,45	2,36
$P_3(0)$	1,05	1,00	0,90	1,78	1,72	1,64	2,46	2,41	2,32
$P_3(-0,5)$	1,07	1,01	0,91	1,79	1,73	1,65	2,50	2,45	2,36
$P_3(-1)$	1,11	1,05	0,94	1,92	1,85	1,74	2,68	2,61	2,49



Фиг. 4

На фиг. 4 приведены графики распределения давления  $\bar{P}$  на стенке для двух случаев.

## DIFFRACTION OF A SHOCK WAVE NEAR WALL MAKE UP AN OBTUSE ANGLE

L. D. AZATIAN, A. G. BAGDOEV



Լ. Գ. ԱԶԱՏՅԱՆ, Ա. Գ. ՐԱԳՅՈՒՅԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է հարվածային ալիքի փոխազդեցությունը բուլի անկյուն ( $\pi - 2\varepsilon$ ) կազմող առաձգական պատի հետ: Գաղաչին դիֆրակցի համաստրուկների համակարգը դժայնացվում է ըստ  $\varepsilon$  փոքր պարամետրի և լուծվում է փոփոխականների անշտաման մեթոդով: Այս դրվածքով դիֆրակցիայի շրջակայքում հոսքի պարամետրերը գտնված են ըստ սեփական ֆունկցիաների վերլուծության աեսքով: Երված են հաշվարկի արդյունքները և գրգռված ճնշման բաշխման գրաֆիկները պատի երկայնքով:

ЛИТЕРАТУРА

1. Проблемы механики. Сборник статей под редакцией Р. Мизеса и Т. Кармана. Москва; 1955, Изд-во иностранной литературы, с. 573—578.
2. Lighthill M. J. The diffraction of blast waves. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical sciences.* 1950, vol. 200.
3. Жигалко Е. Ф. Отражение ударной волны, близкое к нормальному в линейном приближении. Вестник ЛГУ, 1970, № 13, вып. 3.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
10.V.1988