ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 43, № 1, 1990 Механика

УДК 539.3:534.21

МАГНИТОУПРУГИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ПОВЕРХНОСТНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ТОКОМ

БЕЛУБЕКЯН М. В.

Первые работы по изучению магнитоупругих поверхностных волн при наличии постоянного магнитного поля принадлежат С. Калискому [1]. В дальнейшем эти работы были продолжены многими исследователями.

Здесь, в отличие от известных работ, рассматривается случай, когда магнитное поле создается при помощи электрического тока, протекающего по поверхности полупространства. Исследования распространения упругих волн при наличиии поверхностного тока могут иметь применение при неразрушающих испытаниях материалов [2].

1. Пусть в прямоугольной координатной системе (x_1, x_2, x_3) упругое полупространство занимает область $x_2 \geqslant 0$. По границе $x_2=0$ протекает электрический ток в направлении оси $0x_1$ с поверхностной плотностью J_0. В начальном (невозмущенном) состоянии магнитные поля, обусловленные током J_0, в области $x_2>0$ и в области $x_2<0$ будут постоянными, терпящими разрыв (скачок) на поверхности $x_2=0$. Напряженности магнитных полей должны определяться так, чтобы удовлетворялось граничное условие

$$[\overline{H}_0^{(e)}-\overline{H}_0]\times\hat{j}=\frac{4\pi}{c}J_0\hat{i}$$

Здесь $\overline{H}_0^{(e)}$, $\overline{H}_0$—векторы напряженности магнитного поля при $x_2<0$ и $x_2>0$ соответственно, $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$—единичные векторы в направлениях x_1, x_2 и x_3, соответственно.

Возможны следующие три варианта определения магнитного поля, удовлетворяющие указанным свойствам:

$$\left.\begin{array}{ll}\overline{H}_0=H_0\hat{k}, & \overline{H}_0^{(e)}=-H_0\hat{k} \qquad (1.1)\\ \overline{H}_0=0, & \overline{H}_0^{(e)}=-2H_0\hat{k} \qquad (1.2)\\ \overline{H}_0=2H_0\hat{k}, & \overline{H}_0^{(e)}=0 \qquad (1.3)\end{array}\right\} H_0=\frac{2\pi}{c}J_0$$

Моделью для вариантов (1.2) и (1.3) может служить среда в виде слоя с достаточно большой толщиной, на поверхностях которого протекает ток с поверхностной плотностью J_0. В случае, когда токи на поверхностях имеют одинаковое направление, магнитное поле не проникает в слой и приходим к варианту (1.2). Вариант (1.3) получается в случае, когда поверхностные токи противоположно направлены.

Согласно (1.1)—(1.3), компоненты тензоров Максвелла для соответствующих вариантов имеют вид (приводятся только ненулевые компоненты):

$$T_{110}=T_{110}^{(e)}=-\frac{1}{8\pi}H_0^2,\quad T_{220}=T_{220}^{(e)}=-\frac{1}{8\pi}H_0^2,\quad T_{330}=T_{330}^{(e)}=\frac{1}{8\pi}H_0^2 \tag{1.4}$$

$$T_{110}^{(e)}=-\frac{1}{2\pi}H_0^2,\quad T_{220}^{(e)}=-\frac{1}{2\pi}H_0^2,\quad T_{330}^{(e)}=\frac{1}{2\pi}H_0^2 \tag{1.5}$$

$$T_{110}=-\frac{1}{2\pi}H_0^2,\quad T_{220}=-\frac{1}{2\pi}H_0^2,\quad T_{330}=\frac{1}{2\pi}H_0^2 \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем магнитные проницаемости материала полупространства $x_2\geqslant 0$ и среды вне полупространства принимаются равными единице.

В первом варианте (1.4) компоненты тензора Максвелла непрерывны на границе $x_2=0$, поэтому начальное напряженное состояние нулевое ($\sigma_{ij}^0=0$). Во втором (1.5) и в третьем (1.6) вариантах компонент T_{330} терпит разрыв на границе $x_2=0$, что приводит к появлению начальных напряжений.

Для определения начального напряженного состояния необходимо удовлетворить граничным условиям ($x_2=0$)

$$\sigma_{2j}^0+T_{2j0}=T_{2j0}^{(e)} \tag{1.7}$$

Напряженное состояние существенно зависит также от условий при $x_1\to\pm\infty$ и $x_3\to\pm\infty$. Наиболее простое напряженное состояние получается в случае, когда удовлетворяются условия

$$\lim_{x_1\to\pm\infty}\sigma_{11}^0=0,\quad \lim_{x_3\to\pm\infty}\sigma_{33}^0=0 \tag{1.8}$$

При этом все компоненты тензора напряжений оказываются равными нулю кроме σ_{22}^0, который определяется следующим образом:

$$\sigma_{22}^0=-\frac{1}{2\pi}H_0^2 \quad \text{и} \quad \sigma_{22}^0=\frac{1}{2\pi}H_0^2 \tag{1.9}$$

(для второго и третьего вариантов соответственно).

Постановка задачи распространения волн в приведенных трех вариантах начального состояния существенно будет зависеть от физических свойств материала полупространства. Здесь возможны задачи, когда материал либо диэлектрик, либо идеальный проводник, либо сверхпроводник.

2. При выводе граничных условий существенное значение имеет учет изменения нормали к возмущенной поверхности полупространства [3].

Пусть возмущенная поверхность полупространства определяется уравнением

$$x_2 = u_2(x_1, 0, x_3, t) \tag{2.1}$$

Тогда приближенное (линеаризованное) выражение для нормали к возмущенной поверхности имеет вид

$$\hat{n} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\hat{i} + \hat{j} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\hat{k} \tag{2.2}$$

Для вывода линеаризованных граничных условий на поверхности $x_2=0$ будем исходить из следующих общих условий: при $x_2=0$

$$[\overline{H}^{(e)} - \overline{H}]\cdot\hat{n}=0, \quad [\overline{E}^{(e)} - \overline{E}]\times\hat{n} = -\frac{1}{c}\frac{\partial u_2}{\partial t}[\overline{H}^{(e)} - \overline{H}]$$

$$(\overline{\tau}_i + \overline{T}_i)\cdot\hat{n} = \overline{T}_i^{(e)}\cdot\hat{n} \tag{2.3}$$

где

$$\overline{\tau}_i = \sigma_{i1}\hat{i} + \sigma_{i2}\hat{j} + \sigma_{i3}\hat{k}, \quad \overline{T}_i = T_{i1}\hat{i} + T_{i2}\hat{j} + T_{i3}\hat{k} \tag{2.4}$$

Используя для возмущенного состояния представления

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij}, \quad \overline{H} = \overline{H}_0 + \overline{h}, \quad \overline{E} = \overline{e} \tag{2.5}$$

и линеаризируя условие (2.3) с учетом малости возмущений и с учетом (1.1—1.6), (1.9), (2.2), получим граничные условия на поверхности полупространства.

Во всех трех вариантах граничные условия для компонент возмущенного электромагнитного поля оказываются одинаковыми и имеют вид

$$h_2 - h_2^{(e)} = 2H_0\frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad e_1 - e_1^{(e)} = -\frac{2H_0}{c}\frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad e_3 = e_3^{(e)} \quad (x_2 = 0) \tag{2.6}$$

Условия для напряжений для вариантов (1.1—1.3) в соответствующей последовательности получаются в виде

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{23} - \frac{H_0}{4\pi}h_3 = \frac{H_0}{4\pi}h_3^{(e)}, \quad \sigma_{22} + \frac{H_0}{4\pi}h_2 = -\frac{H_0}{4\pi}h_2^{(e)} \tag{2.7}$$

$$\sigma_{12} = \frac{H_0^2}{2\pi}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \sigma_{23} = \frac{H_0}{2\pi}h_3^{(e)}, \quad \sigma_{22} + \frac{H_0^2}{2\pi}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{H_0}{2\pi}h_2^{(e)} \tag{2.8}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{H_0^2}{2\pi}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \sigma_{23} - \frac{H_0}{2\pi}h_3 = 0, \quad \sigma_{22} + \frac{H_0}{2\pi}h_2 = \frac{H_0^2}{2\pi}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \tag{2.9}$$

В (2.7—2.9) и в дальнейшем штрихи при σ'_{ij} опущены.

Рассмотрим некоторые частные задачи распространения поверхностных волн.

3. Пусть начальное магнитное поле соответствует варианту (1.1). Материал полупространства $x_2>0$ является диэлектриком. Задачи плоской и антиплоской деформации относительно плоскостей (x_1, x_2) и (x_2, x_3) разделяются.

Рассмотрим плоскую задачу, когда перемещения и компоненты возмущенного электромагнитного поля не зависят от координаты x_3.

Приведем уравнения и граничные условия задачи. Уравнение теории упругости в перемещениях

$$c_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+c_2^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+(c_1^2-c_2^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$x_2>0 \tag{3.1}$$

$$c_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+c_1^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+(c_1^2-c_2^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

Уравнения электродинамики в области $x_2>0$.

$$\frac{\partial h_3}{\partial x_2}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_1}{\partial t},\quad -\frac{\partial h_3}{\partial x_1}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_2}{\partial t},\quad \frac{\partial e_2}{\partial x_1}-\frac{\partial e_1}{\partial x_2}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_3}{\partial t},\quad \frac{\partial e_1}{\partial x_1}+\frac{\partial e_2}{\partial x_2}=0$$

$$\tag{3.2}$$

в области $x_2<0$

$$\frac{\partial h_3^{(e)}}{\partial x_2}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_1^{(e)}}{\partial t},\quad -\frac{\partial h_3^{(e)}}{\partial x_1}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_2^{(e)}}{\partial t},\quad \frac{\partial e_2^{(e)}}{\partial x_1}-\frac{\partial e_1^{(e)}}{\partial x_2}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_3^{(e)}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial e_1^{(e)}}{\partial x_1}+\frac{\partial e_2^{(e)}}{\partial x_2}=0 \tag{3.3}$$

Согласно (2.6) и (2.7) требуемые граничные условия при $x_2=0$ имеют вид

$$e_1-e_1^{(e)}=-\frac{2H_0}{c}\frac{\partial u_2}{\partial t},\quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=0$$

$$(\lambda+2G)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{H_0}{4\pi}h_3=\frac{H_0}{4\pi}h_3^{(e)} \tag{3.4}$$

Представляя искомые функции в виде

$$f(x_1, x_2, t)=f_0(x_2)\exp i(\omega t-kx_1)$$

и следуя схеме решения задачи поверхностных волн Рэлея [4], получим уравнение, определяющее скорость поверхностной волны (принимается также, что $\varepsilon=1$, $\omega^2/c^2\ll 1$)

$$(2-\eta+\varkappa_1\sqrt{1-\theta\eta}\,\eta)(2-\eta)=4\sqrt{1-\eta}\sqrt{1-\theta\eta} \tag{3.5}$$

где

$$\eta=\frac{\omega^2}{k^2c_2^2},\quad \theta=\frac{c_1^2}{c_2^2},\quad \varkappa_1=\frac{H_0^2}{2\pi\rho c^2}$$

При $x_1=0$ уравнение (3.5) совпадает с уравнением Рэлея. Как и для уравнения Рэлея, показывается, что уравнение (3.5) имеет только один действительный корень, удовлетворяющий условию $0<\eta<1$.

Приведем уравнения соответствующей антиплоской задачи.

Уравнение теории упругости в области $x_2>0$ имеет вид

$$c_1^2\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right)=\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \tag{3.6}$$

Уравнения электродинамики в области $x_2>0$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x_1}-\frac{\partial h_1}{\partial x_2}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_3}{\partial t},\quad \frac{\partial e_3}{\partial x_2}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_1}{\partial t},\quad \frac{\partial e_3}{\partial x_1}=\frac{1}{c}\frac{\partial h_2}{\partial t},\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1}+\frac{\partial h_2}{\partial x_2}=0 \tag{3.7}$$

в области $x_2<0$

$$\frac{\partial h_2^{(e)}}{\partial x_1}-\frac{\partial h_1^{(e)}}{\partial x_2}=\frac{1}{c}\frac{\partial e_3^{(e)}}{\partial t},\ \frac{\partial e_3^{(e)}}{\partial x_2}=-\frac{1}{c}\frac{\partial h_1^{(e)}}{\partial t},\ \frac{\partial e_3^{(e)}}{\partial x_1}=\frac{1}{c}\frac{\partial h_2^{(e)}}{\partial t},\ \frac{\partial h_1^{(e)}}{\partial x_1}+\frac{\partial h_2^{(e)}}{\partial x_2}=0 \tag{3.8}$$

Граничные условия при $x_2=0$ имеют вид

$$h_2=h_2^{(e)},\quad e_3=e_3^{(e)},\quad G\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{H_0}{2\pi}h_2=0 \tag{3.9}$$

Ставится задача нахождения решений уравнений (3.6)—(3.8), удовлетворяющих граничным условиям (3.9) и условиям затухания при $x_2\to\pm\infty$. При решении задачи в такой постановке приходим к необходимости дополнительного граничного условия при $x_2=0$. Указанное условие задается в виде

$$h_1^{(e)}-h_1=\frac{4\pi}{c}J_0\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \tag{3.10}$$

что обусловлено скачком касательной компоненты магнитного поля вследствие изменения направления поверхностного тока.

С учетом дополнительного условия (3.10) задача оказывается полностью определенной. Решение задачи показывает, что существует чисто сдвиговая поверхностная волна, скорость которой определяется по формуле

$$\eta=1-\left(\frac{H_0^2}{2\pi G}\right)^2 \tag{3.11}$$

4. Пусть начальное магнитное поле задано в форме (1.3) (третий вариант). Предполагается, что для материала среды $x_2>0$ применима модель идеального проводника. Принимается, что искомые величины не зависят от координаты x_3. В этом случае задача плоской деформации приводится к решению следующих уравнений ($V_1^2=H_0^2/\pi\rho$):

$$
\begin{aligned}
&(c_1^2+V_1^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\left(c_2^2+\frac{V_1^2}{2}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+(c_1^2-c_2^2+V_1^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\\
&c_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+\left(c_1^2+\frac{3V_1^2}{2}\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+(c_1^2-c_2^2+V_1^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

при условиях на границе $x_2=0$

$$
\left(\lambda-\frac{H_0^2}{\pi}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\left(\lambda-\frac{H_0^2}{\pi}+2G\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0,\quad G\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\left(G+\frac{H_0^2}{2\pi}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=0
\tag{4.2}
$$

Решение уравнения (4.2) при условии (4.2) и условии затухания на бесконечности ($x_2\to\infty$) показывает, что условие существования поверхностной волны такое, что и в задаче Рэлея ($0<\eta<1$). Уравнение, определяющее скорость поверхностной волны, имеет вид

$$
\begin{aligned}
&(2+\beta/2-\eta)\{(1+\theta\beta)[2+\beta(-1/2+4\theta+\theta_1\beta/2)]-(1-\theta_1\beta)\eta\}=\\
&=4(1+\theta\beta)^{3/2}(1+3\theta\beta/2)^{1/2}(1+\beta/2)^{1/2}(1-\beta/4)(1-\eta)^{1/2}(1-\theta\eta)^{1/2},\quad \beta=V_1^2/c_2^2
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Исследование уравнения (4.3) относительно скорости поверхностной волны η показывает, что в промежутке (0, 1) уравнение имеет два действительных корня. Один из корней соответствует скорости обычной волны Рэлея с учетом влияния магнитного поля. Другой корень показывает наличие поверхностной волны со скоростью намного меньше скорости волны Рэлея. Значение указанной скорости можно вычислить по следующей приближенной формуле:

$$
\eta\approx\frac{3H_0^2}{2\pi(\lambda+G)}
$$

Приведенная в этом пункте задача рассматривалась также в [5—7].

MAGNETOELASTIC SURFACE WAVES IN SEMI-SPACE WITH A SURFACE ELECTRICAL CURRENT

M. V. BELUBEKIAN

ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ՄԱԿԵՐԵՍԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՀՈՍԱՆՔՈՎ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված են հարթ և հակահարթ դեֆորմացիայի խնդիրների տարբեր դեպքեր: Ցույց է տրվում լրացուցիչ մակերևութային ալիքի գոյության

նարավորությունը, որը պայմանավորված է մակերևային էլեկտրական հո-սանքի առկայությամբ և տարածվում է Ռելեյի տիպի մակերևութային ալի-քի արագությունից շատ ավելի փոքր արագությամբ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kapelewski E., Nowacki W., Rymarz Cz., Wlodarczyk E.* A surwey of the scientific activity of Sylwester Kaliski in the coupled Fields Theory.—Advances in Mechanics, 1987, v. 10, № 1.
2. *Комаров В. А.* Квазистационарное электромагнитоакустическое преобразование в металлах. (Основы теории и применение при неразрушающих испытаниях). Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. 235 с.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.—М.: Наука, 1977. 272 с.
4. *Новацкий В.* Теория упругости.—М.: Мир, 1975.
5. *Долбин Н. И.* Распространение упругих поверхностных волн в полупространстве, находящемся в магнитном поле.—ПМТФ, 1963, № 1.
6. *Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н.* Поверхностные магнитоупругие волны Рэлея.—Механика, Межвуз. сб., изд. ЕГУ, 1982, вып. 2.
7. *Даноян З. Н., Симонян А. М.* Поверхностные магнитоупругие волны Рэлея при наличии поперечного магнитного поля.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1985, т. 38, № 3.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
25.X.1988