ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 6, 1989 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ

ГРИГОРЯН С. А.

Рассматривается задача проектирования круглой пластинки радиуса R, толщины h, загруженной постоянной нормальной нагрузкой q. При ограничении на прочность, варьированием опорного контура находится пластинка минимального веса.

1. Пусть пластинка отнесена к цилиндрической системе координат r, θ, z так, что плоскость $z=0$ совпадает со срединной плоскостью пластинки. Пластинка опирается по контуру $r=R_1$, где $0<R_1\leqslant R$.

Уравнение равновесия пластинки относительно прогиба $W(r)$ и соответствующие граничные условия представляются в виде [1].

$$D\Delta^2 W_i=q \quad \left(\Delta\equiv\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right), \quad i=1,\ 2 \tag{1.1}$$

соответственно для областей $0<r\leqslant R_1$ и $R_1\leqslant r\leqslant R$.

$$\begin{gathered}\lim_{r\to 0} W_1(r)\neq\infty, \quad \frac{dW_1}{dr}=0 \quad \text{при} \quad r=0\\ W_1=W_2=0, \quad \frac{dW_1}{dr}=\frac{dW_2}{dr}, \quad M_{rr}^{(1)}=M_{rr}^{(2)} \quad \text{при} \quad r=R_1\\ M_{rr}^{(2)}=0, \quad T_{rz}^{(2)}=0 \quad \text{при} \quad r=R\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь

$$M_{rr}^{(i)}=-D\left(\frac{d^2W_i}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{dW_i}{dr}\right), \quad T_{rz}^{(i)}=-D\left(\frac{d^3W_i}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2W_i}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dW_i}{dr}\right) \tag{1.3}$$

—соответственно изгибающий момент и поперечное усилие в сечениях $r=\text{const}$, $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$—жесткость на изгиб, E—модуль Юнга, ν—коэффициент Пуассона.

Решение краевой задачи (1.1) и (1.2) с учетом (1.3) получается в виде

$$W_1=\frac{qR^4}{64D}\left(2\frac{3+\nu}{1+\nu}-8\ln\beta-4\frac{1-\nu}{1+\nu}\beta^2-8+\gamma^2+\beta^2\right)(\gamma^2-\beta^2) \tag{1.4}$$

$$W_2=\frac{qR^4}{64D}\left[\left(2\,\frac{3+\nu}{1+\nu}-8\ln\gamma-4\,\frac{1-\nu}{1+\nu}\beta^2+\gamma^2+\beta^2\right)(\gamma^2-\beta^2)-16\beta^2(\ln\gamma-\ln\beta)\right] \tag{1.5}$$

где введены обозначения $\gamma=r/R$, $\beta=R_1/R$.

Напряжения в радиальном и кольцевом направлениях определяются формулами

$$\sigma_{rr}^{(i)}=-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2W_i}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\,\frac{dW_i}{dr}\right),\quad \sigma_{\theta\theta}^{(i)}=-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{d^2W_i}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{dW_i}{dr}\right) \tag{1.6}$$

Из условия прочности

$$\sigma_{rr}^2+\sigma_{\theta\theta}^2-\sigma_{rr}\,\sigma_{\theta\theta}\leqslant\sigma_*^2 \tag{1.7}$$

где σ_* — допускаемое напряжение, для определения допускаемой толщины получается неравенство

$$h_{i_*}\geqslant R\sqrt[4]{\frac{36q^2}{\sigma_*^2}F_i(\gamma,\beta)}\quad (i=1,\ 2) \tag{1.8}$$

Здесь введены обозначения:

$$F_1(\gamma,\beta)=[(1+3\nu)^2+4(1-\nu)^2\beta^2+16(1+\nu)^2\ln^2\beta+4(1-\nu)(1+3\nu)\beta^2+$$
$$+16(1-\nu^2)\beta^2\ln\beta+8(1+\nu)(1+3\nu)\ln\beta]/256+[4(1-\nu)^2+(3+\nu)(1+3\nu)]\gamma^4/256-$$
$$-[(1+\nu)(1+3\nu)+2(1-\nu^2)\beta^2+4(1+\nu)^2\ln\beta]\gamma^2/64$$

$$F_2(\gamma,\beta)=[(1+3\nu)^2+12(1-\nu)^2+4(1-\nu^2)\beta^4+16(1-\nu)\beta^2]/256+(1+\nu)^2\ln^2\gamma/16+$$
$$+3(1-\nu)^2/\gamma^4\cdot 64+[4(1-\nu)^2+(3+\nu)(1+3\nu)]\gamma^4/256+[(1+3\nu)(1+\nu)+$$
$$+2(1-\nu^2)\beta^2]\ln\gamma/32-3(1-\nu)^2\beta^2/\gamma^2\cdot 32+[(1+3\nu)(1-\nu)-(3+\nu)-$$
$$-(1-\nu^2)\beta^2]\gamma^2/32-(1+\nu)^2\gamma^2\ln\gamma/16$$

Очевидно, что расчетная толщина пластинки для каждого $\beta\in(0;1]$ определится из условия

$$h^*(\beta)=\max_{\gamma} h_{i_*}(\gamma,\beta) \tag{1.9}$$

где $0\leqslant\gamma\leqslant\beta$ при $i=1$ и $\beta<\gamma\leqslant 1$ при $i=2$.

2. Имея значения $h^*(\beta)$, можно поставить следующую задачу проектирования оптимальной пластинки: найти

$$h_{\text{опт}}=\min_{\beta} h^*(\beta)\quad \text{при}\quad 0<\beta\leqslant 1 \tag{2.1}$$

Таким образом, получается следующая задача: найти

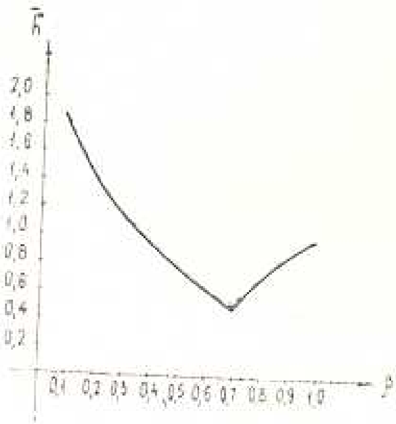
$$\min_{\beta}\max_{\gamma} h_{i_*}(\gamma,\beta)\quad (i=1,\ 2) \tag{2.2}$$

при ограничениях $0\leqslant\gamma\leqslant 1$ и $0<\beta\leqslant 1$, причем при $0\leqslant\gamma\leqslant\beta$ $i=1$, а при $\beta<\gamma\leqslant 1$ $i=2$.

Расчеты проведены для коэффициента Пуассона $\nu=0{,}3$. При этом получается, что при $\beta=0{,}706$ максимальное значение интенсивности напряжений достигается при $\gamma=\beta$, то есть на опоре. В этом случае относительная расчетная толщина есть $\overline{h}=h/h^*(1)=0{,}489$, где $h^*(1)$—расчетная толщина шарнирно опертой по контуру пластинки.

Наименьшая толщина равна

$$h_{\text{опт}}=0{,}544R\sqrt{\frac{q}{\sigma_*}} \tag{2.3}$$



Фиг. 1

На фиг. 1 приведен график зависимости относительной расчетной толщины $\overline{h}$ от β, откуда видно, что оптимальным выбором β можно существенно (более чем в два раза) уменьшить вес пластинки. Следует отметить, что практически оптимальный проект достигается при равенстве $S_1=S_2$, где S_1 и S_2, соответственно, площади областей $r\in[0, R_1]$ и $r\in[R_1, R]$.

Ставится также задача: найти

$$W_{\text{опт}}=\min_{\beta}\max_{\gamma} W_i(\gamma, \beta) \tag{2.4}$$

при ограничениях $0<\beta\leqslant 1$, $0\leqslant\gamma\leqslant\beta$ при $i=1$, $\beta<\gamma\leqslant 1$ при $i=2$ и при заданных R, h, q, E, ν.

Как показывают расчеты при $\nu=0{,}3$

$$W_{\text{опт}}=0{,}0258\frac{qR^4}{Eh^3} \tag{2.5}$$

что достигается при $\beta=0{,}676$.

Наибольший прогиб пластинки минимального веса, найденной при ограничении на прочность ($h=h_{\text{опт}}$ по формуле (2.3)) будет

$$W=0{,}377R\frac{\sigma_*}{E}\sqrt{\frac{\sigma_*}{q}} \tag{2.6}$$

В табл. 1 приводятся значения $\overline{W}(\beta)$ при $\nu=0{,}3$, где $\overline{W}(\beta)=\max W(\gamma, \beta)/\max W(\gamma, 1)$. $W(\gamma, 1)$—прогибы шарнирно опертой по контуру пластинки.

Таблица 1

β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,676	0,7	0,8	0,9	1,0
$\overline{W}(\beta)$	1,307	1,097	0,846	0,587	0,347	0,146	0,0369	0,0763	0,295	0,599	1,000

Максимальный прогиб оптимальной по жесткости пластинки более чем в 27 раз меньше максимального прогиба шарнирно опертой по контуру пластинки.

Необходимо отметить, что полученный проект оптимальной пластинки и соответствующие $h_{\text{опт}}$ и $W_{\text{опт}}$ получены для коэффициента Пуассона $\nu=0{,}3$. Для анализа влияния ν на оптимальный проект рассмотрены и другие значения ν. В табл. 2 приведены значения $h_{\text{опт}} \cdot \sqrt{\sigma_*/qR^2}$ и $W_{\text{опт}} \cdot Eh^3/qR^4$ при $\nu=0{,}0$, $\nu=0{,}3$, $\nu=0{,}5$ и соответствующие β.

Таблица 2

ν	$h_{\text{опт}}\sqrt{\sigma_*/qR^2}$	β	$W_{\text{опт}}Eh^3/qR^4$	β
0,0	0,596	0,709	0,0264	0,682
0,3	0,544	0,706	0,0258	0,676
0,5	0,541	0,693	0,0252	0,673

Как видно из табл. 2, коэффициент Пуассона слабо влияет на оптимальный проект.

ABOUT ONE OPTIMIZATION PROBLEM OF A CIRCULAR PLATE

S. A. GRIGORIAN

ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ՄԻ ՕՊՏԻՄԻԶԱՑԻՈՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ Ս. Հ.

Ամփոփում

Դիտարկվում է կլոր իզոտրոպ սալի նախագծման խնդիրը, որը գտնվում է նորմալ հաստատուն բեռի ազդեցության տակ։ Ամրության սահմանափակման դեպքում, փոփոխելով հենակետային կոնտուրի դիրքը, գտնվում է օպտիմալ սալ։ Ցույց է տրված, որ օպտիմալ ձևով ընտրելով սալի հենման կոնտուրի դիրքը կարելի է տրված բեռի դեպքում էապես փոքրացնել սալի կշիռը կամ ամենամեծ ճկվածքը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости.—М.: Гостехтеориздат, 1947. 464 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
13.X.1988

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 42, № 6, 1989 Механика

УДК 539.3

ВОЗДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ НА ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ

АВЕТИСЯН Д. К.

Решается задача нахождения оптимального проекта слоистой ортотропной полосы, шарнирно закрепленной в жесткий экран, при ее взаимодействии с акустической волной давления. Для определения прогибов полосы совместно решаются волновое уравнение для потенциала скоростей частиц жидкости (газа) и уравнение изгиба полосы. При решении волнового уравнения применяется интегральное преобразование Лапласа по времени.

Далее ставится и решается задача определения таких безразмерных толщин слоев полосы, при которых данная полоса обладает наибольшей жесткостью.

В качестве примера рассматриваются полосы, образованные из слоев, состоящих из композиционного материала и металла. Как следует из численных расчетов, оптимальный проект слоистой полосы вырождается в однослойный, изготовленный только из композиционного материала. Прогибы полосы из КМ (боропластика) более чем в 70 раз меньше прогибов стальной полосы того же веса.

Полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ
за № 5503—В89 от 16.08.1989

Поступила в редакцию
23.V. 1989