ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 6, 1989 Механика

УДК 539.3

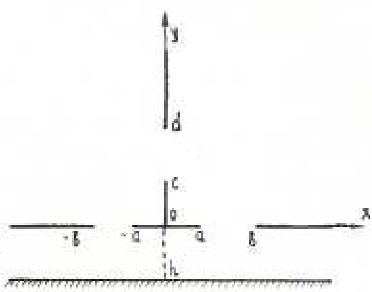
О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КОНЕЧНЫХ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ТРЕЩИН В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

АФЯН Б. А., СТЕПАНЯН С. П.

Особое значение в механике разрушения имеют задачи о конечной и полубесконечной трещинах в полуплоскости, поскольку с их помощью можно оценить влияние границы тела на распределение напряжений, когда трещина расположена вблизи границы.

В данной работе получено приближенное решение плоской задачи теории упругости для полуплоскости с конечными и полубесконечными трещинами (фиг. 1). Вся граница полуплоскости жестко защемлена, а на поверхностях трещин заданы самоуравновешанные нагрузки:

$$\sigma_{yy}(x,0)=p_0(x),\quad \tau_{xy}(x,0)=q_0(x)$$
$$|x|\in(0,a)U(b,+\infty)$$
$$\sigma_{xx}(0,y)=\sigma(y),\quad \tau_{xy}(0,y)=0$$
$$y\in(0,c)U(d,+\infty)$$
$$u(x,-h)=v(x,-h)=0,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$



Фиг. 1

1. Вывод интегрального уравнения. Рассматриваются следующие задачи теории упругости:

а) первая основная задача теории упругости для квадранта $(0<x,\ y<+\infty)$

$$\sigma_{xx}(0,y)=\sigma_1(y),\quad \tau_{xy}(0,y)=0,\quad (0<y<\infty)$$
$$\sigma_{yy}(x,0)=p_1(x),\quad \tau_{xy}(x,0)=q_1(x)\qquad (0<x<\infty) \tag{1.1}$$

б) смешанная задача теории упругости для полосы $(-\infty<x<\infty,\ -h<y<0)$

$$\sigma_{yy}(x,0)=p_1(x),\ \tau_{xy}(x,0)=q_1(x),\ u(x,-h)=v(x,-h)=0,\ (-\infty<x<\infty) \tag{1.2}$$

где

$$p_1(x)=\begin{cases} p_0(x), & x\in(0,a)U(b,+\infty)\\ p(x), & x\in(a,b)\end{cases}$$

$$q_1(x)=\begin{cases} q_0(x), & x\in(0,a)\,U(b,+\infty)\\ q(x), & x\in(a,b)\end{cases}$$

соответственно симметричная и антисимметричная функции относительно точки 0,

$$\sigma_1(y)=\begin{cases}\sigma_0(y), & y\in(0,c)U(d,+\infty)\\ \sigma(y), & y\in(c,d)\end{cases}$$

В [1] найдены перемещения от неизвестных напряжений $p(x)$, $q(x)$ и $\sigma(y)$ $(x\in(a,b),\ y\in(c,d))$

для задачи (1.1):

$$Eu_x'(x,0^+)=(1-\nu)p_1(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{x-t}-\frac{1}{x+t}\right]q_1(t)dt+$$

$$+\int_0^\infty R_1(t,x)p_1(t)dt+\int_0^\infty R_2(t,x)q_1(t)dt-\int_0^\infty R_7(t,x)\sigma_1(t)dt$$

$$Ev_x'(x,0^+)=(\nu-1)q_1(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{x-t}+\frac{1}{x+t}\right]p_1(t)dt+$$

$$+\int_0^\infty R_3(t,x)p_1(t)dt-\int_0^\infty R_4(t,x)q_1(t)dt-\int_0^\infty R_8(t,x)\sigma_1(t)dt$$

$$Eu_x'(0,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{y-t}-\frac{1}{y+t}\right]\sigma_1(t)dt-\int_0^\infty R_6(t,y)p_1(t)dt+$$

$$+\int_0^\infty R_5(t,y)q_1(t)dt+\int_0^\infty R_3(t,y)\sigma_1(t)dt$$

для задачи (1.2):

$$Eu_x'(x,0^-)=(1-\nu)p(x)-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{x-t}-\frac{1}{x+t}\right]q_1(t)dt+$$

$$+\int_0^\infty K_1(t,x)p_1(t)dt+\int_0^\infty K_2(t,x)q_1(t)dt$$

$$Ev_x'(x,0^-)=(\nu-1)q_1(x)-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{x-t}+\frac{1}{x+t}\right]p_1(t)dt-$$

$$-\int_0^\infty K_3(t,x)p_1(t)\,dt-\int_0^\infty K_4(t,x)q_1(t)dt$$

где E и ν—модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно; $R_i(t,x)$ и $K_j(t,x)$, $(i=1,7,\ j=1,4)$—регулярные функции [1].

Требуя обращения в нуль скачков перемещений

$$u'_x(x, 0^+) - u'_x(x, 0^-) = 0, \quad v'_x(x, 0^+) - v'_x(x, 0^-) = 0 \tag{1.3}$$

и удовлетворяя условию симметрии

$$\frac{\partial u(0, y)}{\partial y} = 0 \tag{1.4}$$

получим интегральные уравнения поставленной задачи

$$\frac{4}{\pi}\int_a^b \frac{p(t)}{x-t}dt + \int_a^b M_{1,1}(t, x)p(t)dt + \int_a^b M_{1,2}(t, x)q(t)dt +$$

$$+ \int_c^d R_0(t, x)\sigma(t)dt = F_1(x), \quad x \in (a, b)$$

$$\frac{4}{\pi}\int_a^b \frac{q(t)}{x-t}dt + \int_a^b M_{2,1}(t, x)p(t)dt + \int_a^b M_{2,2}(t, x)q(t)dt -$$

$$- \int_c^d R_7(t, x)\sigma(t)dt = F_2(x), \quad x \in (a, b) \tag{1.5}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_c^d \frac{\sigma(t)}{x-t}dt - \int_a^b R_6(t, x)p(t)dt + \int_a^b R_5(t, x)q(t)dt +$$

$$+ \int_c^d R_4(t, x)\sigma(t)dt = F_3(x), \quad x \in (c, d)$$

Здесь ядра $M_{ij}(t, x)$ $(i, j = 1, 2)$ и правые части $F_i(x)$ $(i=1, 2, 3)$ определяются из (1.3) и (1.4). Уравнения (1.5) представляют собой систему сингулярных интегральных уравнений первого рода с ядром Коши и регулярной частью. Функции $p(t)$, $q(t)$ и $\sigma(t)$ удовлетворяют условиям равновесия

$$\int_a^b p(t)dt = -\int_0^a p_0(t)dt - \int_b^\infty p_0(t)dt, \quad \int_a^b q(t)dt = -\int_0^a q_0(t)dt - \int_b^\infty q_0(t)dt$$

$$\int_c^d \sigma(t)dt = -\int_0^c \sigma_0(t)dt - \int_d^\infty \sigma_0(t)dt \tag{1.6}$$

После замены переменных $x = \frac{b-a}{2}z + \frac{a+b}{2}$, $t = \frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}$ при $t, x \in (a, b)$ и $x = \frac{d-c}{2}z + \frac{d+c}{2}$, $t = \frac{d-c}{2}y + \frac{d+c}{2}$ при $t, x \in (c, d)$, уравнения (1.5) и (1.6) преобразуются к виду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Phi_i(y)}{z-y}dy+\sum_{j=1}^{3}\int_{-1}^{1}N_{ij}(y,z)\Phi_j(y)dy=\varphi_i(z),\quad z\in(-1,1) \tag{1.7}$$

$$\int_{-1}^{1}\Phi_i(y)dy=c_i,\quad (i=1,2,3) \tag{1.8}$$

где $\Phi_1(y)=p\left(\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2}\right)$, $\Phi_2(y)=q\left(\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2}\right)$, $\Phi_3(y)=$ $=s\left(\frac{d-c}{2}y+\frac{d+c}{2}\right)$, а остальные функции $\varphi_i(z)$, $N_{ij}(y,z)$ $(i,j=1,2,3)$ определяются аналогичным образом.

2. *Определение коэффициентов интенсивности напряжений.* Решение системы (1.7) при условии (1.8) в классе функций, не ограниченных при $y=\pm 1$, то есть

$$\Phi_i(y)=(1-y^2)^{-1/2}W_i(y)\quad (i=1,2,3)$$

где $W_i(y)$—непрерывные функции на отрезке $[-1, 1]$, существует и единственно [2].

Численное решение (1.7) получим с помощью квадратурных формул Гаусса [3]

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}(x-y_m)}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{x_k-y_m} \tag{2.1}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k) \tag{2.2}$$

где

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\quad y_m=\cos\frac{\pi m}{n},\quad (k=1,2,\ldots,n;\ m=1,2,\ldots,n-1) \tag{2.3}$$

Применим квадратурные формулы (2.1) и (2.2) к уравнениям (1.7) и интегралам (1.8). В результате получим систему $3n$ линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}W_i(x_k)\left[\frac{1}{y_m-x_k}+\pi\sum_{j=1}^{3}N_{ij}(x_k,y_m)\right]=\varphi_i(y_m)$$

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}W_i(x_k)=c_i\quad (i=1,2,3)$$

для определения $3n$ неизвестных $W_i(x_k)$ $(i=1,2,3,\ k=1,2,\ldots,n)$.

Заметим, что сходимость процесса при гладких функциях $\varphi_i(z)$ и $N_{ij}(y,z)$ следует из сходимости квадратурных формул (2.1) и (2.2) и единственности решения уравнения (1.7) при условии (1.8).

Воспользовавшись интерполяционным полиномом Лагранжа [4]

$$W_i(y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}W_i(x_k)\frac{T_n(y)\sqrt{1-x_k^2}}{y-x_k}$$

($T_n(y)=\cos(n\arccos y)$ — многочлены Чебышева), по узлам (2.3) найдем значения искомых функций $W_i(y)$ в точках $y=\pm 1$, через которые выражаются коэффициенты интенсивности напряжений.

В табл. 1 и 2 при различных значениях параметров d/a, b/a и h/a $(a=c)$ приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений, в случае единичной нагрузки на трещинах $(-a, a)$ и $(0, c)$.

Таблица 1

$h/a=1,\ \ b/a=4$

K/σ_0 \ d/a	2	2,5	3	3,5	4	5
$K_1(a)/\sigma_0$	0,360	0,357	0,356	0,355	0,354	0,353
$K_2(a)/\sigma_0$	0,014	0,016	0,017	0,018	0,018	0,019
$K_1(b)/\sigma_0$	0,056	0,057	0,058	0,058	0,059	0,059
$K_2(b)/\sigma_0$	0,001	0,001	0,0	0,0	0,0	0,0
$K_1(c)/\sigma_0$	1,280	0,798	0,574	0,445	0,362	0,261
$K_1(d)/\sigma_0$	0,387	0,188	0,112	0,074	0,053	0,032

Таблица 2

$h/a=5,\ \ b/a=4$

K/σ_0 \ d/a	2	2,5	3	3,5	4	5
$K_1(a)/\sigma_0$	0,399	0,397	0,395	0,395	0,394	0,393
$K_2(a)/\sigma_0$	0,024	0,025	0,026	0,026	0,026	0,027
$K_1(b)/\sigma_0$	0,041	0,042	0,042	0,043	0,043	0,044
$K_2(b)/\sigma_0$	−0,003	−0,004	−0,004	−0,005	−0,005	−0,005
$K_1(c)/\sigma_0$	1,279	0,798	0,574	0,445	0,362	0,261
$K_1(d)/\sigma_0$	0,386	0,187	0,111	0,074	0,053	0,031

ABOUT INTERACTION OF FINITE AND SEMI-FINITE CRACKS IN ELASTIC HALF-PLANE

B. A. APHIAN, S. P. STEPANIAN

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՎ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՃԱՔԵՐԻ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Բ. Ա. ԱՖՅԱՆ, Ս. Փ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է վերջավոր և կիսաանվերջ ճաքերով թուլացված կիսահարթության հավասարակշռությունը, երբ կիսահարթության եզրը կոշտ ամրակցված է, իսկ ճաքերի վրա դրված են ինքնահավասարակշռված բեռներ: Ուսումնասիրված է եզրի ազդեցությունը լարումների բաշխման վրա: Ճաքերի ծայրակետերում լարումների ինտենսիվության գործակիցների համար բերված են թվային արժեքներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Афян Б. А., Степанян С. П.* Об одной задаче упругой полуплоскости, ослабленной трещинами.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1989, т. 42, №2, с. 50—57.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Физматгиз., 1962. 511 с.
3. *Erdogan F. E., Gupta G.* On the numerical solutions of singular integral eguations.—Quart. Appl. Math., 1972, vol. 7, № 8, p. 525—534.
4. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.—Киев: Наукова думка, 1981. 324 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
16.III.1989