ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 6, 1989 Механика

УДК 539.319

РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ОБ ИМПУЛЬСАХ, ПРИЛОЖЕННЫХ НА ГРАНИЦАХ ПОЛУПЛОСКОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТРЕЩИНЫ

МАРТИРОСЯН А. Н.

В настоящей статье дается решение пространственной задачи о распространяющейся полубесконечной трещине, на границах которой заданы нормальные импульсы. Соответствующая плоская задача для изотропной среды рассматривается в [1] методом факторизации и сверток, а для случая упругой анизотропной среды—в [2, 3].

В данной работе путем использования факторизации основной функции, сделанной в [4], в замкнутом виде получено решение на плоскости, дополняющей плоскую трещину, и определены коэффициенты интенсивности напряжений.

§ 1. Определение функций Релея

Уравнения движения в перемещениях для изотропной среды в пространственном случае при отсутствии массовых сил имеют вид

$$
\begin{aligned}
&(a^2-b^2)\frac{\partial}{\partial x}\nabla+b^2\Delta u_1=\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\\
&(a^2-b^2)\frac{\partial}{\partial y}\nabla+b^2\Delta u_2=\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},\quad \nabla=\frac{\partial}{\partial x}u_1+\frac{\partial}{\partial y}u_2+\frac{\partial}{\partial z}u_3\\
&(a^2-b^2)\frac{\partial}{\partial z}\nabla+b^2\Delta u_3=\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где a, b—скорости продольных и поперечных волн, при $t=0$ имеем нулевые начальные условия $u_j=0$, $\dfrac{\partial u_j}{\partial t}=0$.

На границе трещины имеет место ($y=0$, $|z|<\infty$)

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{yy}=\sigma_-(t,\ x,\ z),\quad -\infty<x<l(t)\\
&u_2=u_+(t,\ x,\ z)=0,\quad x>l(t);\quad \sigma_{yz}=\sigma_{xy}=0,\quad |x|<\infty
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

где $l(t)$—закон движения края трещины. Функции $\sigma=\sigma_-(t,\ x,\ z)$ при $x>l(t)$ и $u_2=u_+(t,\ x,\ z)$ при $x<l(t)$ неизвестны. Согласно [1] вводятся трансформанты Лапласа по t и Фурье по координатам x, z от компонент смещения по осям x, y, z. Обозначая изображения функ-

ций $\sigma(t, x, z)$, $u_2(t, x, z)$ через $\sigma^{LF}(s, \alpha, \gamma)$, $u_2^{LF}(s, \alpha, \gamma)$, соответственно, и учитывая (1.1), (1.2), можно получить

$$u_2^{LF}(s, \alpha, \gamma)=S^{LF}(s, \alpha, \gamma)\sigma^{LF}(s, \alpha, \gamma),\ S^{LF}(s, \alpha, \gamma)=\omega^2\beta_1[ib^4R(\alpha, \gamma)]^{-1} \tag{1.3}$$

$$R(\alpha,\gamma)=4(\alpha^2+\gamma^2)\beta_1\beta_2+(\beta_2^2-\alpha^2-\gamma^2)^2,\ \beta_n=\sqrt{k_n^2-\alpha^2-\gamma^2},\ k_n=\omega/c_n,\ c_1=a,\ c_2=b$$

Здесь $s=-i\omega$; α, γ—параметры преобразований Лапласа по t и Фурье по x и z; R—функция Релея. Принято, что при $|\gamma|<k$ (γ считается действительным) в плоскости α проведены разрезы вдоль действительной оси от $-\infty$ до $-\sqrt{k^2-\gamma^2}$ и от $\sqrt{k^2-\gamma^2}$ до ∞ и выбрано $\beta>0$ на мнимой оси α, а при $|\gamma|>k$ проведены в плоскости переменной α разрезы, соединяющие точки мнимой оси $\pm i\sqrt{\gamma^2-k^2}$ с точкой $\pm i\infty$, соответственно, и выбрано $\operatorname{Im}\beta>0$ на действительной оси α.

После выбора ветвей функций β_n легко получить [1]

$$S^{LF}\left(s, \frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right)=S_+^{LF}\left(s, \frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right)S_-^{LF}\left(s, \frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right),\ 0<\dot{l}(t)<c_R$$

$$S_+^{LF}=\frac{\sqrt{\omega}\sqrt{\sqrt{k_1^2-\gamma^2}-\alpha}\,D_+}{\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c_R^2}-\gamma^2}-\alpha\right)},\quad S_-^{LF}=-\frac{\sqrt{\omega}a^2\sqrt{\sqrt{k_1^2-\gamma^2}+\alpha}\,D_-}{2b^2(a^2-b^2)\sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c_R^2}-\gamma^2}+\alpha\right)} \tag{1.4}$$

$$D_\pm\left(\frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right)=\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{\gamma^2}{\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{\gamma^2}{\omega^2}}}\ln\frac{\overline{R\left(\zeta, \frac{\gamma}{\omega}\right)}}{R\left(\zeta, \frac{\gamma}{\omega}\right)}\frac{d\zeta}{\zeta\pm\frac{\alpha}{\omega}}\right]$$

Здесь c_R есть скорость волны Релея для плоской задачи. Функции S_+^{LF} и S_-^{LF}—аналитические функции, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях плоскости $\frac{i\alpha}{s}$. Так как $D_\pm\left(\frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right)$ являются аналитическими функциями на всей плоскости $i\alpha/s$ за исключением точек, принадлежащих разрезам $\left[\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{\gamma^2}{\omega^2}},\ \pm\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{\gamma^2}{\omega^2}}\right]$, с помощью интеграла Коши для неограниченной области имеем

$$D_\pm\left(\frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right)=1+\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{F_1\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)du}{u\pm\frac{\alpha}{\omega}},\ D_\pm^{-1}\left(\frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right)=1+\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{F_2\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)du}{u\pm\frac{\alpha}{\omega}}$$

$$F_1\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)=\mu\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)\exp\left(\varkappa\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)\right) \tag{1.5}$$

$$F_2\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)=-\mu\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)\exp\left(-\varkappa\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)\right)$$

$$\mu\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)=\frac{4}{\pi}\,\frac{\left(u^2+\frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)\sqrt{u^2-\mu_1^2}\sqrt{\mu_2^2-u^2}}{\left\{\left(\mu_2^2-2u^2-\frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)^4+16\left(u^2+\frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)^2(\mu_2^2-u^2)(u^2-\mu_1^2)\right\}^{1/2}}$$

$$\varkappa\left(u, \frac{\gamma}{\omega}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\ln\frac{R\left(\zeta_+, \frac{\gamma}{\omega}\right)}{R\left(\zeta_-, \frac{\gamma}{\omega}\right)}\,\frac{d\zeta}{\zeta-u},\quad \mu_n=\sqrt{\frac{1}{c_n^2}-\frac{\gamma^2}{\omega^2}}$$

Обозначая $P_{\pm}^{LF}=1/S_{\pm}^{LF}$, вычислим оригиналы $S_+(t, x, z)$, $P_+(t, x, z)$. В формуле обращения

$$S_+(t, x, z)=\frac{1}{8\pi^3 i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}ds\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\gamma\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(st+i\alpha x+i\gamma z)S_+^{LF}\left(s, \frac{\alpha}{\omega}, \frac{\gamma}{\omega}\right)d\alpha \tag{1.6}$$

заменим α, γ через $\omega\alpha$, $\omega\gamma$, соответственно, и подставляя из (1.4) значение S_+^{LF}, получим

$$S_+(t, x, z)=\frac{1}{8\pi^3 i}\,\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}ds\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\gamma\int\limits_{0}^{\infty}dt'\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\mu_1-\alpha}\,D_+(\alpha, \gamma)\exp(s, p)}{\sqrt{\pi}\,\gamma\sqrt{t'}\left(\sqrt{\frac{1}{c_R^2}-\gamma^2}-\alpha\right)}\,d\alpha$$

$$p=t-t'-\alpha x-\gamma z \tag{1.7}$$

Деформируя контур интегрирования по α в формуле обращения в форме (1.7) в контур, проходящий вблизи действительной оси α в верхней полуплоскости для $x>0$ и в нижней—для $x<0$, получим

$$S_+(t, x, z)=\frac{H(x)}{4\pi^3 i}\,\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}ds\int\limits_{0}^{\infty}dt'\int\limits_{0}^{\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{i\sqrt{\alpha}\,D_+(\alpha+\mu_1, \gamma)\exp(sp-sx\mu_1)\,d\gamma}{\sqrt{\pi}\,\gamma\sqrt{t'}\left(\sqrt{c_R^{-2}-\gamma^2}-\mu_1-\alpha\right)} \tag{1.8}$$

где $H(x)$—единичная функция, D_+ выражается формулой (1.5) с заменой α/ω через $\alpha+\mu_1$; γ/ω—через γ.

Заметим, что $S_+(t, x, z)$—четная функция от переменной z, поэтому $S_+(t, x, z)$ можно представить в виде

$$2S_+(t, x, z)=S_+(t, x, z)+S_+(t, x, -z)$$

Интегрирование по γ в правой части равенства (1.8) заменим на контур $\Gamma_{1\downarrow}$ при $z>0$ и на контур $\Gamma_{2\downarrow}$—при $z<0$, соответственно проходящие через γ_0, $\bar{\gamma}_0$ и $-\gamma_0$, $-\bar{\gamma}_0$, для которых выражение в экспоненте (1.8) обращается в нуль. На этих линиях $\operatorname{Im} f(\gamma, z)=0$, где $f(\gamma, z)=p-x\mu_1$. Можно убедиться, что в плоскости (γ_1, γ_2), где $\gamma=\gamma_1+i\gamma_2$, указанные линии состоят из двух ветвей гиперболы

$$\frac{a^2(x^2+z^2)}{z^2}\gamma_1^2-\frac{a^2(x^2+z^2)}{x^2}\gamma_2^2=1$$

а также из отрезков действительной оси $|\gamma_1|<1/a$. Пусть $z>0$, тогда, так как $x>0$, предполагая, что $\sqrt{a^{-2}-\gamma^2}>0$ на мнимой оси плоскости γ, можно показать, что $\operatorname{Im} f(\gamma, z)<0$ в тех областях, где проходят дуги C_1, C_2. Окончательно можно убедиться, что

$$S_+(t, x, z)=\frac{H(x)i}{2\pi^2\sqrt{\pi}}\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}\int\limits_0^\infty dt'\int\limits_0^\infty d\alpha\left[\int\limits_{\Gamma_1\downarrow}\frac{\sqrt{\alpha}D_+\delta(f(\gamma,z))d\gamma H\left(t^2-\frac{x^2+z^2}{a^2}\right)}{\gamma\sqrt{t'}(\sqrt{c_R^{-2}-\gamma^2}-\mu_1-\alpha)}+\right.$$

$$\left.+\pi i\frac{\sqrt{\alpha}D_+\left(\alpha+\frac{1}{a}, 0\right)H\left(\frac{x^2+z^2}{a^2}-t^2\right)}{\sqrt{t'}\left(\frac{1}{c_R}-\frac{1}{a}-\alpha\right)}\right] \tag{1.9}$$

Вычисляя в (1.9) интегралы от δ-функций по t', получим

$$S_+(t, x, z)=-\frac{H(x)i}{2\pi^2\sqrt{\pi}}\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}\int\limits_0^\infty d\alpha\left[\int\limits_{\Gamma_1\downarrow}\frac{\sqrt{\alpha}D_+(\alpha+\mu_1, \gamma)d\gamma H(a^2t^2-x^2-z^2)}{\gamma(\sqrt{c_R^{-2}-\gamma^2}-\mu_1-\alpha)\sqrt{t-\alpha x-\gamma z-x\mu_1}}+\right.$$

$$\left.+\pi i\frac{\sqrt{\alpha}D_+\left(\alpha+\frac{1}{a}, 0\right)H(x^2+z^2-a^2t^2)}{(c_R^{-1}-a^{-1}-\alpha)\sqrt{t-xa^{-1}-\alpha x}}\right] \tag{1.10}$$

Выбирая однозначную ветвь функции $\sqrt{t-\alpha x-\gamma z-x\mu_1}$ в области (D), где проведен разрез между точками γ_0, $\bar{\gamma}_0$ и $-\gamma_0$, $-\bar{\gamma}_0$ для $z>0$ и $z<0$, соответственно, и применяя теорему Коши к этой функции, получим

$$\int\limits_{\Gamma_1\uparrow}\frac{D_+(\alpha+\mu_1, \gamma)\sqrt{\alpha}\,d\gamma}{\gamma(\sqrt{c_R^{-2}-\gamma^2}-\mu_1-\alpha)\sqrt{t-\gamma z-x\mu_1-\alpha x}}+$$

$$+\int\limits_{\Gamma_2\downarrow}\frac{D_+(\alpha+\mu_1, \gamma)\sqrt{\alpha}\,d\gamma}{\gamma(\sqrt{c_R^{-2}-\gamma^2}-\mu_1-\alpha)\sqrt{t-\gamma z-x\mu_1-\alpha x}}=\frac{2\pi i\sqrt{\alpha}D_+\left(\alpha+\frac{1}{a}, 0\right)}{\left(\frac{1}{c_R}-\frac{1}{a}-\alpha\right)\sqrt{t-\frac{x}{a}-\alpha x}} \tag{1.11}$$

В формуле (1.10) заменим z через $-z$, тогда, так как на контурах Γ_1, Γ_2, γ зависит от z, учитывая уравнение гиперболы, можно убедиться, что на Γ_1, Γ_2 функция $t-\gamma z-x\mu_1-\alpha x$ принимает значение $t-\gamma_1\frac{x^2+z^2}{z}-\alpha x$.

Из уравнения гиперболы имеем

$$t-\gamma_1\frac{x^2+z^2}{z}-\alpha x=t-\frac{x^2+z^2}{x}\sqrt{\gamma_2^2+\frac{x^2}{a^2(x^2+z^2)}}-\alpha x$$

Кроме этого, из уравнения гиперболы видно, что координата γ_2 не зависит от первой степени z, а только γ_1 зависит от первой степени z, поэтому после замены z на $-z$, контур интегрирования по $\Gamma_{1\gamma}$ изменит направление на той же плоскости γ по контуру Γ_2, и окончательно имеем

$$S_+(t, x, -z)=$$

$$= -\frac{H(x)i}{2\pi^2\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \int_0^{\infty} d\alpha \left[-\int_{\Gamma_{1\gamma}} \frac{\sqrt{\alpha}\, D_+(\alpha+\mu_1, \gamma)\, d\gamma\, H(a^2t^2-x^2-z^2)}{\gamma\left(\sqrt{\frac{1}{c_R^2}-\gamma^2}-\mu_1-\alpha\right)\sqrt{t-\alpha x-\gamma z-x\mu_1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi i\sqrt{\alpha}\, D_+\left(\alpha+\frac{1}{a}, 0\right) H(x^2+z^2-a^2t^2)}{\left(\frac{1}{c_R}-\frac{1}{a}-\alpha\right)\sqrt{t-\frac{x}{a}-\alpha x}} \right] \tag{1.12}$$

Учитывая (1.11), четность функции $S_+(t, x, z)$ по z, складывая (1.10) и (1.12), имеем

$$2S_+(t, x, z) = -\frac{H(x)}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} H\left(t^2-\frac{x^2+z^2}{a^2}\right) H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{a}\right) \times$$

$$\times \int_0^{t/x-\frac{1}{a}} \frac{\sqrt{\alpha}\, D_+\left(\alpha+\frac{1}{a}, 0\right) d\alpha}{\left(\frac{1}{c_R}-\frac{1}{a}-\alpha\right)\sqrt{t-\alpha x-\frac{x}{a}}} \tag{1.13}$$

Вычисление интеграла (1.13) дает для любого z

$$S_+(t, x, z) = \frac{H(x)\operatorname{sgn} z}{2\sqrt{\pi}\sqrt{x}} \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} H\left(t^2-\frac{x^2+z^2}{a^2}\right) H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{a}\right) \left\{ 1 - \right.$$

$$\left. - B \frac{\sqrt{\frac{1}{c_R}-\frac{1}{a}}}{\sqrt{\frac{1}{c_R}-\frac{t}{x}}} H\left(\frac{1}{c_R}-\frac{t}{x}\right) - \int_{t/x}^{1/b} \frac{F_1(u)\sqrt{u-\frac{1}{a}}}{\left(\frac{1}{c_R}-u\right)\sqrt{u-\frac{t}{x}}} du\, H\left(\frac{1}{b}-\frac{t}{x}\right) \right\} \tag{1.14}$$

$$B = 1 - \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{F_1(u)\, du}{\frac{1}{c_R}-u}$$

где $F_1(u)$ дается формулой (1.5) при $\gamma=0$.

Аналогичным образом можно получить

$$P_+(t, x, z) = \frac{\operatorname{sgn} z}{2\sqrt{\pi}} [\delta(\sqrt{a^2t^2-x^2}+z)-\delta(\sqrt{a^2t^2-x^2}-z)] \times$$

$$\times \left(\frac{1}{c_R}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{ \left[A\delta(t-a^{-1}x) + \int_{1/a}^{1/b} F_3(h)\delta(t-hx)\, dh \right] \frac{H(x)}{\sqrt{x}} \right\} \tag{1.15}$$

$$A=1+\int\limits_{1/a}^{1/b}\frac{F_2(u)\,du}{u-\frac{1}{a}},\quad F_3(h)=\int\limits_h^{1/b}\frac{d}{du}\left[\frac{F_2(u)}{\sqrt{u-\frac{1}{a}}}\right]\frac{du}{\sqrt{u-h}}$$

и $F_2(u)$ дается формулой (1.5) при $\gamma=0$.

Аналогичные формулы получатся для S_- и P_- соответственно из (1.14) и (1.15), если заменить x на $-x$ и умножить на постоянную (1.4).

§ 2. *Решение граничной задачи*

Как видно из (1.13) и (1.14)

$$\begin{gathered} S_+(t,x,z)=P_+(t,x,z)=0 \quad \text{при} \quad x<c_Rt \\ S_-(t,x,z)=P_-(t,x,z)=0 \quad \text{при} \quad x>-c_Rt \end{gathered} \tag{2.1}$$

Представим функции σ^{LF}, u_2^{LF} в виде [1]

$$\sigma^{LF}=\sigma_+^{LF}+\sigma_-^{LF},\quad u_2^{LF}=u_+^{LF}+u_-^{LF},\quad u_+^{LF}=0 \tag{2.2}$$

где σ_+^{LF}, u_-^{LF} неизвестны. При этом

$$u_2(t,x,z)=u_+(t,x,z)H(x-l(t))+u_-(t,x,z)H(l(t)-x)$$

$$\sigma(t,x,z)=\sigma_+(t,x,z)H(x-l(t))+\sigma_-(t,x,z)H(l(t)-x)$$

Подставляя (2.2) в (1.3) и учитывая (2.1), можно, как и в [1], получить решение поставленной задачи в форме сверток по t, x, z

$$\begin{gathered} \sigma_+=-P_+***(S_+***\sigma_-)H(x-l+0) \\ u_-=S_-***(S_+***\sigma_-)H(l-x+0) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Для граничных значений на трещине в виде сосредоточенного импульса $\sigma_-^0(t,x,z)=-P\delta(x-\xi)\delta(z-\eta)H(t-\tau)$ можно получить нормальные напряжения вне трещины в виде (2.3). После вычисления интегралов получим

$$\sigma_+^0=\frac{P\operatorname{sgn}z}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}H(\sqrt{a^2(t_0-\tau)^2-(l(t_0)-\xi)^2}-|z-\eta|)\left\{AN^0\left(t,\tau,x,\xi,\frac{1}{a}\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1/a}^{1/b}F_3(h)N^0(t,\tau,x,\xi,h)\,dh\right\}H\left(T-\frac{1}{a}\right) \tag{2.4}$$

где

$$N^0(t,\tau,x,\xi,h)=\frac{1-lc_R^{-1}}{1-hl}\,\frac{N_1^0H(L_0-a^{-1})}{\sqrt{(x-l)(l-\xi)}}-\frac{N_2^0H(L_0-a^{-1})}{x-\xi}-\frac{N_3^0H(a^{-1}-L_0)}{x-\xi}$$

$$N_1^0=\Phi(L_0,c_R^{-1})-B\sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1}}{c_R^{-1}-L_0}}H(c_R^{-1}-L_0),\quad N_3^0=\left(\frac{x-l}{l-\xi}\right)^{1/2}\Phi(L_0,T)$$

$$\Phi(p_1,p_2)=1-\int\limits_{p_1}^{1/b}\frac{F_1(u)\sqrt{u-a^{-1}}}{(p_2-u)\sqrt{u-p_1}}\,du\,H(b^{-1}-p_1)$$

$$N_2^0 = N_3^0 + \pi F_1(T)\sqrt{\frac{T-a^{-1}}{T-h}}\,H(b^{-1}-L_0)$$

$$T=\frac{t-\tau}{x-\xi},\quad L_0=\frac{t_0-\tau}{l-\xi},\quad l=l(t_0),\quad t-t_0=h(x-l(t_0))$$

В формуле (2.4), исключая множитель $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}H(\sqrt{a^2(t_0-\tau)^2-(l(t_0)-\xi)^2}-$ $-|z-\eta|)$, получится решение плоской задачи, которое отличается от [1] последним слагаемым N_3^0, не влияющим на концентрацию напряжений.

§ 3. Коэффициент интенсивности напряжений

Учитывая, что при $x\to l(t)$, $t_0\to t$ и $\frac{x-l(t)}{x-l(t_0)}\to 1-h\dot{l}(t)$, можно из (2.4) получить коэффициент интенсивности напряжений

$$\lim_{x\to l(t)+0}\sqrt{2\pi(x-l(t))}\,\sigma_+^0 = P\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sgn} z}{2}\,\frac{\partial}{\partial z}H(\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(l(t)-\xi)^2}-$$

$$-|z-\eta|)\,\frac{1-c_R^{-1}\dot{l}(t)}{\sqrt{1-\dot{l}(t)a^{-1}}}\,\frac{g(t)k(\dot{l})}{\sqrt{l-\xi}}\,H(L_0-a^{-1}) \tag{3.1}$$

$$g(t)=1-B\sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1}}{c_R^{-1}-L_0}}\,H(c_R^{-1}-L_0)-\int_{L_0}^{b^{-1}}\frac{F_1(u)\sqrt{u-a^{-1}}}{c_R^{-1}-u}\,\frac{du}{\sqrt{u-L_0}}\,H(b^{-1}-L_0)$$

$$K(\dot{l})=1-\dot{l}\int_{a^{-1}}^{b^{-1}}\frac{F_2(u)}{1-u\dot{l}}\,du,\qquad L_0=\frac{t-\tau}{l-\xi},\qquad l=l(t)$$

При произвольной нагрузке $\sigma_-(t,x,z)$ напряжение на продолжении полубесконечной трещины в виде полуплоскости получается из решения (2.4) суперпозицией $(P=1)$

$$\sigma_+(t,x,z)=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\frac{\partial\sigma_-(\tau,\xi,\eta)}{\partial\tau}\,\sigma_+^0(t,\tau,x,\xi,z,\eta)\,d\tau\,d\xi\,d\eta \tag{3.2}$$

Подставляя (3.1) в (3.2), можно получить коэффициент интенсивности напряжений в виде

$$\lim_{x\to l(t)+0}\sqrt{2\pi(x-l(t))}\,\sigma_+=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{(1-c_R^{-1}\dot{l})k(\dot{l})}{\sqrt{1-a^{-1}\dot{l}}}\,(-I_1+I_2+I_3) \tag{3.3}$$

$$I_1=\int_{l-at}^{l}d\xi\int_0^{t-\frac{l-\xi}{a}}[\sigma_-'(\tau,\xi,\eta_1)+\sigma_-'(\tau,\xi,\eta_2)]\frac{d\tau}{\sqrt{l-\xi}}$$

$$I_1=\frac{B\sqrt{a-c_R}}{\sqrt{ac_R}}\int\limits_{tc_R}^{l_0}\left(\frac{u}{c_R}-t\right)^{-1/2}\int\limits_0^{\lambda}[\sigma'_-(\tau,l+\tau c_R-u,\eta_3)+\sigma'_-(\tau,l+\tau c_R-u\eta_4)\,d\tau du$$

$$I_3=\int\limits_{1/a}^{b^{-1}}F_4(u)\int\limits_0^t\left|\sigma'_-\left(t-\tau,\ l-\frac{\tau}{u},\ \eta_5\right)+\sigma'_-\left(t-\tau,\ l-\frac{\tau}{u},\ \eta_6\right)\right|\sqrt{\tau}\,d\tau du$$

$$\eta_{1,2}=z\pm\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(l-\xi)^2},\quad \eta_{3,4}=z\pm\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(u-\tau c_R)^2}$$

$$\eta_{5,6}=z\pm\sqrt{a^2-u^{-2}},\quad F_4(u)=u^{-\frac{3}{2}}\int\limits_u^{b^{-1}}\frac{F_1(\omega)}{c_R^{-1}-\omega}\sqrt{\frac{\omega-a^{-1}}{\omega-u}}\,d\omega$$

$$\lambda=\frac{l-ua^{-1}}{1-c_Ra^{-1}},\quad l=l(t),\ \sigma'_-(\tau,\ g(\tau),\ q(\tau))=\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma_-(\tau,\xi,\eta)\ \text{при}\ \xi=g(\tau),\ \eta=q(\tau)$$

Пусть $c_R<\dot{l}(t)<b$. Тогда вместо (1.4) можно записать [1]

$$S_+^{LF}=\sqrt{\frac{s}{\omega}}\sqrt{\sqrt{k_1^2-\gamma^2}-\alpha}\,D_+,\quad S_-^{LF}=-\frac{a^2\omega^{3/2}\sqrt{\sqrt{k_1^2-\gamma^2}+\alpha}\,D_-}{2b^2(a^2-b^2)s\sqrt{s}\left(\frac{\omega^2}{c_R^2}-\gamma^2-\alpha^2\right)}\tag{3.4}$$

Вычисляя оригиналы S_+, P_+, и подставляя в формулу (2.3), можно получить, как и в (3.1), коэффициент интенсивности напряжений в виде

$$\lim_{x\to l+0}\sqrt{2\pi(x-l)}\sigma_+^0=\frac{P\,\mathrm{sgn}(z-\eta)}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial}{\partial z}H\left(\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(l-\xi)^2}-|z-\eta|\right)\times$$
$$\times\frac{\sqrt{1-a^{-1}\dot{l}}}{\sqrt{l-\xi}}\,g(t)K(\dot{l})H(L_0-a^{-1})\tag{3.5}$$

$$g(t)=1+\int\limits_{L_0}^{b^{-1}}\frac{F_1(u)}{\sqrt{u-a^{-1}}\sqrt{u-L_0}}H(b^{-1}-L_0),\quad K(\dot{l})=1-\dot{l}\int\limits_{a^{-1}}^{b^{-1}}\frac{F_2(u)}{1-u\dot{l}}du,\quad l=l(t)$$

Подставляя (3.5) в (3.2), для произвольной нагрузки получим коэффициент интенсивности напряжений в виде (3.3), где $I_2=0$, I_1, I_3 остаются прежними кроме функции $F_4(u)$, которая имеет следующий вид:

$$F_4(u)=-\frac{1}{u\sqrt{u}}\int\limits_u^{b^{-1}}\frac{F_1(\omega)\,d\omega}{\sqrt{\omega-a^{-1}}\sqrt{\omega-u}}$$

Таким образом, при заданных нагрузках на краях трещины в форме полуплоскости, так же, как и в плоской задаче, коэффициент интенсивности напряжений дается двукратными интегралами. Функция $F_4(u)$ для обоих случаев вычисляется независимо и совпадает с плоской задачей.

Автор благодарит А. Г. Багдоева за ценные замечания.

SOLUTION OF SPACE PROBLEM ON IMPULSES APPLIED AT BOUNDARIES OF SEMI-PLANE MOVING CRACK

A. N. MARTIROSIAN

ՇԱՐԺՎՈՂ ԿԻՍԱՀԱՐԹ ՃԱՔԻ ԵԶՐԵՐԻ ՎՐԱ ԿԻՐԱՌՎԱԾ ԻՄՊՈՒԼՍՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է կիսահարթության տեսքով կամայական արագությամբ կիսատարածության մակերևույթով ճաքի տարածման խնդիրը։ Լուծումը տրվում է փաթույթի տեսքով։ Որոշված են լարումների ինտենսիվության գործակիցները։ Արդյունքները համեմատված են հարթ խնդրի հետ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сарайкин В. А., Слепян Л. И.* Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.—Изв. АН СССР. МТТ, 1979, №4, с. 54—73.
2. *Мартиросян А. Н.* Движение трещины в анизотропной среде.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1987, т. *40*, №6, с. 32—42.
3. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы.—Изв. АН СССР. МТТ, 1976, №1, с. 100—110.
4. *Мартиросян А. Н.* О нестационарном движении упругого пространства со щелью.—ПММ, 1976, т. *40*, №3, с. 544—553.

Армянский педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
4.VII.1988