ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 6, 1989

УДК 539.3:532.59

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ ПЛАСТИНАХ ИЗ КОМПОЗИТОВ

БАГДОЕВ А. Г., МОВСИСЯН Л. А.

Нелинейные волны модуляции для пластин изучены в [1—4 и др.], а для трехслойных пластин из изотропных слоев—в [5].

В настоящей работе исследуются вопросы устойчивости распространения одномерных волн в слоистых пластинах из композитов. Изучается частный вид определяющих связей и на их основе рассматриваются физически или геометрически нелинейные задачи.

1. Многие композиты, состоящие из взаимно-ортогонально армированных волокон, материал которых, например, металл, а связующее типа полимеров с достаточной для практики точностью, можно считать линейно упругими при наличии небольших напряжений типа сжатия-растяжения в направлениях армирования. По отношению же к касательным напряжениям будут проявляться нелинейные свойства. Зависимость между напряжениями и деформациями в системе координат, связанной с направлениями армирования, можно записать в виде

$$\sigma_{x'}=B_1 e_{x'}+B_3 e_{y'},\quad \sigma_{y'}=B_3 e_{x'}+B_2 e_{y'},\quad \sigma_{x'y'}=Ge_{x'y'}+G_1 e^2_{x'y'} \tag{1.1}$$

Добавление нелинейностей в первых двух уравнениях (1.1) приводит только к техническим трудностям (скорее, к громоздким формулам). В [1—5] для изотропных материалов нелинейность бралась кубической, здесь берется квадратичная нелинейность. Дело в том, что если вопрос устойчивости (или неустойчивости) распространения изгибных волн модуляции в однослойной изотропной пластине для связи [1—5] зависит от знака коэффициента нелинейности, то при учете квадратичной нелинейности имеет место неустойчивость независимо от знака коэффициента. Насколько нам известно, этот факт не был отмечен до сих пор.

В координатной системе, оси которой составляют угол φ с направлениями осей армирования, связь напряжений с деформациями запишется в виде

$$\sigma_i=B_{ij}e_j+B_{ijk}e_j e_k\quad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3) \tag{1.2}$$

Коэффициенты B_{ij} выражаются через B_i, G известным образом [6], а коэффициенты при нелинейных членах выражаются через G_1, в частности,

$$B_{111}=\frac{3}{4}G_1\sin^2 2\varphi,\quad B_{112}=\frac{3}{2}G_1\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi \tag{1.3}$$

Последние формулы пересчета получаются, как и в линейном случае, преобразованием выражения внутренней энергии.

Будем составлять конструкцию из таких $2n$ монослоев (толщины каждого h) так, что каждых два соседних слоя относительно друг друга повернуты на некоторый угол φ_m, а относительно координатной плоскости (в середине пакета) слои расположим двояким образом:

а) симметрично (φ_m одинаковые для $z_m>0$ и $z<0$)

б) антисимметрично (если $\varphi_m>0$ при $z_m>0$, то $\varphi_m<0$ при $z_m<0$).

Если принять гипотезу недеформируемых нормалей, то необходимые нам одномерные упругие связи примут вид:

для случая а)

$$
\begin{aligned}
&T_1=C_{11}\varepsilon_1+C_{16}\omega+D_{111}\varkappa_1^2, \quad C_{ij}=2h\sum_{m=1}^{n}B_{ij}^{(m)}\\
&S=C_{16}\varepsilon_1+C_{66}\omega+D_{113}\varkappa_1^2, \quad D_{ij}=\frac{2h^3}{3}\sum_{m=1}^{n}[m^3-(m-1)^3]B_{ij}^{(m)}\\
&M_1=D_{11}\varkappa_1+2D_{111}\varepsilon_1\varkappa_1+2D_{113}\omega\varkappa_1, \quad D_{ijk}=\frac{2h^3}{3}\sum_{m=1}^{n}[m^3-(m-1)^3]B_{ijk}^{(m)}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Так как нами изучаются нелинейные изгибные волны, то в (1.4) будут сохранены только нелинейные члены от прогиба.

В случае б) определяющие соотношения примут вид

$$
\begin{aligned}
&T_1=C_{11}\varepsilon_1+2K_{111}\varepsilon_1\varkappa_1, \qquad K_{ij}=h^2\sum_{m=1}^{n}[m^2-(m-1)^2]B_{ij}^{(m)}\\
&S=C_{66}\omega+K_{16}\varkappa_1+D_{113}\varkappa_1^2\\
&M_1=D_{11}\varkappa_1+K_{16}\omega+d_{111}\varkappa_1^2, \quad d_{ijk}=\frac{h^4}{2}\sum_{m=1}^{n}[m^4-(m-1)^4]B_{ijk}^{(m)}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Для простоты исследований при изучении геометрически нелинейных волн (большие прогибы) в (1.4)—(1.5) будут учтены только линейные связи, а при геометрически линейных задачах соотношения (1.4)—(1.5) берутся полностью.

2. В случае больших прогибов одномерные уравнения движения имеют вид

$$
\frac{\partial T_1}{\partial x}=\bar\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial x}=\bar\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(T_1\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\bar\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \bar\rho=2n\rho h \tag{2.1}
$$

а компоненты деформаций

$$
\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad \omega=\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varkappa_1=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.2}
$$

Согласно (1.4) (без нелинейных членов) в симметричном случае получим следующие уравнения в перемещениях:

$$
C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_{16}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{2}C_{11}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2=\bar\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
$$

$$C_{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{2}C_{26}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2=\bar{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(C_{11}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+C_{16}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right\}+\bar{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

Решение (2.3) ищем в виде

$$u=u_0+u_2\exp(2i\tau)+\bar{u}_2\exp(-2i\tau),\quad v=v_0+v_2\exp(2i\tau)+\bar{v}_2\exp(-2i\tau)$$

$$w=w_1\exp(i\tau)+\bar{w}_1\exp(-i\tau),\quad \tau=kx-\omega t \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получим связи между коэффициентами и следующее нелинейное дисперсионное соотношение:

$$\omega^2=\omega_0^2+Aa^2,\quad \omega_0^2=\frac{D_{11}}{\bar{\rho}}k^4,\quad a^2=4w_1\bar{w}_1$$

$$A=\frac{D_{11}k^6}{8\bar{\rho}\Delta}(16C_{11}D_{11}k^2+3C_{11}^2-4C_{11}C_{66}-9C_{16}^2) \tag{2.5}$$

$$\Delta=(C_{11}-4D_{11}k^2)(C_{66}-4D_{11}k^2)-C_{16}^2$$

При получении (2.5) в инерционных членах первых двух уравнений (2.3) согласно [7] полагалось $\partial^2/\partial t^2\approx C^2\partial^2/\partial x^2$, где $C=\partial\omega_0/\partial k$.

Для антисимметрично собранной пластинки уравнениями движения будут

$$C_{11}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]=\bar{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad C_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-K_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=\bar{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{2.6}$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-K_{16}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(C_{11}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+C_{16}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right\}+\bar{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

Решение (2.6) будем искать как

$$u=u_0+u_2\exp(2i\tau)+\bar{u}_2\exp(-2i\tau),\quad v=v_1\exp(i\tau)+\bar{v}_1\exp(-i\tau)$$

$$w=w_1\exp(i\tau)+\bar{w}_1\exp(-i\tau) \tag{2.7}$$

Следует отметить, что здесь, в отличие от предыдущего случая, компонента перемещения v теперь имеет порядок прогиба w.

Поступая как и выше, получим дисперсионное уравнение (2.5), где теперь

$$\omega_0^2=\frac{\bar{D}_{11}}{\bar{\rho}}k^4,\quad \bar{D}_{11}=D_{11}-\frac{K_{16}^2}{C_{66}},\quad A=\frac{\bar{D}_{11}C_{11}}{16\bar{\rho}}\,\frac{12\bar{D}_{11}k^2-5C_{11}}{(C_{11}-\bar{D}_{11}k^2)(C_{11}-4\bar{D}_{11}k^2)} \tag{2.8}$$

При получении выражения линейной частоты за основу берется изгибная волна в низкочастотном приближении ($k^2h^2\ll 1$).

Как видно из (2.8), коэффициент A, характеризующий устойчивость волны модуляции $(\omega_0'(\partial\omega/\partial a^2)>0$, см., например, [7]), отрицателен, то есть имеется неустойчивость, в то время как для симметрично собранной пластинки по (2.5) A может быть как положительным, так и отрицательным и, следовательно, возможны устойчивость и неустойчивость.

3. В случае малых перемещений соотношения (1.4) и (1.5) возьмем полностью, а (2.1) и (2.2) — без нелинейных членов. В то же время, так как изучаются изгибные волны, инерционными членами в плоскости пластины будем пренебрегать. Тогда уравнения, записанные только через прогибы пластинки, будут иметь вид соответственно для симметричного случая

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+A_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3+\bar{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{3.1}$$

и антисимметричного случая

$$\overline{D}_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+A_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\bar{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{3.2}$$

Здесь введены обозначения

$$A_1=\frac{2}{\Delta_1}\left(C_{11}D_{113}^2+C_{66}D_{111}^2-2C_{16}D_{111}D_{113}\right)$$
$$\Delta_1=C_{11}C_{66}-C_{16}^2,\quad A_2=\frac{K_{16}D_{113}}{C_{66}}-d_{111} \tag{3.3}$$

Из (3.1) и (3.2) видно, что волны для симметрично или асимметрично собранных пластин имеют совершенно различный характер.

Если искать решение (3.1) как

$$w=w_1\exp(i\tau)+\overline{w}_1\exp(-i\tau) \tag{3.4}$$

то нелинейное дисперсионное соотношение будет (2.5), где

$$A=\frac{3}{4}\frac{A_1}{\bar{\rho}}k^8 \tag{3.5}$$

Для уравнения (3.2) решение ищем в виде

$$w=w_1\exp(i\tau)+w_2\exp(2i\tau)+\overline{w}_1\exp(-i\tau)+\overline{w}_2\exp(-2i\tau) \tag{3.6}$$

и постоянными будут

$$\omega_0^2=\overline{D}_{11}\frac{k^4}{\bar{\rho}},\quad A=-\frac{2}{3}\frac{A_2^2k^8}{\bar{\rho}\overline{D}_{11}} \tag{3.7}$$

Приведенные значения для A по (3.5) и (3.7) показывают, что если в первом случае в зависимости от значений упругих постоянных и расположения слоев пластины нелинейные волны могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми, то во втором случае они всегда неустойчивы.

Вообще, интересен такой факт. Как показано в [1—3], для изотропной однослойной пластины из кубически-нелинейного материала волны модуляции неустойчивы для «мягких» материалов (типа металлов) и устойчивы для «жестких» материалов. В случае же квадратичной нелинейности вне зависимости от знака коэффициента нелинейности волны в однослойной изотропной пластинке всегда неустойчивы.

ABOUT STABILITY OF PROPAGATION OF NON-LINEARY WAVE IN SANDWICH-TYPE COMPOSITE PLATES

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

ԿՈՄՊՈԶԻՏՆԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՍԱԼԵՐՈՒՄ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Քննարկված են կոմպոզիտներից կազմված շերտավոր սալերում միաչափ ալիքների տարածման կայունության հարցերը։ Սալի փաթեթը պատրաստված է փոխուղղահայաց մարմնավորված շերտերից, որոնք մեկը մյուսի նկատմամբ ինչ-որ անկյունով պտտված են և դասավորված են կոորդինատական հարթության նկատմամբ սիմետրիկ կամ հակասիմետրիկ։ Դիտարկված են ֆիզիկական և երկրաչափական ոչ գծային խնդիրներ։ Մոդուլային ալիքների տարածման կայունության և ոչ կայունության համար ստացված են պայմաններ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу распространения изгибных волн в нелинейно-упругих пластинках.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1979, т. *32*, №5, с. 23—37.
2. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые вопросы распространения квазимонохроматических нелинейных волн в пластинах и оболочках.—Тр. XII Всес. конф. по теории оболочек и пластин, Ереван, т. *1*, 1980, с. 106—112.
3. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Квазимонохроматические волны в нелинейно упругих пластинах.—Изв. АН СССР. МТТ, 1981, №4, с. 169—176.
4. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу устойчивости распространения нелинейных волн в вязкоупругой пластине.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1983, т. *36*, №2, с. 3—9.
5. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые задачи по устойчивости распространения нелинейных волн.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1984, т. *37*, №2, с. 3—11.
6. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
7. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
3.V.1989