ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 6, 1989 Механика

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ДВУХ КОАКСИАЛЬНЫХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ТОКОНЕСУЩИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

КАЗАРЯН К. Б.

Работа посвящена магнитоупругой устойчивости двух бесконечных коаксиальных сверхпроводящих цилиндрических оболочек, служащих для транспортировки электрического тока. Рассматриваемая система оболочек является моделью кабеля сверхпроводящего электрического тока. Начальное электрическое и магнитные поля определяются на основе уравнений Лондонов. Получена связанная система уравнений устойчивости для близко расположенных друг к другу оболочек. Определена критическая сила тока, превышение которой приводит к потере упругой устойчивости. Первые результаты, относящиеся к этой задаче, получены в работе [1], где показана возможность потери упругой устойчивости коаксиальной системы, в случае, когда внешняя оболочка системы является абсолютно жесткой.

1. Рассмотрим систему двух коаксиальных упругих цилиндрических оболочек, изготовленных из сверхпроводящего материала. Оболочки замкнуты на бесконечности; ток течет вдоль образующей внутренней оболочки и возвращается вдоль образующей внешней оболочки. Оболочки разделены диэлектрическим слоем, отождествляемым с вакуумом. Оболочки отнесем к цилиндрической системе координат (ρ, φ, x) с осью, совпадающей с осью коаксиальной системы. Величины, характеризующие область внутренней оболочки, будут отмечаться индексом (1); область внешней оболочки—индексом (2).

Распределение начального тока и магнитного поля в коаксиальной системе определим на основе уравнений Лондонов [2]:

$$\operatorname{rot} H_0^{(s)} = \frac{4\pi}{c} j_0^{(s)}; \quad \operatorname{rot} j_0^{(s)} = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} H_0^{(s)}; \quad \operatorname{div} H_0^{(s)} = 0 \tag{1.1}$$

где λ есть параметр лондоновской глубины проникновения (обычный порядок $\lambda \sim 10^{-8}$ м), c—электродинамическая постоянная, $H_0^{(s)}$—вектор магнитного поля, $j_0^{(s)}$—вектор плотности сверхтока.

Уравнения (1.1) рассматриваются совместно с уравнениями Максвелла в областях вне материала оболочки

$$\operatorname{rot} H_0^{(s)} = 0; \quad \operatorname{div} H_0^{(s)} = 0 \tag{1.2}$$

при обычных граничных условиях непрерывности компонент вектора магнитного поля на поверхностях $\rho = \rho_1;\ \rho_2;\ \rho_3;\ \rho_4$. Относительно плотности электрического тока мы имеем условие полного электрического тока

$$2\pi\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} j_{0x}^{(1)}\rho d\rho = J_0, \quad 2\pi\int\limits_{\rho_3}^{\rho_4} j_{0x}^{(2)}\rho d\rho = -J_0 \tag{1.3}$$

На основе аксиальной симметрии рассматриваемой задачи имеем

$$H_{0x}^{(s)} = H_{0\rho}^{(s)} = H_{0x} = H_{0\rho} = 0; \quad j_{0\varphi}^{(s)} = j_{0\rho}^{(s)} = 0; \quad H_{0\varphi}^{(s)} = H_{0\varphi}^{(s)}(\rho); \quad j_{0x}^{(s)} = j_{0x}^{(s)}(\rho) \tag{1.4}$$

Решение задачи (1.1)—(1.3) имеет вид ($\eta = \rho/\lambda$)

$$H_{0\varphi}^{(1)} = \frac{2J_0}{c\rho}\,\frac{I_1(\eta)K_1(\eta_1) - K_1(\eta)I_1(\eta_1)}{I_1(\eta_2)K_1(\eta_1) - K_1(\eta_2)I_1(\eta_1)}$$

$$H_{0\varphi}^{(2)} = \frac{2J_0}{c\rho}\,\frac{I_1(\eta)K_1(\eta_4) - I_1(\eta_4)K_1(\eta)}{I_1(\eta_3)K_1(\eta_4) - I_1(\eta_4)K_1(\eta_3)} \tag{1.5}$$

$$H_{0\varphi} = \frac{2J_0}{c\rho}, \quad \rho_2 < \rho < \rho_3; \quad H_{0\varphi} = 0; \quad \rho > \rho_4; \quad \rho < \rho_1$$

В (1.5) $I_1(\eta)$; $K_1(\eta)$—модифицированные функции Бесселя. Исходя из асимптотического анализа функций Бесселя при $\eta \gg 1$ ($\lambda \ll 1$), из (1.5) следует, что магнитное поле и электрический ток локализованы только в поверхностных слоях толщины λ у внешней поверхности первой оболочки $\rho = \rho_2$ и внутренней поверхности $\rho = \rho_3$ второй оболочки. По этой причине мы в дальнейшем примем, что ток в оболочках является поверхностным; магнитное поле распределено в зазоре между оболочками $\rho_2 < \rho < \rho_3$ и не проникает в глубь сверхпроводящего материала (эффект Мейснера [2]).

Взаимодействие магнитного поля и поверхностного тока вызывает действие магнитного давления на поверхностях оболочек $\rho = \rho_2$, $\rho = \rho_3$.

Вследствие магнитного давления в оболочках устанавливается начальное напряженное состояние, определяемое мембранными кольцевыми усилиями

$$T_{0\varphi}^{(1)} = -\frac{J_0^2}{2\pi c^2 \rho_2}; \qquad T_{0\varphi}^{(2)} = \frac{J_0^2}{2\pi c^2 \rho_3} \tag{1.6}$$

2. Пусть для рассматриваемых оболочек справедлива гипотеза Кирхгофа-Лява. Ограничимся рассмотрением технической теории оболочек средней длины [3].

Уравнения статической устойчивости оболочек в нормальных перемещениях срединных поверхностей с учетом (1.6) имеют вид [3] ($s = 1; 2$)

$$D_s \Delta_s^4 w^{(s)} + \frac{2E_s d_s}{R_s^2}\,\frac{\partial^4 w^{(s)}}{\partial x^4} - (-1)^s \frac{T_{0\varphi}^{(s)}}{R_s^2}\Delta_s^2 \frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial \varphi^2} + (-1)^s \Delta_s^2 [\sigma_\rho^{(s)}(\rho_{s+1})] -$$

$$-h_s \Delta_s^2 \left[\frac{\partial \sigma_{\rho x}^{(s)}(\rho_{s+1})}{\partial x} + \frac{1}{R_s}\,\frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}^{(s)}(\rho_{s+1})}{\partial \varphi}\right] = 0 \tag{2.1}$$

В (2.1) D_s—жесткость, E_s—модуль упругости материалов оболочек, $2d_s$—толщина, R_s—радиус срединных поверхностей оболочек, $\sigma_{\rho}^{(s)}$, $\sigma_{\rho x}^{(s)}$, $\sigma_{\rho\varphi}^{(s)}$—есть компоненты тензоров $\widehat{\sigma^{(s)}}$ возмущенного напряженного состояния коаксиальной системы, $\Delta_s \equiv \partial^2/\partial x^2 + R_s^{-2}\partial^2/\partial\varphi^2$.

Для тонких оболочек $\sigma_{\rho}^{(s)}(\rho_{s+1})$; $\sigma_{\rho x}^{(s)}(\rho_{s+1})$; $\sigma_{\rho\varphi}^{(s)}(\rho_{s+1})$ определяются из следующих линеаризованных граничных условий, заданных на поверхностях $\rho=\rho_2$; $\rho=\rho_3$ [3]:

$$\sigma_{\rho}^{(s)}=T_{\rho\rho};\quad \sigma_{\rho x}^{(s)}=T_{\rho x};\quad \sigma_{\rho\varphi}^{(s)}=T_{\rho\varphi}\quad \text{при}\quad \rho=\rho_{s+1} \tag{2.2}$$

В (2.2) $T_{\rho\rho}$, $T_{\rho x}$, $T_{\rho\varphi}$ есть компоненты электромагнитного тензора Максвелла $\hat{T}$, линеаризованное выражение которого определяется следующим образом:

$$T_{ik}=\frac{1}{4\pi}(H_{i0}h_k+H_{k0}h_i-\delta_{ik}H_{i0}h_i);\quad (i;\,k\Leftrightarrow\rho,\ \varphi,\ x)$$

$$T_{\rho\rho}=-\frac{H_0}{4\pi}h_{\varphi};\quad T_{\rho\varphi}=\frac{H_0}{4\pi}h_{\rho};\quad T_{\rho x}=0 \tag{2.3}$$

В (2.3) h_{ρ}; h_{φ} есть компоненты вектора малых возмущений магнитного поля в области зазора, обусловленного деформацией оболочек.

Вектор h удовлетворяет уравнениям магнитостатики Максвелла в области $\rho\in(\rho_2;\ \rho_3)$

$$\operatorname{rot} h=0;\quad \operatorname{div} h=0 \tag{2.4}$$

Из условия, что магнитное поле касательно к поверхности сверхпроводника [2]

$$(H_0+h)n_s=0,\quad \rho=\rho_2;\ \rho_3 \tag{2.5}$$

где n_s есть внешняя нормаль к деформированным поверхностям оболочек $n_s=\pm\left(\frac{\partial w^{(s)}}{\partial x};\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial w^{(s)}}{\partial\varphi};\,-1\right)$ [3], получим следующие линеаризованные граничные условия относительно нормальной компоненты вектора возмущенного магнитного поля

$$h_{\rho}=\frac{2J_0}{c\rho_2^2}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\varphi};\quad \rho=\rho_2,\quad h_{\rho}=\frac{2J_0}{c\rho_3^2}\frac{\partial w^{(2)}}{\partial\varphi};\quad \rho=\rho_3 \tag{2.6}$$

Введя потенциальную скалярную функцию Φ, $h=\operatorname{grad}\Phi$, из (2.4) имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\Phi(\rho,\ \varphi,\ x)=0 \tag{2.7}$$

Представляя функцию $\Phi(\rho,\ \varphi,\ x)$ и нормальные перемещения $w^{(s)}$ в виде $\Phi=\Phi_0(\rho)\exp i(kx+m\varphi)$; $w^{(s)}=w_0^{(s)}\exp i(kx+m\varphi)$ (m—целое число) и решая уравнение (2.7), после удовлетворения граничным условиям (2.6) получим

$$\Phi_0(z)=\frac{2J_0im}{c\Delta k}\left\{\frac{w_0^{(1)}}{\rho_2^2}[K'_m(z_3)I_m(z)-I'_m(z_3)K_m(z)]+\right.$$

$$\left.+\frac{w_0^{(2)}}{\rho_3^2}[I'_m(z_2)K_m(z)-K'_m(z_2)I_m(z)]\right\} \tag{2.8}$$

В (2.8) $\Delta=K'_m(z_3)I'_m(z_2)-I'_m(z_3)K'_m(z_2)$; $z=k\rho$; $(\ )'=\dfrac{d}{dz}$; K_m, I_m—модифицированные функции Бесселя.

В дальнейшем мы ограничимся случаем, интересным с точки зрения приложений, когда ширина зазора между оболочками мала по сравнению с радиусом коаксиальной системы и толщины оболочек равны $(d_1=d_2=d)$. Используем следующие обозначения: R_0—радиус срединной поверхности внутренней оболочки; a_0—ширина зазора, тогда

$$\rho_2=R_0+d;\quad \rho_3=R_0+d+a_0$$

При $d+a_0\ll R_0$ справедливы следующие разложения:

$$K'_m(z_3)\simeq K'_m(z_2)+ka_0K''_m(z_2);\ I'_m(z_3)\simeq I'_m(z_2)+ka_0I''_m(z_2) \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в (2.8) и используя известные соотношения функции Бесселя, мы получим следующее выражение для функции $\Phi_0(z)$ при $z=z_2$; z_3:

$$\Phi_0(z_2)=\Phi_0(z_3)\simeq-\frac{2J_0im}{cR_0^2a_0}\frac{w_0^{(2)}-w_0^{(1)}}{k^2+m^2/R_0^2}$$

Используя формальное операторное обозначение: $\partial/\partial\varphi=im$, $\partial/\partial x=ik$, $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\dfrac{1}{R_0^2}\partial^2/\partial\varphi^2$, мы получим следующие значения компонент h_x, h_φ на поверхностях $\rho=\rho_2$; ρ_3:

$$h_x(\rho_2)=h_x(\rho_3)=\frac{2J_0}{cR_0^2a_0}\Delta^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial\varphi}(w^{(1)}-w^{(2)})\right]$$

$$h_\varphi(\rho_2)=h_\varphi(\rho_3)=\frac{2J_0}{cR_0^3a_0}\Delta^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(w^{(1)}-w^{(2)})\right] \tag{2.10}$$

Используя (2.10) и (2.6), имеем следующие значения для компонент тензора Максвелла (2.3):

$$T_{\rho\rho}(\rho_2)=T_{\rho\rho}(\rho_3)=-\frac{J_0^2}{\pi c^2R_0^4a_0}\Delta^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(w^{(1)}-w^{(2)})\right]$$

$$T_{\rho\varphi}(\rho_2)=\frac{J_0^2}{\pi c^2R_0^3}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\varphi};\quad T_{\rho\varphi}(\rho_3)=\frac{J_0^2}{\pi c^2R_0^3}\frac{\partial w^{(2)}}{\partial\varphi} \tag{2.11}$$

Подставляя (2.11) в (2.1) с учетом (2.2) и (1.6), получим следующую систему уравнений устойчивости коаксиальной системы в приближении тонких оболочек $(d/R_0\ll1)$

$$D_1\Delta^4 w^{(1)}+\frac{2E_1 d}{R_0^2}\frac{\partial^4 w^{(1)}}{\partial x^4}+\frac{J_0^2}{2\pi c^2 R_0^3}\Delta^2\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial\varphi^2}+\frac{J_0^2}{\pi c^2 R_0^4 a_0}\Delta\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(w^{(1)}-w^{(2)})\right]=0$$

$$D_2\Delta^4 w^{(2)}+\frac{2E_2 d}{R_0^2}\frac{\partial^4 w^{(2)}}{\partial x^4}-\frac{J_0^2}{2\pi c^2 R_0^3}\Delta^2\frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial\varphi^2}-\frac{J_0^2}{\pi c^2 R_0^4 a_0}\Delta^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(w^{(1)}-w^{(2)})\right]=0 \tag{2.12}$$

3. Система связанных уравнений устойчивости (2.12), полученная для оболочек бесконечной длины, может с достаточной точностью использована для оболочек конечной длины.

Приведем решение системы (2.12) для оболочек из одинаковых материалов и длины L шарнирно-опертых по торцам $x=L$, $x=0$.

Представляя решение для $w^{(i)}(x, \varphi)$ в виде

$$w^{(i)}=w_0^{(i)}\cos m\varphi\cdot\sin\frac{\pi n x}{L}$$

где m, n есть целые числа, получим следующее выражение для критической напряженности магнитного поля в зазоре оболочки $H_{0*}=2J_0/cR_0$, превышение которой приводит к магнитоупругой потере упругой устойчивости коаксиальной системы:

$$H_{0*}^2=\frac{32\pi E}{3(1-\nu^2)}\frac{d^3}{a_0R_0^2}\min_{(m,n)}\left\{\frac{(p_0^2+m^2)^4+\frac{3(1-\nu^2)p_0^4R^2}{d^2}}{m^2(p_0^2+m^2)^3}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\sqrt{1+\frac{a_0^2}{4R_0^2}(p_0^2+m^2)^2}+1\right]\right\}$$

где $p_0=\pi n R/L$, ν—коэффициент Пуассона.

В табл. 1 для оболочки с упругими постоянными $E=1{,}2\cdot10^{11}$ Па, $\nu=0{,}34$ для различных отношений R_0/d; R_0/L; R_0/a_0 приведены критические значения магнитного поля H_{0*}.

Таблица

R_0/L	R_0/d	R_0/a_0	H_{0*} (Тл)
0,1	500	500	2,54
0,1	500	50	0,83
0,1	400	50	1,16
0,1	200	50	2,31
0,2	500	50	0,87
0,2	400	50	1,21
9,2	300	50	1,85
0,3	500	50	0,91
0,3	200	200	6,46
0,05	400	50	1,14
0,05	200	50	3,21

В (2.12), устремляя $D_2\to\infty$, получим случай, рассмотренный в работе [1]. Сопоставление численных результатов [1] с результатами таблицы позволяет сделать вывод, что упругая коаксиальная система может быть более стабильной по сравнению с коаксиальной системой, внешняя оболочка которой является жесткой. Это обстоятельство физически объясняется тем, что внешняя упругая оболочка берет на себя часть электромагнитной возмущенной нагрузки.

Аналитическое исследование вопроса устойчивости для коаксиальных оболочек различных толщин, упругие свойства которых не совпадают, представит тему отдельной работы.

STABILITY OF A SYSTEM OF TWO COAXIAL SUPERCONDUCTING CURRENT–CARRYING CYLINDRICAL SHELLS

K. B. KAZARIAN

ԵՐԿՈՒ ՀԱՄԱՌԱՆՑՔԻ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՉ ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Հետազոտված է երկու համառանցքի գերհաղորդիչ գլանային թաղանթների կայունության խնդիրը՝ էլեկտրական հոսանքի առկայությամբ։ Ստացված է կայունության հավասարումների կապակցված համակարգ, երբ թաղանթների միջև եղած հեռավորությունը բավականաչափ փոքր է համակարգի շառավիղից։ Որոշված է հոսանքի կրիտիկական ուժը, որի գերազանցումը բերում է առաձգական կայունության կորստին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овакимян Р. Н.* Об устойчивости коаксиальной системы сверхпроводящих оболочек.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1979, т. 32, №3, с. 42—55.
2. *Шмидт В. В.* Введение в физику сверхпроводников.—М.: Наука, 1982. 238 с.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.—М.: Наука, 1977. 272 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
20.IV.1989