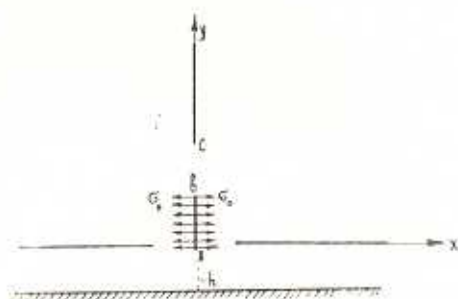


УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ,  
 ОСЛАБЛЕННОЙ КОНЕЧНОЙ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ  
 ТРЕЩИНАМИ

АФЯН Б. А., СТЕПАНЯН С. П.

Рассматривается плоская задача теории упругости о напряженно-деформированном состоянии упругой полуплоскости, ослабленной конечной и полубесконечными трещинами (фиг. 1). Вся граница полуплоскости жестко закреплена, а на поверхностях трещины заданы напряжения



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, \pm 0) &= p_0(x), \quad \tau_{xy}(x, \pm 0) = q_0(x), \quad (x > a) \\ \sigma_{xx}(\pm 0, y) &= \sigma_0(y), \quad \tau_{xy}(\pm 0, y) = 0, \quad (0 < y < b, \quad c < y < \infty) \\ u(x, -h) &= v(x, -h) = 0, \quad (-\infty < x < \infty) \end{aligned} \quad (1)$$

В условии (1)  $p_0(x)$  — симметричная, а  $q_0(x)$  — антисимметричная функции относительно точки  $o$ .

Суть решения поставленной задачи заключается в разбиении исходной области, занятой деформируемым твердым телом на канонические области (квадрант и полоса) и склейке решений для этих областей (при соответствующих граничных условиях) на границе контакта.

В [1] получены соотношения между компонентами вектора смещений и тензора напряжений для квадранта и полосы:

$$Eu'_x(x, +0) = (1 - \nu)p_1(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] q_1(t) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\infty} R_1(t, x) p_1(t) dt + \int_0^{\infty} R_2(t, x) q_1(t) dt - \int_0^{\infty} R_2(t, x) z_1(t) dt \\
Eu'_x(x, -0) & = (1 - \nu) p_1(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] q_1(t) dt + \\
& + \int_0^{\infty} K_1(t, x) p_1(t) dt + \int_0^{\infty} K_2(t, x) q_1(t) dt \\
Ev'_x(x, +0) & = (\nu - 1) q_1(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right] p_1(t) dt + \\
& + \int_0^{\infty} R_3(t, x) p_1(t) dt - \int_0^{\infty} R_4(t, x) q_1(t) dt - \int_0^{\infty} R_5(t, x) z_1(t) dt \\
Ev'_x(x, -0) & = (\nu - 1) q_1(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{x-t} + \frac{1}{x+t} \right] p_1(t) dt - \\
& - \int_0^{\infty} K_3(t, x) p_1(t) dt - \int_0^{\infty} K_4(t, x) q_1(t) dt \\
Eu'_y(0, y) & = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{y-t} - \frac{1}{y+t} \right] z_1(t) dt - \\
& - \int_0^{\infty} R_6(t, y) p_1(t) dt + \int_0^{\infty} R_7(t, y) q_1(t) dt + \int_0^{\infty} R_8(t, y) z_1(t) dt
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
p_1(x) & = \begin{cases} p(x), & 0 < x < a \\ p_0(x), & a < x < \infty \end{cases}, \quad q_1(x) = \begin{cases} q(x), & 0 < x < a \\ q_0(x), & a < x < \infty \end{cases} \\
z_1(y) & = \begin{cases} z(y), & b < y < c \\ z_0(y), & 0 < y < b, c < y < \infty \end{cases}
\end{aligned}$$

где  $p(x)$ ,  $q(x)$  и  $z(y)$  — нормальные и касательное напряжения на границе контакта, подлежащие определению.  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно,

$$R_{1,4}(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} \left[ z \cos \left( z \ln \frac{x}{t} \right) \mp \sin \left( z \ln \frac{x}{t} \right) \right] \frac{z dz}{\Delta}$$

$$R_2(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^x \operatorname{th} \frac{\pi z}{2} \sin \left( z \ln \frac{x}{t} \right) \frac{(1+z^2) dz}{\Delta}$$

$$R_3(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^x \left[ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi z}{2} + z^2}{\Delta} + \operatorname{ch}^{-1} \frac{\pi z}{2} \right] \exp \left( -\frac{\pi z}{2} \right) \sin \left( z \ln \frac{x}{t} \right) dz$$

$$R_{3,1}(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^x \left[ z \cos \left( z \ln \frac{x}{t} \right) \pm \sin \left( z \ln \frac{x}{t} \right) \right] \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2} \frac{dz}{\Delta}$$

$$R_6(t, x) = \frac{2}{\pi x} \int_0^x z \operatorname{ch} \frac{\pi z}{2} \sin \left( z \ln \frac{x}{t} \right) \frac{dz}{\Delta}, \quad \Delta = \operatorname{sh}^2 \frac{\pi z}{2} - z^2$$

$$K_1(t, x) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \left[ i^2 h^2 - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} \right] \cos i x \cos i t \frac{dh}{\Delta_1}$$

$$K_2(t, x) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \left[ i^2 h^2 - i h - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} - \frac{\nu-3}{2(\nu+1)} \exp(-2ih) + \right. \\ \left. + 0,5 \right] \cos i x \sin i t \frac{dh}{\Delta_1}, \quad K_3(t, x) = K_2(x, t)$$

$$K_4(t, x) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \left[ i^2 h^2 - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} \right] \sin i x \sin i t \frac{dh}{\Delta_1}$$

$$\Delta_1 = \operatorname{sh}^2 i h - \frac{2}{\nu+1} \operatorname{ch} 2ih - 2 \frac{\nu-1}{(\nu+1)^2} - i^2 h^2$$

Указанная граничная задача (1) после удовлетворения условиям контакта

$$u'_x(x, 0+) = u'_x(x, 0-), \quad v'_x(x, 0+) = v'_x(x, 0-), \quad (0 < x < a), \\ u'_y(0, y) = 0, \quad (b < y < c) \quad (3)$$

сводится к решению системы трех сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $\sigma(t)$ .

$$\frac{4}{\pi} \int_0^a \frac{p(t)}{x-t} dt + \int_0^a M_{1,1}(t, x) p(t) dt + \int_0^a M_{1,2}(t, x) q(t) dt + \\ + \int_b^c R_6(t, x) \sigma(t) dt = F_1(x), \quad (0 < x < a)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{\pi} \int_0^a \frac{q(t) dt}{x-t} + \int_0^a M_{2,1}(t, x) p(t) dt + \int_0^a M_{2,2}(t, x) q(t) dt - \\
& - \int_b^c K_7(t, x) z(t) dt = F_2(x), \quad (0 < x < a) \\
& \frac{2}{\pi} \int_b^c \frac{z(t) dt}{x-t} - \int_0^a R_6(t, x) p(t) dt + \int_0^a R_3(t, x) q(t) dt + \\
& + \int_b^c \left[ R_3(t, x) - \frac{2}{\pi} \frac{1}{x+t} \right] z(t) dt, \quad (b < x < c)
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь ядра  $M_{ij}(t, x)$  ( $i, j = 1, 2$ ) и правые части  $F_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
& M_{1,1}(t, x) = R_2(t, x) + K_1(t, x); \quad M_{1,2}(t, x) = -[R_4(t, x) - K_4(t, x)] \\
& M_{2,1}(t, x) = R_1(t, x) - K_1(t, x); \quad M_{2,2}(t, x) = \left[ -\frac{4}{\pi} \frac{1}{x+t} + R_2(t, x) - K_2(t, x) \right] \\
& F_1(x) = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p_0(t) dt}{x-t} - \int_0^{\infty} [R_2(t, x) + K_2(t, x)] p_0(t) dt + \\
& + \int_a^{\infty} [R_4(t, x) - K_4(t, x)] q_0(t) dt + \int_0^b R_5(t, x) z_0(t) dt + \int_c^{\infty} R_6(t, x) z_0(t) dt \\
& F_2(x) = -\frac{4}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{q_0(t) dt}{x-t} + \frac{4}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{q_0(t) dt}{x+t} - \int_a^{\infty} [R_1(t, x) - K_1(t, x)] p_0(t) dt - \\
& - \int_a^{\infty} [R_2(t, x) - K_2(t, x)] q_0(t) dt + \int_0^b R_7(t, x) z_0(t) dt + \int_c^{\infty} R_3(t, x) z_0(t) dt \\
& F_3(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^b \frac{z_0(t) dt}{y-t} + \frac{2}{\pi} \int_0^b \frac{z_0(t) dt}{y+t} - \frac{2}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{z_0(t) dt}{y-t} + \frac{2}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{z_0(t) dt}{y+t} + \\
& + \int_0^{\infty} R_6(t, x) p_0(t) dt - \int_a^{\infty} R_3(t, x) q_0(t) dt - \int_0^b R_3(t, x) z_0(t) dt - \\
& - \int_c^{\infty} R_3(t, x) z_0(t) dt
\end{aligned}$$

После замены переменных  $x = \frac{a}{2}(z+1)$ ,  $t = \frac{a}{2}(y+1)$  при  $0 < t$ ,

$x < a$  и  $x = \frac{c-b}{2}z + \frac{b+c}{2}$ ,  $t = \frac{c-b}{2}y + \frac{b+c}{2}$  при  $b < t$ ,  $x < c$

уравнения (4) преобразуются к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_i(y) dy}{z-y} + \sum_{j=1}^3 \int_{-1}^1 N_{ij}(y, z) \Phi_j(y) dy = \varphi_i(z) \quad (5)$$

$$-1 < z < 1; i=1, 2, 3$$

Здесь  $\Phi_1(y) = p\left(\frac{a}{2}(y+1)\right)$ ,  $\Phi_2(y) = q\left(\frac{a}{2}(y+1)\right)$ ,  $\Phi_3(y) = r\left(\frac{c-b}{2}y + \frac{b+c}{2}\right)$  и остальные функции  $\varphi_i(z)$ ,  $N_{ij}(y, z)$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) определяются аналогичным образом. Отметим, что функция  $\Phi_2(y)$  имеет особенность только в точке  $y=1$ , то есть  $\Phi_2(y) = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \times$

$\times \varphi(y)$ ;  $\varphi(y)$  — регулярная функция ( $i=1, 2$ ), а  $\varphi_3(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \chi(y)$ ,  $\chi(y)$  — регулярные функции.

Дополнительное условие, которым должны удовлетворять решения уравнений (4) или (5), следует из рассмотрения равновесия квадранта и имеет следующий вид:

$$\int_{-1}^1 \Phi_i(y) dy = C \quad (i=1, 3) \quad (6)$$

Решение системы (5) при условии (6) в указанных классах существует и единственно [2].

Используя квадратурные формулы Гаусса [3]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \frac{\varphi(y)}{(y-\xi_k)} dy = \sum_{i=1}^n \frac{2(1+y_i)}{2n+1} \frac{\varphi(y_i)}{y_i-\xi_k}$$

где

$$y_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n+1}\pi\right), \quad i=1, \dots, n; \quad \xi_k = \cos\frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k=1, \dots, n;$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\chi(t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-x_k)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{\chi(t_i)}{(t_i-x_k)}$$

где

$$t_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), \quad i=1, \dots, n; \quad x_k = \cos\frac{\pi k}{n}, \quad k=1, \dots, n-1;$$

Таблица 1

$K/\sigma$	$a/b$	$c/b=1$								
		$c/b=2$			$c/b=2,5$					
		1	2	3	1	2	3			
$K_1(a)/\sigma_0$		0,0339	0,1058	-0,0355	0,660	0,1532	-0,0198	0,3468	0,1788	-0,0027
$K_1(a)/\sigma_0$		0,2628	0,0740	0,0369	0,2761	0,0788	0,0397	0,2845	0,0824	0,0416
$K_2(a)/\sigma_0$		-0,2949	-0,1142	-0,0609	-0,2874	-0,1176	-0,0633	-0,2787	-0,1190	-0,0650
$K_1(b)/\sigma_0$		1,0137	0,9895	0,9754	0,7861	0,7659	0,7529	0,6583	0,6412	0,1231
$K_1(c)/\sigma_0$		0,2265	0,2349	0,2417	0,1328	0,1373	0,1419	0,0913	0,0939	0,0971

Таблица 2

$K/\sigma$	$a/b$	$c/b=5$								
		$c/b=2$			$c/b=2,5$					
		1	2	3	1	2	3			
$K_1(a)/\sigma_0$		0,0397	0,1108	-0,0323	0,6658	0,1532	-0,0166	0,3526	0,1836	0,0002
$K_1(a)/\sigma_0$		0,2458	0,0552	0,0215	0,2594	0,0594	0,0238	0,2681	0,0628	0,0255
$K_2(a)/\sigma_0$		-0,2866	-0,1184	-0,0629	-0,2793	-0,1220	-0,0656	-0,2709	-0,1238	-0,0674
$K_1(b)/\sigma_0$		1,0141	0,9920	0,9798	0,7864	0,7681	0,7568	0,6886	0,6430	0,6327
$K_1(c)/\sigma_0$		0,2265	0,2349	0,2401	0,1328	0,1368	0,1408	0,0912	0,0936	0,0963

решение системы (5) сводится к решению системы  $3n$  линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных  $\varphi_i(y_k)$ ,  $\chi_i(t_k)$ ,  $i=1, 2$ ;  $k=1, n$ .

После интерполирования по узлам  $y_i$ ,  $t_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , для иско-  
мых функций получим

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^n \varphi(y_k) \frac{P_n(y)}{(y-y_k)P_n'(y_k)}$$

$$P_n(y) = \frac{\sin((n+1)\arccos y) - \sin(n\arccos y)}{\sin(\arccos y)}$$

$$\chi_i(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \chi_i(t_k) \frac{T_n(t) \sqrt{1-t_k^2}}{t-t_k}, \quad i=1, 2$$

( $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ ) — многочлены Чебышева).

Коэффициенты интенсивности напряжений определяются при помощи найденной функции  $\chi_i(t)$  и  $\varphi(y)$  ( $i=1, 2$ ) и вычисляются по формулам

$$\frac{1}{\sigma_0} \cdot K_1(0) = \sqrt{2} \chi_1(-1), \quad \frac{1}{\sigma_0} \cdot K_1(a) = \sqrt{2} \chi_1(1), \quad \frac{1}{\sigma_0} \cdot K_2(a) = \sqrt{2} \varphi(1)$$

$$\frac{1}{\sigma_0} \cdot K_1(b) = \chi_2(-1)/\sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sigma_0} K_2(c) = \chi_2(1)/\sqrt{2}$$

Их численные значения приведены в табл. 1 и 2.

## STRESS STATE OF A SEMI-PLANE, WEAKENED WITH FINITE AND SEMI-INFINITE CRACKS

B. A. APHIAN, S. P. STEPANIAN

ՎԵՐՋՍՎՈՐ ԵՎ ԿԻՍԱՆՆՎԵՐՋ ՀԱՔԵՐՈՎ ԹՈՒՂԱՅՎԱԾ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ  
ԼԱՐՎԱՆՍՅՈՒՆ ՎԻՃԱԿԸ

Բ. Ա. ԱՓՅԱՆ, Ս. Պ. ՍՏԵՓԱՆԻԱՆ

### Ա մ ֆ ո ֆ ո ս լ մ

Դիտարկված է վերջավոր և կիսանվերջ ճաքերով թուլացված առաձգական կիսահարթության լարվածային դեֆորմացված վիճակի առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը: Նշված խնդրի լուծման էությունը կայանում է նրանում, որ առաձգական մասմնի դրադեցրած տիրույթը բաժանվում է երկու կանոնական տիրույթների՝ քառորդ հարթության և շերտի: Բերված են լարումների ինտենսիվության գործադիցյների թվային արժեքները:

## ЛИТЕРАТУРА

1. Афан Б. А., Степанян С. П. Об одной задаче упругой полуплоскости, ослабленной трещинами.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1989, т. 42, № 2, с. 50—57.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, М.: Физматгиз, 1962. 511 с.
3. Erdogan F. E., Gupta G. On the numerical solutions of singular integral equations. — Quart. appl. Math., 1972, vol. 7, № 8, p. 525—534.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1981. 324 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
6.11.1989.