ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 42, № 5, 1989 Механика

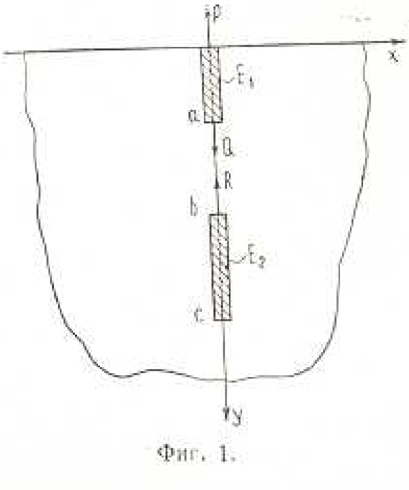
УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ КОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ (НАКЛАДКАМИ)

АГАБЕКЯН П. В., ГРИГОРЯН Э. Х.

В работе рассматривается задача для полубесконечной пластины, усиленной двумя конечными стрингерами, один из которых выходит на границу пластины. Причем стрингеры перпендикулярны к границе пластины и находятся на одной линии. Задача с помощью метода факторизации и метода ортогональных многочленов Чебышева сводится к решению квазивполне регулярной совокупности бесконечных систем алгебраических уравнений.

Пусть полубесконечная пластина с двумя конечными стрингерами, один из которых выходит на границу, деформируется под действием сил, приложенных на концах стрингеров. Модули упругости стрингеров равны E_1 и E_2 (фиг. 1). Относительно стрингеров принимается во вни-



Фиг. 1.

мание модель контакта по линии, то есть предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка [1]. Тогда уравнения равновесия стрингеров, в силу вышесказанного, запишутся в виде

$$\frac{dv^{(1)}}{dy}=\frac{1}{E_1F}\int_y^a \tau(\eta)d\eta+\frac{Q}{E_1F} \quad 0<y<a \tag{1}$$

$$\frac{dv^{(1)}}{dy}=\frac{1}{E_2F}\int_y^c \tau(\eta)d\eta, \quad b<y<c$$

при условиях

$$\int_0^a \tau(s)ds = P - Q, \qquad \int_b^c \tau(s)\,ds = R \tag{1'}$$

Здесь $\tau(y)$ — интенсивность контактных тангенциальных сил, $v^{(1)}(y)$ — перемещения точек стрингеров, F — площадь поперечного сечения стрингеров, P, Q, R — интенсивности сосредоточенных сил, действующих на концах стрингеров.

С другой стороны, для вертикальных деформаций полубесконечной пластины имеем

$$\frac{dv^{(2)}}{dy}=\frac{1}{\pi H}\int_0^a\left[\frac{d_1}{\eta+y}-\frac{d_2}{\eta-y}-\frac{d_3(\eta^2-\eta y)}{(\eta+y)^3}\right]\tau(\eta)d\eta+$$
$$+\frac{1}{\pi H}\int_b^c\left[\frac{d_1}{\eta+y}-\frac{d_2}{\eta-y}-\frac{d_3(\eta^2-\eta y)}{(\eta+y)^3}\right]\tau(\eta)d\eta, \quad 0<y<\infty \tag{2}$$

где H — толщина пластины

$$d_1=\frac{\mu^2+(\lambda^*+2\mu)^2}{4\mu(\lambda^*+\mu)(\lambda^*+2\mu)}, \quad d_2=\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu(\lambda^*+\mu)}, \quad d_3=\frac{\lambda^*+\mu}{2\mu(\lambda^*+2\mu)}, \quad \lambda^*=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$$

Имея в виду (1), (2) и удовлетворив условиям контакта

$$v^{(1)}(y)=v^{(2)}(y) \quad \text{при} \quad 0<y<a \quad \text{и} \quad b<y<c$$

после некоторых преобразований получим следующую систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с неподвижной особенностью:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\left[\frac{B}{\eta+y}-\frac{1}{\eta-y}-\frac{A(\eta^2-\eta y)}{(\eta+y)^3}\right]\varphi(\eta)d\eta=\lambda_1\int_y^1\varphi(\eta)d\eta+$$
$$+\lambda_1\frac{Q}{a}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 K_{11}(y,\eta)\psi(\eta)\,d\eta, \quad (0<y<1) \tag{3}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\frac{1}{\eta-y}\psi(\eta)d\eta=-\lambda_2\int_y^1\psi(\eta)d\eta+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 K_{21}(y,\eta)\psi(\eta)d\eta+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1 K_{22}(y,\eta)\varphi(\eta)d\eta, \qquad (-1<y<1) \tag{4}$$

Здесь

$$\varphi(y)=\tau(ay),\quad \psi(y)=\tau\left(\frac{c-b}{2}y+\frac{c+b}{2}\right)$$

$$K_{11}(y,\eta)=\frac{1}{\gamma_0+\eta-\gamma_1 y}-\frac{B}{\gamma_0+\eta+\gamma_1 y}+\frac{A(\gamma_0+\eta)(\gamma_0+\eta-\gamma_1 y)}{(\gamma_0+\eta+\gamma_1 y)^3}$$

$$K_{21}(y,\eta)=\frac{B}{2\gamma_0+\eta+y}-\frac{A(\gamma_0+\eta)(\eta-y)}{(2\gamma_0+\eta+y)^3}$$

$$K_{22}(y,\eta)=\frac{B}{\eta+\gamma_1^{-1}y+\gamma_1}-\frac{1}{\eta-\gamma_1^{-1}y-\gamma_2}-\frac{A(\eta-\gamma_1^{-1}y-\gamma_2)\eta}{(\eta+\gamma_1^{-1}y+\gamma_2)^3}$$

$$\gamma_0=\frac{c+b}{c-b},\quad \gamma_1=\frac{2a}{c-b},\quad \gamma_2=\frac{b+c}{2a}$$

$$A=d_2^{-1}d_3,\quad B=d_2^{-1}d_1,\quad \lambda_1=\frac{d_2^{-1}aH}{E_1F},\quad \lambda_2=\frac{d_2^{-1}(c-b)H}{2E_2F}$$

Сначала рассмотрим уравнение (3), продолжая его в область $1<y<\infty$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{B}{\eta+y}-\frac{1}{\eta-y}-\frac{A(\eta^2-\eta y)}{(\eta+y)^3}\right]\varphi^-(\eta)d\eta=$$

$$=\lambda_1\left(\int_0^\infty\theta(\eta-y)\,\varphi^-(\eta)d\eta+\frac{Q}{a}\right)\theta(1-y)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{11}^-(y,\eta)\,\psi(\eta)d\eta+g^+(y)$$

$$(0<y<\infty)\tag{5}$$

где $\theta(y)$ — функция Хевисайда, $K_{11}^-(y,\eta)=\theta(1-y)K_{11}(y,\eta)$,

$$g^+(y)=\theta(y-1)dv^{(1)}/dy,\quad \varphi^-(y)=\theta(1-y)\varphi(y).$$

После замены в (5) $\eta=e^u$, $y=e^v$ и применения преобразования Фурье получим

$$\overline{K}(\alpha)\overline{\varphi_1^-}(\alpha)+\frac{\lambda_1}{\alpha}\overline{\varphi_1^-}(\alpha-i)+\overline{f^-}(\alpha)=-\lambda_1\frac{Q}{a\alpha}+\overline{g_1^+}(\alpha)\tag{6}$$

$$(-1<\operatorname{Im}\alpha<-\nu),\quad(0<\nu<1)$$

где

$$\overline{K}(\alpha)=\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha-A(\alpha+i)^2-B}{\operatorname{sh}\pi\alpha},\quad \alpha_1=-i\nu,\quad K(\alpha_1)=0$$

$$\overline{f^-}(\alpha)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\overline{K_{11}^-}(\alpha,\eta)\,\psi(\eta)d\eta\tag{7}$$

$$\overline{K_{11}^-}(\alpha,\eta)=\int_0^1 K_{11}(y,\eta)y^{i\alpha-1}\,dy=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{\partial^m K_{11}(y,\eta)}{\partial y^m}\bigg|_{y=1}\frac{\Gamma(i\alpha)}{\Gamma(i\alpha+m+1)}+$$

$$-(-1)^n \frac{\Gamma(i\alpha)}{\Gamma(i\alpha+n+1)} \int\limits_0^1 \frac{\partial^{n+1} K_{11}(y,\eta)}{\partial y^{n+1}} y^{i\alpha+n} dy, \quad (\mathrm{Jm}\alpha < 0) \qquad (7)$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция, $\overline{\varphi_1^-}(\alpha)$ и $\overline{g_1^+}(\alpha)$ являются трансформантами Фурье функций $\varphi_1^-(u)=\varphi^-(e^u)$, $g_1^+(u)=-ig^+(e^u)$ соответственно.

Решение функционального уравнения построим следующим образом: для этого $\overline{K}(\alpha)$ представим в виде

$$\overline{K}(\alpha)=\frac{\alpha}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1+i\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-i\frac{\alpha}{2}\right)}\,G(\alpha)$$

где

$$\frac{\mathrm{ch}\pi\alpha-1}{\mathrm{sh}\pi\alpha}=\frac{\alpha}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1+i\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-i\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad G(\alpha)=\frac{\mathrm{ch}\pi\alpha-A(\alpha+i)^2-B}{\mathrm{ch}\pi\alpha-1}$$

далее факторизуем $\overline{K}(\alpha)$, записав в виде

$$\overline{K}(\alpha)=\overline{K}^+(\alpha)\,\overline{K}^-(\alpha), \quad -1<\mathrm{Jm}\alpha<-\nu$$

где

$$\overline{K}^+(\alpha)=\overline{M}^+(\alpha)[\overline{L}^+(\alpha)]^{-1}, \quad \overline{K}^-(\alpha)=\overline{M}^-(\alpha)\,\overline{L}^-(\alpha)$$

$$\overline{M}^+(\alpha)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1-i\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad \overline{M}^-(\alpha)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1+i\frac{\alpha}{2}\right)}\,\frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{L}^-(\alpha)=\exp[\overline{R}^-(\alpha)], \quad \overline{L}^+(\alpha)=\exp[-\overline{R}^+(\alpha)] \qquad (8)$$

$$R(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\overline{R}(\alpha)\exp(-i\alpha u)\,d\alpha \quad (-1<\tau<-\nu)$$

$$\overline{R}(\alpha)=\overline{R}^+(\alpha)+\overline{R}^-(\alpha)=\ln G(\alpha)$$

$$\overline{R}^+(\alpha)=\int\limits_0^\infty R(u)\exp(i\alpha u)\,du, \quad \overline{R}^-(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^0 R(u)\exp(i\alpha u)\,du$$

$\overline{K}^+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\mathrm{Jm}\alpha>-1$, $\overline{K}^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\mathrm{Jm}\alpha<-\nu$. Причем при $|\alpha|\to\infty$ $\overline{K}^+(\alpha)\sim\alpha^{-\frac{1}{2}}$, $\overline{K}^-(\alpha)\sim\alpha^{\frac{1}{2}}$ в своих областях регулярности.

Далее, поступая аналогично тому, что делается при решении функционалыных уравнений аналогичного типа [2], его можно записать в виде

$$\overline{L}_1^-(\alpha)=\overline{\varphi}_1^-(\alpha)\overline{K}^-(\alpha)+\lambda_1\overline{\Phi}^-(\alpha)+\overline{F}^-(\alpha)+\frac{\lambda_1 P}{a}\frac{[\overline{K}^+(0)]^{-1}}{\alpha}+$$

$$+\frac{f_0[\overline{K}^+(0)]^{-1}}{\alpha}=\overline{g}_1^+(\alpha)[\overline{K}^+(\alpha)]^{-1}-\frac{\lambda_1 Q}{a}\frac{[(\overline{K}^+(\alpha))^{-1}-(\overline{K}^+(0))^{-1}]}{\alpha}-$$

$$-\lambda_1\overline{\Phi}^+(\alpha)-\overline{F}^+(\alpha)=\overline{L}_2^+(\alpha),\ (-1<\mathrm{Im}\,\alpha<-\nu) \tag{9}$$

где

$$\overline{\Phi}(\alpha)=\overline{\Phi}^+(\alpha)+\overline{\Phi}^-(\alpha),\quad \overline{F}(\alpha)=\overline{F}^+(\alpha)+\overline{F}^-(\alpha)$$

$$\overline{\Phi}(\alpha)=\frac{[\overline{K}^+(\alpha)]^{-1}\overline{\varphi}_1^-(\alpha-i)-[\overline{K}^-(0)]^{-1}\overline{\varphi}_1^-(-i)}{\alpha},\quad \overline{\varphi}_1^-(-i)=\frac{P-Q}{a}$$

$$\overline{F}(\alpha)=\frac{\alpha[\overline{K}^+(\alpha)]^{-1}\overline{f}(\alpha)-[\overline{K}^-(0)]^{-1}f_0}{\alpha},\quad f_0=\operatorname*{Res}_{\alpha=0}[\overline{f}^-(\alpha)]$$

$$\Phi(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\overline{\Phi}(\alpha)\exp(-i\alpha u)d\alpha,\quad F(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\overline{F}(\alpha)\exp(-i\alpha u)d\alpha$$

$$\overline{\Phi}^+(\alpha)=\int\limits_0^\infty\Phi(u)\exp(i\alpha u)du,\quad \overline{F}^+(\alpha)=\int\limits_0^\infty F(u)\exp(i\alpha u)du$$

$$\overline{\Phi}^-(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^0\Phi(u)\exp(i\alpha u)du,\quad \overline{F}^-(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^0 F(u)\exp(i\alpha u)du$$

Заметим, что при $|\alpha|\to\infty$ $\overline{\varphi}_1^-(\alpha)\sim\alpha^{-\frac{1}{2}}$, $\overline{g}_1^+(\alpha)\sim\alpha^{-\frac{1}{2}}$ в своих областях регулярности, поскольку функции $\varphi_1^-(v)$, $g_1^+(v)$ при $v\to\mp 0$ имеют корневую особенность. Тогда очевидно, что $\Phi(\sigma)\sim|\sigma|^{-1}$ при $|\sigma|\to\infty$, $\alpha=\sigma+i\tau$, и следовательно, $\Phi(u)\sim\ln|u|$ при $u\to 0$. Из этого непосредственно следует, что функции $\overline{\Phi}^\pm(\alpha)$ при $|\alpha|\to\infty$ имеют порядок $\frac{\ln\alpha}{\alpha}$ в своих областях регулярности. Далее, так как $\overline{F}(\sigma)\sim\sigma_+^{-\frac{1}{2}}-i\sigma_-^{-\frac{1}{2}}$ $(\sigma_\pm^\lambda=\theta(\pm\sigma)\sigma^\lambda)$ при $|\sigma|\to\infty$, то $F(u)\sim u_+^{-\frac{1}{2}}$ при $u\to\pm 0$. Это говорит о том, что $\overline{F}^+(\alpha)\sim\alpha^{-\frac{1}{2}}$, а $\overline{F}^-(\alpha)\sim\alpha^{-1}$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности.

Из вышесказанного следует, что функции $\overline{L}_1^+(\alpha)$ и $\overline{L}_2^-(\alpha)$ принимают конечные значения в полосе $-1<\mathrm{Jm}\alpha<-\nu$ при $|\alpha|\to\infty$.

Теперь, применив к (9) обратное преобразование Фурье, получим

$L_1^-(v)=L_2^+(v)$, $L_1^-(v)=0$ при $v>0$, $L_2^+(v)=0$ при $v<0$. Но это равенство может иметь место лишь только тогда, когда $L_1^-(v)$ и $L_2^+(v)$ будут функциями, сосредоточенными в нуле. Следовательно [3],

$$L_1^-(v)=L_2^+(v)=\sum_{k=0}^{n-1} a_k\delta^{(k)}(v), \quad \delta^{(k)}(v)=\frac{d^k}{dv^k}\delta(v)$$

Применив к $L_1^-(v)$, $L_2^+(v)$ преобразование Фурье, будем иметь

$$\overline{L}_1^-(\alpha)=\overline{L}_2^+(\alpha)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k(-i\alpha)^k, \quad -1<\mathrm{Jm}\,\alpha<-\gamma$$

Отсюда, имея в виду, что $\overline{L}_1^-(\alpha)\sim 0(1)$, $\overline{L}_2^+(\alpha)\sim 0(1)$ при $|\alpha|\to\infty$ в полосе $-1<\mathrm{Jm}\,\alpha<-\gamma$, получим $\overline{L}_1^-(\alpha)=\overline{L}_2^+(\alpha)=a_0$. Тогда из (9) получим

$$\overline{\varphi}_1^-(\alpha)=\frac{a_0}{\overline{K}^-(\alpha)}-\lambda_1\frac{\overline{\Phi}^-(\alpha)}{\overline{K}^-(\alpha)}-\frac{\overline{F}^-(\alpha)}{\overline{K}^-(\alpha)}-\frac{\lambda_1 Pa^{-1}+f_0}{\overline{K}^+(0)\overline{K}^-(\alpha)\alpha} \tag{10}$$

$$\overline{g}_1^+(\alpha)=a_0\overline{K}^+(\alpha)+\lambda_1\frac{Q}{a}\cdot\frac{\overline{K}^+(\alpha)-\overline{K}^+(0)}{\overline{K}^+(0)\alpha}+\lambda_1\overline{K}^+(\alpha)\overline{\Phi}^+(\alpha)+\overline{K}^+(\alpha)\overline{F}^+(\alpha)$$

Если в (10) положить $\overline{F}^-(\alpha)\equiv 0$, $f_0=0$, получим выражение $\overline{\varphi}_1^-(\alpha)$ той задачи, в которой рассматривается полубесконечная пластина с выходящим на границу стрингером (задача Рейснера) [1,4].

Далее, не останавливаясь на подробностях, отметим, что после вычисления интегралов (8), функции $\overline{K}^+(\alpha)$, $\overline{K}^-(\alpha)$ будут даваться в виде бесконечных произведений

$$\overline{K}^+(\alpha)=\exp(-\overline{R}^+(0))\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2i}\right)^2}{\Gamma\left(1-i\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\alpha_1+2i}\right)}\prod_{k=2}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{\alpha}{2ki}\right)^2}{\left(1+\frac{\alpha}{\alpha_k+2i}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\overline{\alpha}_k-2i}\right)}$$

$$\overline{K}^-(\alpha)=-\frac{1}{2}\exp(\overline{R}^-(-i))\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha+i}{\alpha_1+i}\right)}{\Gamma\left(1+i\frac{\alpha}{2}\right)\alpha\left(1-\frac{\alpha+i}{3i}\right)^2}\times$$

$$\times\prod_{k=2}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{\alpha+i}{\alpha_k+i}\right)\left(1+\frac{\alpha+i}{\overline{\alpha}_k-i}\right)}{\left(1-\frac{\alpha+i}{(2k+1)i}\right)^2} \tag{11}$$

где α_k, $-\overline{\alpha}_k$ являются нулями функции $K(\alpha)$, расположенными в порядке $0<\mathrm{Jm}\,\alpha_k<\mathrm{Jm}\,\alpha_{k+1}$ и $\mathrm{Re}\,\alpha_k>0$ $(k=2,3,\ldots)$, а $\overline{\alpha}_k$ — число, сопряженное к α_k. Причем,

$$\alpha_k=(2k-3)i+\frac{2}{\pi}\ln[\sqrt{2A}(2k-3)] \text{ при } k\to\infty$$

Отметим, что при получении (10) имелось в виду представление [5]

$$\frac{G(\alpha)}{G(-i)}=-\frac{4}{\pi^2\alpha^2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left[1-\frac{(\alpha+i)^2}{(\alpha_k+i)^2}\right]\left[1-\frac{(\alpha+i)^2}{(\bar{\alpha}_k-i)^2}\right]}{\left(1+\frac{\alpha^2}{4k^2}\right)^2}$$

Функции $\bar{\varphi}_1^-(\alpha)$, $\bar{F}^-(\alpha)$, $\bar{\Phi}^-(\alpha)$ регулярны при $\operatorname{Jm}\alpha<-\nu$, аналитическое продолжение функции $\bar{F}^-(\alpha)$, как следует из (7), имеет простые полюса в точках $\alpha=in$ $(n=1,2,\ldots)$, а функции $\bar{\varphi}_1^-(\alpha)$ — в точках $\alpha_1=-i\nu$, $\alpha=\alpha_1+in$, $\alpha=\alpha_k+in$, $\alpha=-\bar{\alpha}_k+in$ $(n=0,1,2,\ldots,$ $k=2,3,\ldots)$, в котором нетрудно убедиться, обсуждая функциональное уравнение (6). Функция $\bar{\Phi}^-(\alpha)$ имеет полюса в тех точках, что и $\bar{\varphi}_1^-(\alpha)$ кроме точек $\alpha=\alpha_1$, $\alpha=\alpha_k$, $\alpha=-\bar{\alpha}_k$.

Из вышесказанного следует, что функции $\varphi(ay)$, $\bar{F}^-(\alpha)$ и $\bar{\Phi}^-(\alpha)$ имеют следующие представления:

$$\varphi(ay)=i\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda_1)^n b_{nm}y^{n-i\alpha_m}\right)m^{-\varepsilon}X_m+\right.\tag{12}$$

$$\left.+\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda_1)^n\bar{b}_{nm}y^{n+i\bar{\alpha}_k}\right)m^{-\varepsilon}Y_m\right]$$

$$\bar{\Phi}^-(\alpha)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_1)^n(\bar{K}^+(\alpha_m+in+i))^{-1}b_{nm}}{(\alpha-\alpha_m-in-i)(\alpha_m+in+i)}\right)m^{-\varepsilon}X_m+\right.\tag{13}$$

$$\left.+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_1)^n(\bar{K}^+(-\bar{\alpha}_m+in+i))^{-1}\bar{b}_{nm}}{(\alpha+\bar{\alpha}_m-in-i)(-\bar{\alpha}_m+in+i)}\right)m^{-\varepsilon}Y_m\right]$$

$$\bar{F}^-(\alpha)=\sum_{m=1}^{\infty}I_{\alpha m}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\gamma_0+\eta}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0+\eta}\right)^m\psi(\eta)d\eta\tag{14}$$

где

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0+\eta}<1,\quad I_{\alpha m}=\frac{1-(-1)^m[B-A(m+1)^2]}{\pi\bar{K}^+(im)(\alpha-im)}$$

$$m^{-\varepsilon}X_m=\operatorname*{Res}_{\alpha=\alpha_m}\bar{\varphi}_1^-(\alpha),\quad m^{-\varepsilon}Y_m=\operatorname*{Res}_{\alpha=-\bar{\alpha}_m}\bar{\varphi}_1^-(\alpha),\quad 0<\varepsilon<\frac{1}{2}$$

$$(-\lambda_1)^n b_{nm}m^{-\varepsilon}X_m=\operatorname*{Res}_{\alpha=\alpha_m+in}\bar{\varphi}_1^-(\alpha),\quad(-\lambda_1)^n\bar{b}_{nm}m^{-\varepsilon}Y_m=\operatorname*{Res}_{\alpha=-\bar{\alpha}_m+in}\bar{\varphi}_1^-(\alpha)$$

$$b_{nm}=\prod_{\rho=1}^{n}\frac{1}{(\alpha_m+i\rho)K(\alpha_m+i\rho)},\quad\bar{b}_{nm}=\prod_{\rho=1}^{n}\frac{1}{(-\bar{\alpha}_m+i\rho)K(-\bar{\alpha}_m+i\rho)}$$

$$b_{om}=\bar{b}_{om}=1$$

Выше имелось в виду, что

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=im} \overline{K}_{11}^{-}(\alpha,\eta) = -\frac{i}{m!}\frac{\partial^m K_{11}(y,\eta)}{\partial y^m}\bigg|_{y=0}$$

Кроме того, полагалось, что все α_k комплексны. В случае мнимого α_k надо в выражениях (12), (13), (14) поставить $Y_k = 0$.

Теперь, имея в виду (13), (14), из (10) легко получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$X_k + \frac{\lambda_1 k \overline{K}^{+}(\alpha_k)}{K'(\alpha_k)} \sum_{m=1}^{\infty}\left(R_{km}^{(1)} X_m + R_{km}^{(2)} Y_m\right) + \frac{k \overline{F}^{-}(\alpha_k)\overline{K}^{+}(\alpha_k)}{K(\alpha_k)} =$$

$$= \frac{a_0 k \overline{K}^{+}(\alpha_k)}{K'(\alpha_k)} - \frac{(\lambda_1 P a^{-1} + f_0)\overline{K}^{+}(\alpha_k) k}{\overline{K}^{+}(0) K'(\alpha_k)\alpha_k}$$

$$Y_k + \frac{\lambda_1 k \overline{K}^{+}(-\overline{\alpha}_k)}{K'(-\overline{\alpha}_k)} \sum_{m=1}^{\infty}\left(\overline{R}_{km}^{(1)} X_m + \overline{R}_{km}^{(2)} Y_m\right) + \frac{k \overline{F}^{-}(-\overline{\alpha}_k)\overline{K}^{+}(-\overline{\alpha}_k)}{K'(-\overline{\alpha}_k)} =$$

$$= \frac{a_0 k \overline{K}^{+}(-\overline{\alpha}_k)}{K'(-\overline{\alpha}_k)} + \frac{(\lambda_1 P a^{-1} + f_0)\overline{K}^{-}(-\overline{\alpha}_k) k}{\overline{K}^{+}(0) K'(-\overline{\alpha}_k)\overline{\alpha}_k}$$

где

$$R_{km}^{(1)} = m^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_1)^n(\overline{K}^{+}(\alpha_m + in + i))^{-1} b_{nm}}{(\alpha_k - \alpha_m - in - i)(\alpha_m + in + i)}$$

$$R_{km}^{(2)} = m^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1)^n(\overline{K}^{+}(-\overline{\alpha}_m + in + i))^{-1} \overline{b}_{nm}}{(\alpha_k + \overline{\alpha}_m - in - i)(-\overline{\alpha}_m + in + i)}$$

$$\overline{R}_{km}^{(1)} = -m^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_1)^n(\overline{K}^{+}(\alpha_m + in + i))^{-1} b_{nm}}{(\overline{\alpha}_k + \alpha_m + in + i)(\alpha_m + in + i)}$$

$$\overline{R}_{km}^{(2)} = -m^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_1)^n(\overline{K}^{+}(-\overline{\alpha}_m + in + i))^{-1} b_{nm}}{(\overline{\alpha}_k - \overline{\alpha}_m + in + i)(-\overline{\alpha}_m + in + i)}$$

Далее функцию $\psi(y)$ ищем в виде [6, 7]

$$\psi(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(y)$$

где $T_n(y) = \cos(n\arccos y)$ — многочлены Чебышева первого рода. Подставив эту функцию в выражения $\overline{F}^{-}(\alpha_k)$, $\overline{F}^{-}(-\overline{\alpha}_k)$ и в (4), в итоге получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n U_{n-1}(y) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\int_y^1 \frac{T_n(\eta)\lambda_2}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K_{21}(y,\eta)\frac{T_n(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta\right] -$$

(15)

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda_1)^n b_{nm}\frac{1}{\pi}\int_{\gamma}^{1}K_{22}(y,\eta)\eta^{n-i\alpha_m}d\eta\right)m^{-1}X_m+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda_1)^n\bar{b}_{nm}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}K_{21}(y,\eta)\eta^{n+i\bar{\alpha}_m}d\eta\right)m^{-1}Y_m\right]=$$

$$=A_0\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{21}(y,\eta)\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}-\lambda_2\arccos y\right),\quad(-1<y<1)$$

$$X_k+\lambda_1\frac{\overline{K}^+(\alpha_k)k^{\cdot}}{K'(\alpha_k)}\sum_{m=1}^{\infty}(R_{km}^{(1)}X_m+R_{km}^{(2)}Y_m)+ \tag{16}$$

$$+\frac{\overline{K}^+(\alpha_k)k^{\cdot}}{K'(\alpha_k)}\sum_{n=1}^{\infty}L_{kn}A_n=\frac{a_0k^{\cdot}\overline{K}^+(\alpha_k)}{K'(\alpha_k)}-$$

$$-\frac{(\lambda_1Pa^{-1}+f_0)\overline{K}^+(\alpha_k)k^{\cdot}}{\overline{K}^+(0)K'(\alpha_k)\alpha_k}-\frac{k^{\cdot}L_{k0}A_0\overline{K}^+(\alpha_k)}{K'(\alpha_k)}$$

$$Y_k+\lambda_1\frac{\overline{K}^+(-\bar{\alpha}_k)k^{\cdot}}{K'(-\bar{\alpha}_k)}\sum_{m=1}^{\infty}(\bar{R}_{km}^{(1)}X_m+\bar{R}_{km}^{(2)}Y_m)+$$

$$+\frac{\overline{K}^+(-\bar{\alpha}_k)k^{\cdot}}{K'(-\bar{\alpha}_k)}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{L}_{kn}A_n=\frac{a_0k^{\cdot}\overline{K}^+(-\bar{\alpha}_k)}{K'(-\bar{\alpha}_k)}+ \tag{17}$$

$$+\frac{(\lambda_1Pa^{-1}+f_0)\overline{K}^+(-\bar{\alpha}_k)k^{\cdot}}{\overline{K}^+(0)K'(-\bar{\alpha}_k)\bar{\alpha}_k}-\frac{k^{\cdot}L_{k0}\overline{K}^+(-\bar{\alpha}_k)A_0}{K'(-\bar{\alpha}_k)}$$

где $U_{n-1}(x)=\sin(n\arccos x)/\sin(\arccos x)$ — многочлены Чебышева второго рода,

$$L_{k0}=\sum_{m=1}^{\infty}I_{\alpha_k m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\gamma_0+\eta}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0+\eta}\right)^m\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$$

$$L_{k1}=\sum_{m=1}^{\infty}I_{\alpha_k m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\gamma_0+\eta}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0+\eta}\right)^m\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}d\eta$$

$$L_{kn}=-\frac{1}{2n(n-1)}\sum_{m=1}^{\infty}I_{\alpha_k m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d^2}{d\eta^2}\left[\frac{1}{\gamma_0+\eta}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0+\eta}\right)^m\right]\sqrt{1-\eta^2}U_{n-1}(\eta)d\eta-$$

$$-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{m=1}^{\infty}I_{\alpha_k m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d^2}{d\eta^2}\left[\frac{1}{\gamma_0+\eta}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0+\eta}\right)^m\right]\sqrt{1-\eta^2}U_{n+1}(\eta)d\eta$$

а выражение $\bar{L}_{kn}$ получается из L_{kn}, если в них вместо $I_{\alpha_k m}$ положить $I_{-\bar{\alpha}_k m}$.

Отметим, что выше была использована формула [8]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{s-x}\frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = U_{n-1}(x) \quad (-1<x<1)$$

Умножив обе части равенства (15) на $\sqrt{1-y^2}\,U_{k-1}(y)$, при этом имея в виду ортогональность функций $U_{k-1}(y)$ с весом $\sqrt{1-y^2}$, и интегрировав в пределах $-1<y<1$, окончательно получим искомую совокупность бесконечных систем линейных уравнений следующего вида.

$$A_k + \sum_{n=1}^{\infty} B_{kn}A_n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(B^{(1)}_{kn}X_n + B^{(2)}_{kn}Y_n\right) = A_0\gamma_k \tag{18}$$

$$X_k + \nu_1\frac{\bar{K}^{+}(\alpha_k)k^{\prime}}{K^{\prime}(\alpha_k)}\sum_{m=1}^{\infty}\left(R^{(1)}_{km}X_m + R^{(2)}_{km}Y_m\right) +$$

$$+\frac{\bar{K}^{+}(\alpha_k)k^{\prime}}{K^{\prime}(\alpha_k)}\sum_{n=1}^{\infty}L_{kn}A_n = \frac{a_0k^{\prime}\bar{K}^{+}(\alpha_k)}{K^{\prime}(\alpha_k)} -$$

$$-\frac{(\nu_1Pa^{-1}+f_0)\bar{K}^{+}(\alpha_k)k^{\prime}}{\bar{K}^{+}(0)K^{\prime}(\alpha_k)\alpha_k} - \frac{k^{\prime}L_{k0}A_0\bar{K}^{+}(\alpha_k)}{K^{\prime}(\alpha_k)} \tag{19}$$

$$Y_k + \nu_1\frac{k^{\prime}\bar{K}^{+}(-\bar{\alpha}_k)}{K^{\prime}(-\bar{\alpha}_k)}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\bar{R}^{(1)}_{km}X_m + \bar{R}^{(2)}_{km}Y_m\right) +$$

$$+\frac{\bar{K}^{+}(-\bar{\alpha}_k)k^{\prime}}{K^{\prime}(-\bar{\alpha}_k)}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{L}_{kn}A_n = \frac{a_0k^{\prime}\bar{K}^{+}(-\bar{\alpha}_k)}{K^{\prime}(-\bar{\alpha}_k)} + \tag{20}$$

$$+\frac{(\nu_1Pa^{-1}+f_0)\bar{K}^{+}(-\bar{\alpha}_k)k^{\prime}}{\bar{K}^{+}(0)K^{\prime}(-\bar{\alpha}_k)\bar{\alpha}_k} - \frac{k^{\prime}L_{k0}A_0\bar{K}^{+}(-\bar{\alpha}_k)}{K^{\prime}(-\bar{\alpha}_k)}$$

где

$$\gamma_k = \frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}K_{21}(y,\eta)\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} - \pi\nu_2\arccos y\right]\sqrt{1-y^2}\,U_{k-1}(y)\,dy$$

$$B_{kn} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\int_{y}^{1}\frac{T_n(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta\,\nu_2 - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{K_{21}(y,\eta)T_n(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}\right]\sqrt{1-y^2}\,U_{k-1}(y)\,dy$$

$$B^{(2)}_{kn} = \frac{\gamma_k}{n(1+i\tau_n)} - B^{(2)}_{kn0} + \sum_{m=1}^{\infty}B^{(2)}_{knm},\quad B^{(1)}_{kn} = \frac{\gamma_k}{n(1-i\tau_n)} - B^{(1)}_{kn0} + \sum_{m=1}^{\infty}B^{(1)}_{knm}$$

$$B^{(1)}_{kn0}=\frac{1}{\pi n^2(1-i\alpha_n)}\left[\frac{1}{k-1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\frac{\partial^2 K_{22}(y,\eta)}{\partial y\partial\eta}\eta^{1-i\alpha_n}d\eta\sqrt{1-y^2}\,U_{k-2}(y)dy-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{k+1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\frac{\partial^2 K_{22}(y,\eta)}{\partial y\partial\eta}\eta^{1-i\alpha_n}d\eta\sqrt{1-y^2}\,U_{k+1}(y)\,dy\right]$$

$$\varphi_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{22}(1,y)\sqrt{1-y^2}\;U_{k-1}(y)dy$$

$$B^{(1)}_{knm}=\frac{(-\gamma_1)^m b_{mn}}{\pi n^2}\left[\frac{1}{k-1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial y}K_{22}(y,\eta)\eta^{m-i\alpha_n}d\eta\sqrt{1-y^2}\,U_{k-2}(y)dy-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{k+1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial y}K_{22}(y,\eta)\eta^{m-i\alpha_n}d\eta\sqrt{1-y^2}\,U_{k+1}(y)dy\right]$$

а выражение для $B^{(2)}_{kn0}$ получится из $B^{(1)}_{kn0}$, если в нем вместо α_n положить $-\bar{\alpha}_n$, а для $B^{(2)}_{knm}$ — если в $B^{(1)}_{knm}$ вместо α_n положить $-\bar{\alpha}_n$, а вместо b_{mn} — $\bar{b}_{mn}$.

Заметим, что если в (16) и (17) положить $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}=0$, то полученная совокупность бесконечных систем будет соответствовать задаче, когда стрингер на участке (b,c) отсутствует [9].

В случае мнимого корня α_j надо положить в (18), (19) $Y_j=0$ и не рассматривать (20) при $k=j$.

Ввиду того, что имеют место оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|B^{(1)}_{kn0}\right|<\frac{c_1}{k},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|B^{(1)}_{knm}\right|<\frac{c_2}{k}\qquad \text{при } k\to\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|B_{kn}\right|<\frac{c_3}{\sqrt{k}},\quad \left|K^{+}(\alpha_k)\,/\,K'(\alpha_k)\right|<\frac{c_4}{|\alpha_k|^{1/2}}\qquad \text{при } k\to\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|L_{kn}\right|<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|R^{(1)}_{kn}\right|<\infty,\ \alpha_k\to 0\quad \text{при } k\to\infty$$

для обсуждаемой совокупности бесконечных систем алгебраических уравнений следует их квазиполная регулярность.

Постоянные a_0, A_0 и f_0 определяются из условий (1)′ и из условия

$$f_0=-\frac{1-B-A}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\eta)\,d\eta}{\gamma_0+\eta}$$

Для полного представления о законе изменения $\tau(ay)$ при

$0 < y < 1$ помимо формулы (9), необходимо знать и асимптотическое поведение этой функции при $y \to 1$. Не вдаваясь в подробности, непосредственно приведем эту асимптотическую формулу

$$
\begin{aligned}
\varphi(ay) = {} & \frac{ia_0\sqrt{2}}{\sqrt{-\ln y}} + K_0\sqrt{-\ln y} + \frac{ia_0\sqrt{2}}{\Gamma(3/2)}\left(\frac{1}{6} + R_0 + \frac{\lambda_1}{\pi}\right)\sqrt{-\ln y} + \\
& + \frac{\sqrt{2}\lambda_1\overline{\varphi}_1(-i)}{\Gamma(3/2)\overline{K}^{+}(0)}\sqrt{-\ln y} + \frac{i\lambda_1 a_0\sqrt{2}}{\pi^2}\Big[\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) + \Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right) - \\
& - \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\ln(-\lambda_1 \ln y)\Big]\sqrt{-\ln y} + O(\ln y), \quad \text{при } y \to 1
\end{aligned}
$$

где

$$
R_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln\left(\frac{\operatorname{ch}\pi\sigma + A\sigma^2 + B}{\operatorname{ch}\pi\sigma + 1}\right)d\sigma, \quad K_0 = \frac{4}{\pi\sqrt{2\pi}\,K^{+}(0)}\int_{-1}^{1} K_{11}(1,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta.
$$

CONTACT PROBLEM FOR SEMI-INFINITE PLATES STRENGTHENED WITH TWO FINITE STRINGERS

P. V. AGABEKIAN, E. KH. GRIGORIAN

ԵՐԿՈՒ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Պ. Վ. ԱՂԱԲԵԿՅԱՆ, Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է երկու վերջավոր վերադիրներով ուժեղացված կիսաանվերջ սալի համար կոնտակտային խնդիր։ Վերադիրներից մեկը դուրս է գալիս սալի եզր և դեֆորմացվում է վերադիրի ծայրերում կիրառված ուժերի ազդեցության տակ։ Վերադիրները ուղղահայաց են սալի եզրին և գտնվում են մի գծի վրա։ Վերադիրների առաձգականության մոդուլները տարբեր են։

Ֆակտորիզացիայի և Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդների օգնությամբ խնդիրը բերված է հանրահաշվական հավասարումների քվազիլիովին ռեգուլյար անվերջ համակարգի։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Муки Р., Стернберг Э.* Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке.—Тр. Амер. общ. инж.—механиков, 1963, сер. E, №4.
2. *Нобл Б.* Метод Винера-Хопфа.—М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
3. Функциональный анализ: Гл. редакция физ-мат. литературы, М.: 1972. 467 с.
4. *Григорян Э. Х.* Об одной задаче для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение.—Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1982, №2.

5. *Григорян Э. Х.* Решение задачи упругого конечного включения, выходящего на границу полуплоскости.—Уч. записки ЕГУ, естеств. науки, 1981, № 3.
6. *Arutunyan N. Kh., Mkhitaryan S. M.* Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity. Witold. Nowacki Anniversary Volume, roningen, Wolters-Noordhoft publishing, 1971.
7. *Саркисян В. С.* Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками.—Ереван, Изд. Госуниверситета, 1983.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1962.
9. *Григорян Э. Х.* Об одном подходе к решению задач для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходящее на границу полуплоскости.—Межвузовской сб. научн. тр., Механика, Ереван, вып. 6, 1987.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
21.IX.1988