ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 5, 1989 Механика

УДК 532.529:533.6.011.34

# СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЗВУКОВОГО ПОТОКА ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ ПРИ КВАЗИИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ

ОГАНЯН Г. Г.

В работах [1—3] получены асимптотические законы затухания возмущений, вносимых тонкими телами вращения в равномерный звуковой поток вязкого теплопроводящего газа. Подобные задачи для течений газожидкостной смеси не рассматривались.

Особенностью газожидкостной смеси является интенсивный теплообмен между газовыми пузырьками и окружающей их жидкостью. Количество тепла, переходящего от пузырька в жидкость, прямо пропорционально их разности температур, при этом жидкая фаза с точки зрения термодинамики играет роль термостата. В монографиях [4, 5] на основе экспериментальных данных, например, [6], отмечено, что главным диссипативным механизмом может явиться тепловая релаксация.

В настоящей работе на основе односкоростной модели газожидкостной смеси, температуры фаз которой различны, выводятся двумерные нелинейные упрощенные уравнения и приводится их частичная классификация. Полученные уравнения типа коротких волн описывают стационарные течения смеси, в которых термодинамическое поведение пузырьков близко к изотермическому. Показано, что влияние тепловой релаксации на вид уравнений эквивалентно наличию второй вязкости. Приводится математическая аналогия между течениями рассматриваемой смеси и реального газа. В частности, когда структура потока смеси формируется под воздействием лишь эффектов сжимаемости и вязкости, решена задача обтекания профиля (плоская задача). Найдено точное решение, представляющее возмущения, вносимые двумерным диполем в равномерный поток смеси, скорость которого на бесконечности равна изотермической скорости звука.

*1. Исходные уравнения.* Предположим, что в монодисперсной смеси жидкая и газовая фазы движутся с одинаковой скоростью, при этом несущая жидкость обладает эффектами сжимаемости и вязкости, а газовая фаза представляет собой пузырьки калорически совершенного газа. Ограничимся рассмотрением течений, где в смеси не происходит существенного пересжатия газовой фазы. Будем считать, что ввиду сильного влияния температуры на плотность газа теплообмен между пузырками и жидкостью определяется лишь тепловым сопротивлением газа и потому температуру жидкой фазы примем постоянной. Полагая, что дробление, столкновение, слипание пузырьков отсутствуют и не происходит их новых образований, уравнения стационарного движения газожидкостной смеси возьмем в виде [4, 5]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{r}{y}(\rho v)=0 \tag{1.1}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+r\frac{v}{y}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{r}{y}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{1.2}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+r\frac{v}{y}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{2r}{y}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{v}{y}\right) \tag{1.3}$$

$$P_2-P=L\equiv(1-\varphi_1)\rho_1R\left(u\frac{\partial L_1}{\partial x}+v\frac{\partial L_1}{\partial y}\right)+\frac{3}{2}(1-\varphi_2)\rho_1L_1^2+\frac{4\mu}{R}L_1-$$
$$-\frac{R}{a_1}\left[u\frac{\partial}{\partial x}\left(P_2-\frac{4\mu}{R}L_1\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(P_2-\frac{4\mu}{R}L_1\right)\right] \tag{1.4}$$

$$L_1\equiv u\frac{\partial R}{\partial x}+v\frac{\partial R}{\partial y},\quad P_2=c_{v2}(\gamma-1)\rho_2T_2,\quad \frac{\rho_2\beta}{\rho_1(1-\beta)}=\mathrm{const} \tag{1.5}$$

$$\rho_2R^3=\mathrm{const},\quad \rho=\rho_1(1-\beta)+\rho_2\beta,\quad P=P_1(1-\beta)+P_2\beta \tag{1.6}$$

$$u\frac{\partial P_2}{\partial x}+v\frac{\partial P_2}{\partial y}=-\frac{3\gamma P_2}{R}L_1-\frac{3(\gamma-1)k_2\mathrm{Nu}}{2R^2}(T_2-T_*) \tag{1.7}$$

$$\varphi_1=\frac{1{,}1\beta^{1/3}-\beta}{1-\beta},\quad \varphi_2=\frac{1{,}47\beta^{1/3}-1{,}33\beta}{1-\beta},\quad \mathrm{Nu}=\frac{R\sigma}{k_2}$$

Здесь $x, y$ — оси декартовой, либо цилиндрической системы координат, $u$ и $v$ — составляющие вектора скорости частиц смеси вдоль этих осей, $P$ — давление, $\rho$ — плотность, $T$ — температура, $\beta$ — объемное газосодержание, $R$ — радиус пузырька, $a$ — скорость звука, $\mu$ — динамический коэффициент вязкости, $k_2$ и $\sigma$ — коэффициенты теплопроводности и межфазного теплообмена, $\gamma=c_{p2}/c_{v2}$, $c_{p2}$ и $c_{v2}$ — удельные теплоемкости соответственно при постоянном давлении и объеме. Индексы „1" и „2" отнесены к параметрам течения соответственно жидкой и газовой фаз, а параметры, характеризующие течение всей смеси, индексов не имеют. Для плоскопаралельных течений — $r=0$, для течений с осевой симметрией — $r=1$. Поправочные коэффициенты $\varphi_1$, $\varphi_2$, впервые введенные в [4,7], учитывают конечность величины $\beta$ и неодиночность газового пузырька в безграничной жидкости.

Значения параметров смеси и фаз в невозмущенном состоянии отметим звездочкой, а характерную длину в направлении оси $x$ обозначим через $l$.

Предположим, что в рассматриваемой области течения значения всех параметров смеси и фаз мало отклоняются от соответствующих значений в набегающем равномерном установившемся потоке, направление которого близко к оси $x$. Будем считать, что скорости частиц смеси в каждой точке пространства мало отличаются по величине от изотермической скорости звука $a_{e_*}$. По аналогии с теорией трансзвуковых течений газа [1—3,8] введем новые независимые переменные

$$x = lx_1, \quad y = \frac{l}{\Delta} y_1 \tag{1.8}$$

где $\Delta$—безразмерный малый параметр. Отсюда видно, что поперечный размер возмущенной области намного превосходит продольный. При неравномерной роли координат $x$ и $y$ составляющие возмущенного вектора скорости вдоль них также будут иметь различные порядки величин

$$u = a_{e*}(1 + \varepsilon u'), \quad v = \varepsilon\Delta a_{e*} v' \tag{1.9}$$

Здесь $\varepsilon$—второй безразмерный малый параметр. Относительно возмущений скорости звука и остальных характерных параметров потока примем, что они имеют такой же порядок малости, что и продольная составляющая вектора возмущенной скорости:

$$P = P_*(1 + \varepsilon P'), \quad \rho = \rho_*( + \varepsilon\rho'), \quad R = R_*(1 + \varepsilon R'), \quad \beta = \beta_* + \varepsilon\beta',$$

$$a = a_{e*}(1 + \varepsilon a'), \quad \rho_i = \rho_{i*}(1 + \varepsilon\rho_i'), \quad P_i = P_{i*}(1 + \varepsilon P_i'), \quad i = 1,2 \tag{1.10}$$

Что касается возмущения температуры в газовом пузырьке, то, ввиду рассмотрения квазиизотермического процесса, полагаем, что оно имеет больший порядок малости

$$T_2 = T_*(1 + \varepsilon^2 T_2') \tag{1.11}$$

Согласно определению (1.6) плотности смеси, уравнение неразрывности (1.1) можно преобразовать к виду

$$\frac{1-\beta}{\rho_1}\left(u\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + v\frac{\partial\rho_1}{\partial y}\right) - \frac{3\beta}{R}\left(u\frac{\partial R}{\partial x} + v\frac{\partial R}{\partial y}\right) + \tag{1.12}$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + r\,\frac{v}{y} = 0$$

Исключив из уравнения (1.7) давление посредством соотношений (1.5), получим

$$u\left(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{3T_2}{R}\frac{\partial R}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial T_2}{\partial y} - \frac{3T_2}{R}\frac{\partial R}{\partial y}\right) =$$

$$= -\frac{3\gamma T_2}{R}\left(u\frac{\partial R}{\partial x}+v\frac{\partial R}{\partial y}\right)-\frac{3k_2\mathrm{Nu}}{2\rho_2 c_{p2}R^2}(T_2-T_*) \tag{1.13}$$

Для рассматриваемого близкого к изотермическому процесса распространения возмущений разложим функцию $P_1=P_1(\rho_1, T_1)$ в ряд Тейлора вблизи положения локального термодинамического равновесия жидкой фазы и учтем, что температура ее практически не меняется. Тогда

$$dP_1=a_1^2 d\rho_1, \quad a_1^2=\left(\frac{\partial P_1}{\partial \rho_1}\right)_{T_1} \tag{1.14}$$

Здесь $a_1$ — изотермическая скорость звука в жидкости.

Используя определение (1.6) давления смеси, а также уравнения (1.5) состояний газа и пузырька и формулу (1.14), стационарный вариант уравнения пульсации пузырька (1.4) запишем в виде

$$\frac{(1-\beta)P_2}{T_2}\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}-\frac{3T_2}{R}\frac{\partial R}{\partial x}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=(1-\beta)a_1^2\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+$$

$$+\beta(1-\beta)(P_2-P_1)\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\frac{3}{R}\frac{\partial R}{\partial x}\right) \tag{1.15}$$

Комбинирование первого из уравнений импульсов смеси (1.2) с (1.4) и уравнениями состояния (1.5), (1.6) дает

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{P_2}{T_2}\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}-\frac{3T_2}{R}\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\right. \tag{1.16}$$

$$\left.-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+r\frac{v}{y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{r}{y}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Искомое уравнение, описывающее стационарное течение газожидкостной смеси, должно быть выведено из упрощенной в порядке системы уравнений (1.12)—(1.16), в которой необходимо будет последовательно исключать члены порядка единицы. В дальнейшем, при упрощении уравнений, штрихи над безразмерными возмущениями параметров течения опускаются.

2. *Вывод определяющего уравнения.* Применяя преобразования (1.8)—(1.11) к уравнениям (1.1), (1.4), (1.15) и удерживая главные члены порядка единицы, находим

$$\rho=-u, \quad P=P_2=-\frac{\rho_* a_{e*}^2}{P_*}u, \quad R=\frac{\rho_* a_{e*}^2}{3P_*}u \tag{2.1}$$

Учитывая (2.1), аналогичным образом из проекции уравнения Навье-Стокса на ось $y$ (1.3) выводим соотношение

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}=\frac{\partial u}{\partial y_1} \tag{2.2}$$

означающее, что в рассматриваемом приближении в потоке газожидкостной смеси вихри отсутствуют, то есть течение—потенциальное.

В том же приближении упрощения соотношений (1.5), (1.6), уравнений (1.12), (1.13) и их последующие комбинации с формулами (2.1) дают

$$\rho_2 = -3R, \quad \rho_1 = \frac{1}{1-\beta_*}\left(\frac{\beta_*\rho_* a_{e_*}^2}{P_*} - 1\right)u, \quad \beta = \beta_*\left(\frac{\rho_* a_{e_*}^2}{P_*} - 1\right)u$$

$$T_2 = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{R_*^2}{l^2}\frac{2(\gamma-1)}{\gamma}\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Nu}}\frac{\partial R}{\partial x_1}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{l\,a_{e_*}}{\lambda_2}, \quad \lambda_2 = \frac{k_2}{\rho_{2_*} c_{p2}} \tag{2.3}$$

где Pe — число Пекле, $\lambda_2$ — коэффициент температуропроводности газа. При выводе формул (2.1) — (2.3) постоянные интегрирования равны нулю вследствие распространения возмущений по покоящейся в системе координат $(x_1, y_1)$ смеси. Здесь и далее примем, что порядки величин чисел Нуссельта и Пекле совпадают, так что их отношение есть величина порядка единицы.

В рассматриваемом приближении, разлагая $a_1 = a_1(\rho_1, T_1)$ в ряд Тейлора и оставляя главные члены, нетрудно получить

$$a_1 = (m-1)\rho_1, \quad m = \frac{1}{a_{1*}}\left[\frac{\partial}{\partial\rho_1}(\rho_1 a_1)\right]_* \tag{2.4}$$

Согласно определению изотермической скорости звука в смеси [9, 10], имеем

$$\frac{1}{a_{e*}^2} = \frac{(1-\beta_*)\rho_*}{\rho_{1*}\,a_{1*}^2} + \frac{\beta_*\rho_*}{P_*} \tag{2.5}$$

Теперь применим преобразования (1.8) — (1.11) к уравнениям (1.12), (1.15), (1.16) и при их упрощении оставим также члены первого порядка малости. Комбинируя получаемые уравнения друг с другом и учитывая формулу (2.5), исключим из рассмотрения члены порядка единицы. Далее, подставляя формулы (2.1) — (2.4) в итоговое уравнение, все члены которого имеют первый порядок малости, окончательно получим

$$\pm\alpha_e u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\Delta^2}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1} + r\frac{v}{y_1}\right) - \frac{R_*^2}{l^2}\gamma_e\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} = \tag{2.6}$$

$$= \left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\delta_e + \frac{R_*}{l}\frac{a_e}{a_{1*}}\delta_a + \frac{R_*^2}{l^2}\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Nu}}\delta_T\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \quad u_1 = \frac{u}{\beta_*}, \quad v_1 = \frac{v}{\beta_*}$$

$$\alpha_e = \left[1 - \frac{(1-\beta_*)\rho_* a_{e_*}^2}{\rho_{1_*} a_{1_*}^2}\right]^2 + m\frac{\beta_*(1-\beta_*)\rho_*^2 a_{e_*}^4}{\rho_{1_*}^2 a_{1_*}^4}, \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho_* l a_{e_*}}{\mu}$$

$$\delta_e = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{\rho_* a_{e_*}^2}{P_*}A_e, \quad \delta_a = \frac{1}{2}A_e, \quad \delta_T = \frac{\gamma-1}{3\gamma}\left[1 - \frac{(1-\beta_*)\rho_* a_{e_*}^2}{\rho_{1_*} a_{1_*}^2}\right]$$

$$A_e = \left(1 - \frac{P_*}{\rho_{1*} a_{1*}}\right)\left[1 - \frac{(1-\beta_*)\rho_* a^2_{e_*}}{\rho_{1*} a^2_{1_*}}\right], \quad \gamma_e = \frac{(1-\varphi_{1*})\rho_{1*} a^2_{e_*}}{6P_*} A_e$$

Система уравнений (2.6) и (2.2) полностью описывает квазиизотермический режим распространения возмущений в звуковом потоке газожидкостной смеси. Влияние проходящей в газовой фазе тепловой релаксации на процесс распространения аналогично воздействию второй (продольной) вязкости смеси. Такой вывод находится в полном соответствии с результатами [8, 11]. Подчеркнем, что порядки величин тепловой релаксации и дисперсии одинаковы (если, конечно, $\mathrm{Pe/Nu} \sim 1$).

Перейдем к частичной классификации возможных течений квазиизотермического трансзвукового потока газожидкостной смеси, связанной с эффектами дисперсии и тепловой релаксации.

1) Пусть в уравнении (2.6) все члены одного порядка, то есть $\sim \Delta^2 \sim 1/\mathrm{Re} \sim R^2_*/l^2 \sim R_* a_{e_*}/la_{1*}$. Полагая для простоты

$$\varepsilon\alpha_e = \frac{\Delta^2}{2}, \quad \frac{R^2_*}{l^2}\gamma_e = \frac{1}{Re}\delta_e + \frac{R_*}{l}\frac{a_{e_*}}{a_{1*}}\delta_a + \frac{R^2_*}{l^2}\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Nu}}\delta_T$$

приходим к уравнению

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + r\frac{v_1}{y_1}\right) - \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}$$

2) Если считать эффекты вязкости и сжимаемости малыми в сравнении с тепловой релаксацией ($1/\mathrm{Re} \sim R_* a_{e_*}/la_{1*} \ll \varepsilon \sim \Delta^2 \sim R^2_*/l^2$), то уравнение (2.6) снова примет предыдущий вид.

Отметим, что в квазиизотермических околозвуковых течениях в рассматриваемом приближении хотя и имеет место постоянство температуры в газовой фазе, вовсе пренебрегать теплообменом между пузырками и жидкостью нельзя.

3) Пренебрежение всеми эффектами диссипации, а следовательно и дисперсии, оправдано при $R^2_* l^2 \sim 1/\mathrm{Re} \sim R_* a_{e_*}/la_{1*} \ll \varepsilon \sim \Delta^2$, что приводит (2.6) к уравнению Кармана-Фальковича [1,8].

Пусть теперь $R^2_*/l^2 \ll 1/\mathrm{Re} \sim \varepsilon \sim \Delta^2 \sim R_* a_{e_*}/la_{1*}$. Подчиним безразмерные коэффициенты в (2.6) связям

$$\varepsilon\alpha_e = \frac{\Delta^2}{2} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\delta_e + \frac{R_*}{l}\frac{a_{e_*}}{a_{1*}}\delta_a$$

означающие, что формирование структуры потока смеси происходит под воздействием эффектов нелинейности, вязкости и сжимаемости. Уравнение (2.6) сведется к виду

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1} + r\frac{v_1}{y_1}\right) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \qquad (2.7)$$

совпадающему с уравнением из [2], где численно исследовалось влияние вязкости и теплопроводности на асимптотическую картину обтекания тонких тел вращения звуковым потоком реального газа.

5) Если же, наконец, принять $\varepsilon \sim R_*^2/l^2 \ll \Delta^2 \sim 1/\mathrm{Re} \sim R_* a_{c_*}/l a_{1_*}$ и для простоты полагать

$$\frac{\Delta^2}{2} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\delta_c + \frac{R_*}{l}\frac{a_{c_*}}{a_{1*}}\delta_a$$

то приходим к уравнению Рыжова [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial v}{\partial y_1} + r\frac{v}{y_1} = 0 \tag{2.8}$$

описывающему течение смеси, формирующегося, в основном, под воздействием эффектов вязкости и сжимаемости. В случае осесимметричного течения ($r=1$) оно применено в [1, 8] для исследований задач обтекания тонких тел вращения звуковыми потоками реального газа и химически активной многокомпонентной газовой смеси.

*3. Обтекание профиля.* В случае плоского течения ($r=0$) сформулируем для уравнений (2.8) и (2.2) внешнюю граничную задачу обтекания [12, 13]

при $|x_1| \to \infty$ для любых $y_1$ $\qquad u \to 0, \quad v \to 0$ (3.1)

при $y_1 \to 0$ $\qquad v \to 0$ (3.2)

Решение поставленной задачи будем искать в классе автомодельных функций. Предварительно обратимся к системе уравнений (2.7) и (2.2), искомые решения которых представим в виде

$$u_1 = y_1^{-n} f(\xi), \quad v = y_1^{-p} g(\xi), \quad \xi = x_1 y_1^{-s}$$

Аналогично [2], подставляя эти решения в систему и устремляя $y_1$ к бесконечности, оставляя $x_1$ конечным, найдем порядки убывания членов системы уравнений в зависимости от $y_1$

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \sim y_1^{-2n-s}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \sim y_1^{s-n-2}, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \sim y_1^{-n-2s}, \quad p = n+1-s$$

Исходя из приведенных оценок, уравнение (2.7) допускает автомодельное решение при $s=2/3$, $p=-(3n+1)/3$. Требования, при которых реализуется (2.8), приводят к системе неравенств $s > 1/2$, $n > 2-2s$, $n > s$. При полученном значении $s=2/3$ из этой системы следует $n > 2/3$. Таким образом, автомодельные решения уравнения Рыжова (2.8) можно представить как

$$u = y_1^{-n} f(\xi), \quad v = y_1^{-(3n+1)/3} g(\xi), \quad \xi = x_1 y_1^{-2/3}, \quad n > \frac{2}{3}$$

В плоском случае ($r=0$) функция $f(\xi)$ будет удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^3 f}{d\xi^3} + \frac{4}{9}\xi^2\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{12n+10}{9}\xi\frac{df}{d\xi} + n(n-1)f = 0 \tag{3.3}$$

после решения которого функция $g(\xi)$ определится из равенства

$$g=\frac{3}{3n+1}\left(\frac{d^2f}{d\xi^2}+\frac{4}{9}\xi^2\frac{df}{d\xi}+\frac{2n}{3}\xi f\right) \tag{3.4}$$

Можно показать, что асимптотическими разложениями трех линейно-независимых решений уравнения (3.3) являются:

$$f=b_1|\xi|^{-3n/2}\left[1+\frac{27}{16}n\left(n+\frac{2}{3}\right)\left(n+\frac{4}{3}\right)|\xi|^{-3}+o(|\xi|^{-6})\right] \tag{3.5}$$

$$f=b_2|\xi|^{-3n/2-3/2}\left[1-\frac{9}{8}(n+1)\left(n+\frac{5}{3}\right)\left(n+\frac{7}{3}\right)|\xi|^{-3}+o(|\xi|^{-6})\right] \tag{3.6}$$

$$f=b_3|\xi|^{-3n-3/2}\exp\left(-\frac{4}{27}\xi^3\right)\left[1-\frac{3(27n^2-45n+17)}{16}|\xi|^{-3}+o(|\xi|^{-6})\right] \tag{3.7}$$

где $b_1$, $b_2$, $b_3$ — произвольные константы.

Краевым условиям (3.1) и (3.2) полностью удовлетворяют решения (3.5) и (3.7), причем последнее непригодно при $\xi\to-\infty$. Решение (3.6) удовлетворяет краевым условиям (3.1), но не (3.2). Таким образом, аналогично [1, 8, 12], задача нахождения автомодельных решений уравнений (2.8), (2.2) сводится к задаче определения собственных значений уравнения (3.3). Требуется найти такие значения параметра $n$, при которых решение уравнения (3.3) определялось разложением (3.5), если $\xi\to-\infty$ и при $\xi\to\infty$ удовлетворяло условию

$$\frac{3n+1}{2}\xi^{(3n+1)/2}g(\xi)\to 0$$

Последнее условие эквивалентно требованию обращения в нуль постоянной $b_2$ в разложении (3.6). Весь спектр собственных значений приведен в [13], а именно: $n=(2N+1)/3$, $N=0, 1, 2, \ldots$ Для сформулированной задачи приемлемым первым собственным значением является $n=1$. Тогда уравнение (3.3) один раз интегрируется и после замен

$$f=\eta^{2/3}w(\eta), \quad \eta=-4\xi^3/27$$

приведется к канонической форме уравнения Куммера [14, 15]

$$\eta\frac{d^2w}{d\eta^2}+\left(\frac{4}{3}-\eta\right)\frac{dw}{d\eta}-\frac{7}{6}w=0$$

Используя стандартные обозначения вырожденных гипергеометрических функций (функций Куммера), напишем общее решение [15]

$$f=c_1\eta^{2/3}\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3},\eta\right)+c_2\eta^{1/3}\Phi\left(\frac{5}{6},\frac{2}{3},\eta\right) \tag{3.8}$$

Связь между постоянными $c_1$ и $c_2$ определим из условия стремления к нулю асимптотического представления функции $f$ при $\eta\to\infty$. Получим

$$c_2 = -\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} c_1 = -2\sqrt{3}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)} c_1$$

Учитывая полученную связь, формулу (3.8) перепишем в виде

$$f = c_1\eta^{2/3}\left[\Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \eta\right) - 2\sqrt{3}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}\eta^{-1/3}\,\Phi\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \eta\right)\right] \tag{3.9}$$

Решение в форме (3.9) удобно для выяснения асимптотического поведения функции $f$ при $\eta \to -\infty$. Используя асимптотическое представление функций Куммера, имеем

$$f = \frac{2}{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1(-\eta)^{-1/2} + \ldots = \sqrt{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1\xi^{-3/2} \tag{3.10}$$

Для нахождения асимптотики функции $f$ при $\eta \to \infty$ введем в рассмотрение функцию Трикоми [15]. Тогда

$$3\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)f(\eta) = -\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)c_1\eta^{2/3}\,\Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \eta\right)$$

Используя асимптотическое представление функций Трикоми при $\eta \to \infty$, находим

$$f = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1\eta^{-1/2} + \ldots = -\frac{3}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1(-\xi)^{-3/2} \tag{3.11}$$

Скомбинируем равенство (3.4) с полученным из (3.3) после однократного интегрирования уравнением для функции $f$ и далее перейдем к новой переменной $\eta$. Функция $g$ определится теперь из равенства

$$g(\eta) = 2^{1/3}\,\eta^{1/3}\left(\frac{df}{d\eta} - \frac{1}{3\eta}f\right)$$

Применяя правила дифференцирования к функциям Куммера и Трикоми, найдем точное выражение для функции $g$

$$g(\eta) = c_1 2^{1/3}\left[\frac{2}{3}\Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \eta\right) - \frac{1}{3}\Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{3}, \eta\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{5\sqrt{3}}{2}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}\eta^{2/3}\,\Phi\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}, \eta\right)\right] =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\, 2^{1/3} c_1 \left[ \frac{1}{3} \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \eta\right) - \frac{7}{6} \eta \Psi\left(\frac{13}{6}, \frac{7}{3}, \eta\right) \right]$$

Аналогично выводам формул (3.10) и (3.11) отсюда нетрудно получить асимптотические представления функции $g$ [14, 15] при $\eta \to -\infty$

$$g = \frac{7}{9} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} 2^{1/3} c_1 (-\eta)^{-7/6} + \ldots = \frac{21\sqrt{3}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 \xi^{-7/2}$$

при $\eta \to \infty$

$$g = \frac{5\sqrt{3}}{18} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} 2^{1/3} c_1 \eta^{-7/6} + \ldots = \frac{45}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 (-\xi)^{-7/2}$$

Соответствующие полученным формулам разложения продольной и поперечной составляющих вектора возмущенной скорости начинаются с членов

при $\xi \to -\infty$

$$u = -\frac{3}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 |x_1|^{-3/2} + \ldots, \quad v = \frac{45}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 |x_1|^{-7/2} y_1 + \ldots$$

при $\xi \to \infty$

$$u = \sqrt{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 x_1^{-3/2} + \ldots, \quad v = \frac{21\sqrt{3}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1 x_1^{-7/2} y_1 + \ldots$$

Построенное решение описывает возмущения, которые вносит находящийся в начале координат двумерный диполь в равномерный поток, скорость которого на бесконечности равна в точности изотермической скорости звука газожидкостной смеси. Действительно, для момента диполя имеем [16]

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 v \, dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi g(\xi) \, d\xi = -5\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} c_1$$

## STATIONARY SONIC FLOW OF GAS-FLUID MIXTURE UNDER QUASITHERMIC BEHAVIOUR OF GAS PHASE

G. G. OHANIAN

## ԳԱԶԱՀԵՂՈՒԿ ԽԱՌՆՈՒՐԴԻ ՁԱՅՆԱՅԻՆ ՀՈՍՔԻ ԱՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԳԱԶԱՅԻՆ ՓՈՒԼԻ ՔՎԱԶԻԻԶՈԹԵՐՄ ՎԱՐՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Գ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

### Ամփոփում

*Դուրս են բերված կարճ ալիքների տիպի երկչափ ոչ գծային հավասարումները: Ստացված հավասարումները նկարագրում են այնպիսի գազահեղուկ խառնուրդի ստացիոնար շարժումը, որի պղպջակների թերմոդինամիկական վարքը մոտ է իզոթերմին: Դիտարկվող մոտավորությունում քվազիիզոթերմ տրանսձայնային շարժման դեպքում ցույց է տրված, որ չնայած գազային փուլում ջերմաստիճանը մնում է անփոփոխ, այնուհանդերձ ջերմափոխանակությունը պղպջակների և նրանց շրջապատող հեղուկի միջև արհամարհել չի կարելի: Ջերմային ռելաքսացիայի ազդեցությունը հավասարումների տեսքի վրա համարժեք է երկրորդ (ընդլայնական) մածուցիկության առկայությանը:*

*Մասնավոր դեպքում, երբ գազահեղուկ խառնուրդի հոսանքի կառուցվածքը բնորոշվում է միայն մածուցիկության և սեղմելիության էֆեկտների առկայությամբ, լուծված է հարթ մարմինների շրջհոսման խնդիրը:*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С.* Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа.—ПММ, 1965, т. 29, №6, с. 1004—1011.
2. *Рыжов О. С., Шефтер Г. М.* О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений.—ПММ, 1964, т. 28, №6, с. 996—1007.
3. *Диесперов В. Н., Рыжов О. С.* Второе приближение в асимптотической теории обтекания тел вращения звуковым потоком реального газа.—ПММ, 1967, т. 31, №5, с. 783—793.
4. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
5. *Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е.* Теплообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
6. *Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа.—В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 32—44.
7. *Губайдулин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И.* Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры.—ПМТФ, 1978, №2, с. 78—86.
8. *Наполитано Л. Дж., Рыжов О. С.* Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околозвуковых скоростях.—Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, №5, с. 1229—1261.
9. *Ван-Вейнгарден Л.* Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа.—В кн.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 68—103.
10. *Оганян Г. Г.* Распространение слабых волн в релаксирующей газожидкостной смеси.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1979, т. 32, №2, с. 3—13.
11. *Мандельштам Л. И., Леонтович М. А.* К теории поглощения звука в жидкостях.—Ж. эксперим. и теор. физ., 1937, т. 7, №3, с. 438—449.
12. *Лодыженский М. Д.* О некоторых интегралах уравнений околозвуковых течений газа.—Инж. ж., 1962, т. 2, №1, с. 6—10.

13. *Днесперов В. Н.* О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения.—Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. *12*, №5, с. 1265—1279.
14. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган.— М.: Наука, 1979, 830 с.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1978. 295 с.
16. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
7.XII.1987