ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42 № 4, 1989

УДК 539.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ ПРИ ПРОНИКАНИИ КОНУСА

БАГДОЕВ А. Г., ВАНЦЯН А. А., ГРИГОРЯН М. С.

В работе [1] получено решение задачи проникания тонкого тела в глубь анизотропной (ортотропной) среды на основе гипотезы плоских сечений. В настоящей статье эта задача рассмотрена на основе гипотезы нормальных сечений, которая применима в задаче проникания со средними скоростями [4, 5].

Вводится поверхность S, исходящая из вершины тела, позади которой выполняются уравнения идеальной пластичности [2]. В цилиндрических координатах r, θ, x, где ось x выбрана вдоль оси проникающего тела, для связи тензора скоростей деформации с напряжениями можно записать

$$\dot{\varepsilon}_r = a[H(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})+G(\sigma_{rr}-\sigma_{xx})],\quad \dot{\varepsilon}_\theta = a[H(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr})+F(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{xx})] \tag{1}$$
$$\dot{\varepsilon}_x = a[G(\sigma_{xx}-\sigma_{rr})+F(\sigma_{xx}-\sigma_{\theta\theta})],\quad \dot{\varepsilon}_{rx} = aK\sigma_{rx}$$

где F, G, H даются формулами

$$2F=\frac{1}{\tau_{s\theta}^2}+\frac{1}{\tau_{sx}^2}-\frac{1}{\tau_{sr}^2},\quad 2G=\frac{1}{\tau_{sx}^2}+\frac{1}{\tau_{sr}^2}-\frac{1}{\tau_{s\theta}^2},\quad 2H=\frac{1}{\tau_{sr}^2}+\frac{1}{\tau_{s\theta}^2}-\frac{1}{\tau_{sx}^2}$$

$\tau_{sr}, \tau_{s\theta}, \tau_{sx}$ — пределы текучести по осям r, θ, x.

Разрешая систему (1), можно для девиаторов получить

$$\sigma'_{rr}=-\frac{\frac{\dot{\varepsilon}_\theta}{a}(2F+G)+\frac{\dot{\varepsilon}_x}{a}(2F+H)}{\alpha};\quad \sigma'_{\theta\theta}=\frac{\frac{\dot{\varepsilon}_\theta}{a}(2G+F)+\frac{\dot{\varepsilon}_x}{a}(F-H)}{\alpha}$$

$$\sigma'_{xx}=\frac{\frac{\dot{\varepsilon}_\theta}{a}(F-G)+\frac{\dot{\varepsilon}_x}{a}(F+2H)}{\alpha},\qquad \alpha=3(FG+FH+GH) \tag{2}$$

Подставляя (2) в условие Мизеса

$$H(\sigma'_{rr}-\sigma'_{\theta\theta})^2+G(\sigma'_{rr}-\sigma'_{xx})^2+F(\sigma'_{\theta\theta}-\sigma'_{xx})^2+K\sigma_{rx}^2=1$$

для параметра a можно получить

$$a^2 = \frac{9}{\alpha^2}\{[\dot\varepsilon_\theta(G+F)+\dot\varepsilon_x F]^2 H + [\dot\varepsilon_\theta F + \dot\varepsilon_x(F+H)]^2 G +$$

$$+ [\dot\varepsilon_\theta G - \dot\varepsilon_x H]^2 F\} + \frac{1}{K}\dot\varepsilon_{rx}^2 \qquad (3)$$

В силу несжимаемости пластической среды имеем уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$

где v_r, v_x — компоненты скорости частиц.

Применяя гипотезу нормальных сечений, можно получить $v_x = v_r\beta$, где $\beta = \mathrm{tg}\,\alpha_1$, α_1 есть угол полураствора тела. На теле при $r = r_k = \beta(f-x)$, где f — глубина поникания, имеет место условие

$$v_r = \beta f'. \qquad (5)$$

Решение уравнения (4) при условии (5) имеет вид

$$v_r = \frac{v\beta}{r}\frac{r_k + \beta^2 r}{\beta^2+1}, \quad v_x = \frac{v\beta^2}{r}\frac{r_k+\beta^2 r}{\beta^2+1}, \quad v = \frac{f'}{1+\beta^2} \qquad (6)$$

Для скоростей деформации можно получить

$$\dot\varepsilon_r = -\frac{v\beta^2(f-x)}{(\beta^2+1)r^2}, \quad \dot\varepsilon_\theta = \frac{v\beta^2(f-x+\beta r)}{(\beta^2+1)r^2}$$

$$\dot\varepsilon_x = -\frac{v\beta^3}{(\beta^2+1)r}, \quad \dot\varepsilon_{rx} = -\frac{v\beta^2}{(\beta^2+1)r}\left[1+\frac{\beta(f-x)}{r}\right] \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (3), получим

$$a = \frac{3}{\alpha}\frac{v\beta^2}{(\beta^2+1)r^2}\sqrt{Ar^2+Br+C} \qquad (8)$$

где

$$A = G^2H\beta^2 + G\beta^2\left(\frac{F}{\beta^2+1} - F - H\right)^2 + \left(\frac{G}{\beta^2+1} + H\right)^2\beta^2 F + \frac{\alpha^2}{9K}$$

$$B = 2GF\frac{f-x}{\beta^2+1}\beta\left(\frac{F}{\beta^2+1} - F + \frac{G}{\beta^2+1}\right) + \frac{2\alpha^2}{9K}\beta(f-x)$$

$$C = \left[(G+F)^2H + \frac{GF(G+F)}{(\beta^2+1)^2} + \frac{\alpha^2}{9K}\beta^2\right](f-x)^2$$

Из (2) можно получить

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -\frac{(G+F)(f-x)}{R} - \frac{\beta(G+2F)r}{R}$$

$$\sigma_{rx} = -\frac{[r+\beta(f-x)]\alpha}{3R}, \quad R = \sqrt{Ar^2+Br+C} \qquad (9)$$

Подставляя (9) в уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial x}=0$$

можно получить после интегрирования соотношение

$$\sigma_{rr}=\frac{1}{\sqrt{|A|}}\ln\left|\frac{2Ar+B}{2\sqrt{A}}+R\right|\cdot\left(G+2F-\frac{\alpha}{3}\right)\beta-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{|C|}}\ln\left|\frac{2G+Br+2\sqrt{C}\,R}{r}\right|\cdot(G+F)(f-x)+C' \qquad (10)$$

где C' — постоянная, определяемая из соединения с упругим решением, не влияющим на особенность σ_{rr} при $\alpha=0$ [1,3]. Выясняя порядок σ_{rr} при $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$, можно получить

$$A\approx\beta^2[(G+H)\alpha-2FG^2\beta^2]+\frac{\alpha^2}{9K}$$

$$C\approx(f-x)^2\left|(G+F)\alpha+\frac{\alpha^2}{9K}\beta^2-2GF\beta^2(G+F)\right|$$

Для среды, в которой $\alpha=0$, можно получить

$$A\approx-2FG^2\beta^4,\quad C=-2GF(G+F)\beta^2(f-x)^2$$

Согласно (10), σ_{rr} имеет порядок $1/\beta^2$, что приводит к большим напряжениям для тонких тел.

В случае трансверсально-изотропной среды, для которой плоскость r, θ является плоскостью симметрии, можно полагать

$$F=G=\frac{1}{2\tau_{sx}^2},\quad H=\frac{1}{\tau_{sr}^2}-\frac{1}{2\tau_{sx}^2},\quad \alpha=\frac{1}{\tau_{sx}^2\tau_{sr}^2}-\frac{1}{4\tau_{sx}^4}$$

Таким образом, $\alpha=0$ соответствует среде, в которой $\tau_{sr}=2\tau_{sx}$ и σ_{rr} велико. Для проверки полученного результата проделаны опыты по прониканию со скоростью 800 м/сек стальных инденторов массой 10^{-2} кг в композиты, состоящие из ~ 50 слоев чередующихся металлов (алюминий-свинец, дюраль-свинец). Толщина пластин от 10^{-3} м до $6\cdot 10^{-3}$ м. Такой образец может быть моделирован трансверсально-изотропной средой. Пределы текучести τ_{sr} определялись по Фойхту $\tau_{sr}=\dfrac{h_1\tau_{s1}+h_2\tau_{s2}}{h_1+h_2}$, где $h_{1,2}$ — толщины пластин, τ_{sx} измерялось в опытах по сжатию образца. Основной эффект уменьшения глубины имеет место для среды, в которой $1{,}6<\tau_{sr}/\tau_{sx}<3{,}6$. При проникании в образец, составленный из склеенных слоев алюминия ($h_1=1{,}6\cdot 10^{-3}$ м) и свинца ($h_2=2\cdot 10^{-3}$ м), глубины проникания соответственно равны: в алюминий 10^{-1} м, в свинец более $12\cdot 10^{-2}$ м, в композит $6\cdot 10^{-2}$ м, при $\tau_{sr}/\tau_{sx}\approx 2{,}3$.

Примененная теория является квазистатической и она применима для достаточно тонких тел. Уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{xr}}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_r}{\partial t}$$

позволяет оценить условие квазистатичности. Второй член левой части больше τ_s / r при $\tau_{sr} \approx 2\tau_{sx}$, а правая часть имеет порядок $\rho v^2 \beta^2 / r$ и условие квазистатичности $\rho v^2 \beta^2 < \tau_s$, что выполняется для средних скоростей.

Применение гипотезы нормальных сечений приводит к устранению, имеющее место особенности δ_{rr} при $\alpha = 0$, полученной согласно гипотезы плоских сечений. Однако, с одной стороны, напряжения для малых α получаются большими и, с другой стороны, при $A = 0$ вновь имеется особенность, то есть имеет место смещение особенности. Для опытного подтверждения указанного факта увеличения сопротивления для некоторого диапазона τ_{sr} / τ_{sx} были проведены опыты по прониканию тонких твердых инденторов в металлические слоистые среды, моделирующие анизотропную среду. Образцы изготавливались чередованием 50 тонких слоев из разных металлов. В качестве металлов брались алюминий-свинец, дюраль-свинец, дюраль-алюминий с разными комбинациями толщин пластин. Набором разных толщин пластинок варьировались отношения пределов текучести по радиусу (вдоль пластинок) и по оси проникания (перпендикулярно плоскости пластин).

Среднее значение τ_{sr} определилось по Фойхту

$$\tau_{sr} = \frac{\tau_{s1} h_1 + \tau_{s2} h_2}{h_1 + h_2}$$

где $h_{1,2}$ — толщина слоев; τ_{s1}, τ_{s2} — пределы текучести составляющих металлов. У образцов, для которых τ_{sr} находилось в предел x $1{,}6\tau_{sx} \div 2{,}8\tau_{sx}$, имело место весьма значительное уменьшение глубины проникания в композит по сравнению с глубинами проникания в изотропные образцы с пределами текучести τ_{s1} и τ_{s2}, соответственно. В частности, для образцов, составленных из пластинок алюминия и свинца толщиной $1{,}6 \cdot 10^{-3}$ м, и $2 \cdot 10^{-3}$ м, глубины поникания в композит составляли $\sim 68 \cdot 10^{-3}$ м, в алюминий $\sim 0{,}1$ м, в свинец более 0,12 м. При этом $\tau_{sr} / \tau_{sx} = 2{,}3$, где значение τ_{sx} в опытах измерялось сжатием образца.

В таблице приведены результаты экспериментов по проиниканию твердых инденторов с массой $\sim 0{,}01$ кг и начальной скоростью ~ 800 м/с в вышеуказанные среды.

В первом столбце указаны сочетания металлов, после названия металла указана толщина слоя в миллиметрах. Во втором и третьем столбцах указаны пределы текучести металлов, в четвертом приведены значения τ_{sr} композитов, посчитанные согласно модели Фойхта. Шестой столбец показывает отношение τ_{sr} / τ_{sx}, являющееся основным параметром исследуемого эффекта. В седьмом и восьмом столбцах приводятся глубины проникания тонких твердых тел в изотропный образец с приведенными пределами текучести (3) и в композит. Как видно из таблицы, в диапазоне $1{,}6 < \tau_{sr}/\tau_{sx} < 3{,}5$ имеет место существенное уменьшение глубины поникания.

Таблица

Материалы	τ_{s1} $\times 10^{-3}$ Па	τ_{s2} $\times 10^{-3}$ Па	τ_{sr} $\times 10^{-3}$ Па	τ_{sx} $\times 10^{-3}$ Па	$\frac{\tau_{sr}}{\tau_{sx}}$	$h_{из}$ $\times 10^{-3}$ м	$h_{аниз}$ $\times 10^{-3}$ м
pb1,6+Al2	250	840	578	250	2,3	18	6,9
pb1,6+Al4	250	1200	883	250	3,5	10	6,4
Al1,6+Al4	1600	840	1178	1200	1	7,2	7,8
pb2+Al6	250	840	693	250	2,8	13	6,7
pb6+Al2	250	840	397	250	1,6	20	5,8
pb0,8+Al4	250	1200	1000	975	1	4,5	6,2
pb1,6+Al6	250	840	666	250	2,6	12	6,8
pb6+Al10	250	3000	1968	250	8	4,5	4,3
pb2+Al10	250	3000	2500	300	8,3	4,0	3,8
pb0,2+Al0,8	250	1600	925	765	1,2	8	6,9

Как показывают опытные данные, глубины проникания тонких твердых тел в композит с $\tau_{sr}/\tau_{sx} = 2{,}8$ приблизительно равны $6{,}7\cdot 10^{-3}$ м, в алюминий с пределом текучести 0,84 Па—0,1 м, а свинцовый образец толщиной—0,12 м пробит насквозь, при этом во всех случаях наличия эффекта имеет место сильное затупление стального индентора. В начальный момент, когда скорость проникания равна приблизительно 800 м/с, существенное искривление слоев в направлении проникания отсутствует, а с уменьшением скорости проникающего тела, то есть в конце кратера, имеет место сильное искривление слоев.

Увеличение области пластичности и искривление пластин свидетельствуют о существенном поглощении энергии проникающего тела средой. Следует также отметить, что из-за слоистости среды имеет место поглощение энергии за счет появления упругих поверхностных волн, распространяющихся по слоям.

Таким образом, за счет оптимального выбора состава слоистого композита можно добиться значительного уменьшения глубины проникания твердых инденторов в металлические среды.

INVESTIGATION OF SINGULARITY OF STRESSES IN ANISOTROPIC PLASTIC MEDIUM UNDER THE CONE PENETRATION

A. G. BAGDOEV, A. A. VANTSIAN, M. S. GRIGORIAN

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵԶԱԿԻՈՒԹՅԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒՄԸ ԿՈՆԻ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՊԼԱՍՏԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐ ՆԵՐԹԱՓԱՆՑՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Ա. ՎԱՆՑՅԱՆ, Մ. Ս. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Ամփոփում

Նորմալ կորվածքների վարկածի հիման վրա բերված է բարակ մարմինների անիզոտրոպ միջավայրեր ներթափանցման խնդիրը: Ցույց է տրված, որ ի տարբերություն հարթ կորվածքների վարկածից ստացված արդյունքների, մարմնում բացակայում են նորմալ լարումների եզակիությունները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонкого тела в упругие анизотропные среды.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1983, т. **36**, № 6, с. 23—30.
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности.—М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
3. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Исследование проникания тонкого твердого тела в трансверсально-изотропную среду.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1987, т. **40**, № 4, с. 3—6.
4. *Сагомонян А. Я.* Проникание.—М.: МГУ, 1974. 298 с.
5. *Сагомонян А. Я.* Пробивание плиты тонким твердым снарядом.—Вестн. Моск. ун-та матем., мех., 1975, № 5, с. 104—111.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
26.IV.1988