

УДК 532.516

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С ДВИЖУЩЕЙСЯ  
 ПОРИСТОЙ СТЕНКОЙ

БАБАДЖАНЫАН Բ. Ա., ՄՈՒՇԱԿԱՆՅԱՆ Բ. Զ.

Рассматривается развитие стационарного ламинарного изотермического течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с движущейся пористой стенкой.

Такие течения относятся к мало изученному классу задач в теории движения жидкости и имеют специфические особенности [1], [2], [3], [4]. Эти задачи имеют многочисленные практические приложения в современной технологии.

Скольжение верхней пористой плоскости происходит в своей плоскости по оси  $OX$  с заданной постоянной скоростью  $U_1$ . За исходные уравнения движения жидкости принимаются приближенные линейризованные уравнения Навье-Стокса с частичным учетом слагаемых от ускорения и вязкости в виде [3]

$$U \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Здесь  $U$  — средняя расходная скорость основного потока по сечению в начале трубы, где распределение скорости принимается равномерным,  $v_x$  и  $v_y$  — соответствующие компоненты скорости по осям  $OX$  и  $OY$ ,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Приняв начало оси  $OY$  на средней линии между плоскостями и расстояние между ними  $2h$ , граничные условия поставленной задачи будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad v_x &= U = \text{const}, \quad p = p_H = \text{const} \\ \text{при } y = h, \quad x > 0 \quad v_x &= U_1, \quad v_y = k(p - p_0) \\ \text{при } y = -h, \quad x > 0 \quad v_x &= 0, \quad v_y = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $p_H$  — значение давления в начале трубы,  $k$  — коэффициент проницаемости стенки,  $p_0$  — внешнее давление.

Если  $p > p_0$ , имеет место отсос жидкости, в случае  $p < p_0$  — вдувание.

Введем новые переменные, полагая

$$z = \frac{x}{h}, \quad \xi = \frac{y}{h}, \quad u = \frac{v_x - U}{U}, \quad v = \frac{v_y}{U}, \quad P = \frac{p - p_H}{\rho U^2}$$

Тогда система уравнений (1) и граничные условия (2) примут следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \quad (3)$$

$$\text{при } z = 0 \quad u = 0, \quad P = 0$$

$$\text{при } \xi = 1 \quad z > 0 \quad u = \frac{U_1 - U}{U}, \quad v = \alpha(P + b) \quad (4)$$

$$\text{при } \xi = -1 \quad z > 0 \quad u = -1, \quad v = 0$$

где  $\text{Re} = \frac{Uh}{\nu}$  — число Рейнольдса,  $\alpha = k_0 U$ ,  $b = \frac{P_H - P_E}{\rho U^2}$ .

Систему уравнений (3) при граничных условиях (4) решаем с помощью преобразования Лапласа [5]. Применяя к уравнениям (3) и к граничным условиям (4) преобразование Лапласа, получим

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} - \lambda \bar{u} = \lambda \bar{P}, \quad \frac{d\bar{P}}{d\xi} = 0, \quad \frac{d\bar{v}}{d\xi} + \lambda \bar{u} = 0 \quad (5)$$

$$\text{при } \xi = 1 \quad z > 0 \quad \bar{u} = \frac{U_1 - U}{U} \frac{1}{\lambda}, \quad \bar{v} = \alpha \left( \bar{P} + \frac{b}{\lambda} \right) \quad (6)$$

$$\text{при } \xi = -1 \quad z > 0 \quad \bar{u} = -\frac{1}{\lambda}, \quad \bar{v} = 0$$

где  $\lambda$  — параметр преобразования.

Из системы уравнений (5) для  $\bar{v}$  получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4 \bar{v}}{d\xi^4} - \lambda \text{Re} \frac{d^2 \bar{v}}{d\xi^2} = 0 \quad (7)$$

Решение уравнения (7) с учетом граничных условий (6) будет

$$\bar{v} = \frac{\alpha}{2} \left( \bar{P} + \frac{b}{\lambda} \right) \left( \frac{\text{sh} \beta \xi - \beta \text{ch} \beta}{\text{sh} \beta - \beta \text{ch} \beta} + 1 \right) + \frac{a+1}{2} \left( \xi - \frac{\text{sh} \beta \xi - \beta \text{ch} \beta}{\text{sh} \beta - \beta \text{ch} \beta} \right) + \frac{a-1}{2} \frac{\text{ch} \beta \xi - \text{ch} \beta}{\beta \text{sh} \beta} \quad (8)$$

Из системы уравнений (5) для  $\bar{u}$  и  $\bar{P}$  соответственно получим

$$\bar{u} = \frac{\alpha}{2} \left( \bar{P} + \frac{b}{\lambda} \right) \frac{\beta (\text{ch} \beta - \text{ch} \beta \xi)}{\lambda (\text{sh} \beta - \beta \text{ch} \beta)} + \frac{a+1}{2\lambda} \left[ \frac{\beta (\text{ch} \beta \xi - \text{ch} \beta)}{\text{sh} \beta - \beta \text{ch} \beta} - 1 \right] - \frac{a-1}{2} \frac{\text{sh} \beta \xi}{\lambda \text{sh} \beta} \quad (9)$$

$$\bar{p} = \frac{\lambda(a+1)\text{th}\beta - b\lambda\beta}{\lambda[\beta\lambda + 2\lambda(\text{th}\beta - \beta)]} \quad (10)$$

где  $\beta = \sqrt{\lambda \text{Re}}$ ,  $a = \frac{U - U_1}{U}$ .

Совершив обратное преобразование Лапласа и переходя к старым переменным для  $v_x$ ,  $v_y$  и  $p$ , окончательно получим

$$v_x = U \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left( \frac{\cos \gamma_m y/h}{\cos \gamma_m} - 1 \right) \exp\left(-\frac{\gamma_m^2 x}{\text{Re}h}\right) + U_1 B \left( \frac{\text{ch} \sqrt{\lambda_1 \text{Re}y/h}}{\text{ch} \sqrt{\lambda_1 \text{Re}}} - 1 \right) \times \\ \times \exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \frac{U_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \pi n y/h}{n} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 x}{\text{Re}h}\right) + \frac{U_1}{2} \left( \frac{y}{h} + 1 \right) \quad (11)$$

$$v_y = \frac{U}{\text{Re}} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \gamma_m \left( \frac{\sin \gamma_m y/h}{\gamma_m \cos \gamma_m} - \frac{y}{h} + \frac{\beta_1}{\gamma_m^2} \right) \exp\left(-\frac{\gamma_m^2 x}{\text{Re}h}\right) - \\ - U_1 B \left( \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda_1 \text{Re}y/h}}{\sqrt{\lambda_1 \text{Re}h} \sqrt{\lambda_1 \text{Re}}} - \frac{y}{h} - \frac{\alpha}{2\lambda_1} \right) \exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) - \\ - \frac{U_1}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \cos \pi n y/h - 1| \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 x}{\text{Re}h}\right) \quad (12)$$

$$p = p_0 + \rho U^2 B \exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \rho U^2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\left(-\frac{\gamma_m^2 x}{\text{Re}h}\right) \quad (13)$$

где  $A_m = \frac{(a+1)\gamma_m^2 + \beta_1(a+2b+1)}{\gamma_m^4 + 2\beta_1\gamma_m^2 + \beta_1 + \beta_1^2}$ ,  $B = \frac{\beta_1(a+2b+1) - \lambda_1 \text{Re}(a+1)}{(\lambda_1 \text{Re})^2 - 2\beta_1\lambda_1 \text{Re} + \beta_1 + \beta_1^2}$

через  $\gamma_m$  обозначены действительные корни уравнения

$$\text{tg} \gamma = \gamma + \frac{\alpha \text{Re}}{2\gamma}$$

$\lambda_1$  — значение, соответствующее двум действительным корням уравнения

$$\text{th} \sqrt{\lambda_1 \text{Re}} = \sqrt{\lambda_1 \text{Re}} - \frac{\alpha \text{Re}}{2\sqrt{\lambda_1 \text{Re}}}, \quad \text{и} \quad \beta_1 = \frac{\alpha \text{Re}}{2}$$

Подставляя в выражениях (8), (9) и (10)

$$\text{th} \beta = \beta - \frac{1}{3} \beta^2$$

и совершая все необходимые математические преобразования, получим приближенные значения оригиналов искомых функций на достаточно большом удалении от входа

$$v_{x..} = \frac{3U}{4} \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \left[ (a+1) \text{ch} \lambda_1 x/h - \frac{\alpha(a+2b+1)}{2\lambda_1} \text{sh} \lambda_1 x/h \right] + \frac{U_1}{2} \left( 1 + \frac{y}{h} \right) \quad (14)$$

$$v_{y,\infty} = \frac{U_2}{2} \left( \frac{3y}{2h} - \frac{y^2}{2h^2} + 1 \right) \left[ \left( \frac{a+2b+1}{2} \right) \operatorname{ch} \lambda_2 x/h - \frac{3(a+1)}{2\lambda_2 \operatorname{Re}} \operatorname{sh} \lambda_2 x/h \right] \quad (15)$$

$$p_\infty = p_n + \left( p_H - p_n + \rho U^2 \frac{a+1}{2} \right) \operatorname{ch} \lambda_2 x/h - \frac{3\rho U}{2\lambda_2 h} (a+1) \operatorname{sh} \lambda_2 x/h \quad (16)$$

$$\text{Здесь } \lambda_2^2 = \frac{3\rho}{2\operatorname{Re}}.$$

Найдем значение силы трения

$$\begin{aligned} \tau = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \mu \left\{ -\frac{U}{h} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\gamma_n \sin \gamma_n y/h}{\cos \gamma_n} \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 x}{\operatorname{Re} h}\right) + \right. \\ \left. + UB \frac{\sqrt{\lambda_1 \operatorname{Re}}}{h} \frac{3h\sqrt{\lambda_1 \operatorname{Re}} y/h}{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_1 \operatorname{Re}}} \exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \frac{U_1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n \cos n\pi y/h] \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \frac{U_1}{2h} - \frac{U}{\operatorname{Re}^2 h} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma_n \left( \frac{\sin \gamma_n y/h}{\gamma_n \cos \gamma_n} - \frac{y}{h} + \frac{\beta_1}{\gamma_n^2} \right) \exp\left(-\frac{\gamma_n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) - \right. \\ \left. - \frac{U \lambda_1^2}{h} B \left[ \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_1 \operatorname{Re}} y/h}{\sqrt{\lambda_1 \operatorname{Re}} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_1 \operatorname{Re}}} - \frac{y}{h} - \frac{\lambda_1}{2\lambda_1} \right] \exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \frac{U_1 \pi^2}{\operatorname{Re}^2 h} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [(-1)^n \times \right. \\ \left. \times \cos n\pi y/h - 1] \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) \right\} \quad (17) \end{aligned}$$

где  $\mu = \rho \nu$ .

Значения силы трения на стенках будут

$$\begin{aligned} \tau^h = -\frac{\mu U}{h} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma_n^2 \left( 1 + \frac{\beta_1}{\gamma_n^2} + \frac{\lambda_1}{\operatorname{Re}} \right) \exp\left(-\frac{\gamma_n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \\ + \frac{\mu U \lambda_1}{h} B \left( \lambda_1 + \operatorname{Re} - \frac{\beta_1}{\lambda_1} \right) \exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \frac{\mu U_1}{h} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \frac{1}{2} \right] \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau^{-h} = \frac{\mu U}{h} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\gamma_n^2 + \beta_1) \exp\left(-\frac{\gamma_n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) - \frac{\mu U \lambda_1}{h} B \left( \operatorname{Re} - \frac{\beta_1}{\lambda_1} \right) \exp\left(\frac{\lambda_1 x}{h}\right) + \\ + \frac{\mu U_1}{h} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \frac{1}{2} \right] \quad (19) \end{aligned}$$

Значение силы трения на достаточно большом удалении от входа, то есть для стабилизированного участка будет

$$\begin{aligned} \tau_\infty = \frac{\mu U}{h} \left[ \frac{\operatorname{Re} \lambda_2 (a+2b+1)}{2} \operatorname{sh} \lambda_2 x/h - \frac{3(a+1)}{2} \operatorname{ch} \lambda_2 x/h \right] \times \\ \times \left[ \frac{\lambda_1}{2\operatorname{Re}} \left( 1 + \frac{3y}{2h} - \frac{y^2}{2h^2} \right) + \frac{y}{h} \right] + \frac{\mu U_1}{2h} \quad (20) \end{aligned}$$

Соответственно

$$\tau_\infty^h = \frac{\mu U}{h} \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\operatorname{Re}} \right) \left[ \frac{\operatorname{Re} \lambda_2 (a+2b+1)}{2} \operatorname{sh} \lambda_2 x/h - \frac{3(a+1)}{2} \operatorname{ch} \lambda_2 x/h \right] + \frac{\mu U_1}{2h} \quad (21)$$

$$\tau_{\infty} h = - \frac{\nu U}{h} \left[ \frac{Re \lambda_2 (a + 2b + 1)}{2} \operatorname{sh} \lambda_2 x/h - \frac{3(a+1)}{2} \operatorname{ch} \lambda_2 x/h \right] + \frac{\nu U_2}{2h} \quad (22)$$

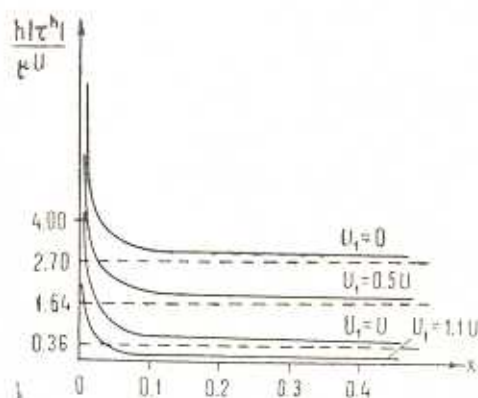
Приближенное значение длины начального участка (участок просачивания) определится из (16) при условии  $p_{\infty} = p_0$ ,  $x = l$  или из (15) при условии  $v_{yx} = 0$ ,  $x = l$ .

$$\operatorname{th} \frac{\lambda_2 l}{h} = \frac{(p_{11} - p_0 + 3U_2^2 \frac{a+1}{2}) 2l_2 h}{3\mu l (a+1)} \quad (23)$$

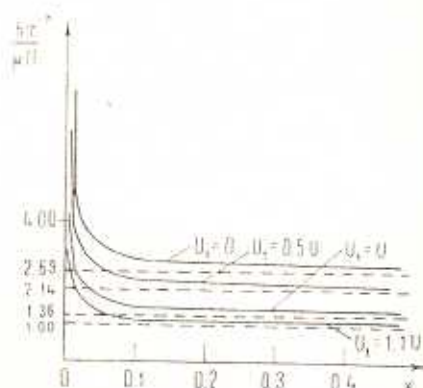
Уточненное значение длины участка просачивания получится из (13) или (12) при тех же условиях.

Как показывают полученные формулы, при  $\alpha = 0$ , то есть, когда движущаяся стенка непроницаемая, результаты данной работы совпадают с результатами [2], при условии, что  $U_2 = 0$ .

Значения силы трения, зависящей от скоростей стенки и основного потока, показаны на фиг. 1 и 2, при построении которых приняты  $\alpha = 10^{-5}$ ,  $Re = 10$ . Как видно из фигур, когда верхняя пористая стенка неподвижна ( $U_1 = 0$ ), сила трения на этой стенке больше силы трения на нижней сплошной стенке. При увеличении скорости движения верх-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

ней пористой стенки сила трения уменьшается и при значении  $U_1 = 1.1U$  стремится к нулю на достаточно большом расстоянии от входа для стабилизированного участка трубы).

Фигуры показывают, что сила трения на подвижной пористой стенке меньше силы трения на неподвижной непроницаемой стенке.

Из фигур видно также, что силы трения как на проницаемой, так и на непроницаемых стенках уменьшаются при увеличении расстояния от входа трубы, то есть на обеих стенках сила трения для стабилизированного участка меньше, чем сила трения на начальном участке.

Сравнивая полученные формулы с результатами [2], видно, что при

движении пористой стенки, как на этой, так и на неподвижной сплошной стенках сила трения меньше, чем когда подвижная и неподвижная стенки непроницаемые, так, что пористость уменьшает динамическую силу трения на стенках.

## LIQUID FLOW IN THE CHANNEL WITH MOVING POROUS WALL

G. A. BABADJANYAN, R. ZH. MNATSAKANYAN

ՀԵՂՈՒԿԻ ՇԱՐՃՈՒԹՐ ԸՆԹՃՎՈՂ ՄԱԿՈՏԻՆԵՆ ՊԱՏՈՎ շԱՐՔ ԿՈՂՈՎԱԿՈՒՄ

Գ. Ա. ԲԱԲԱԺՅԱՆ, Թ. Ժ. ՄՆԱՏԱԿԱՆՅԱՆ

### Ա մ փ ո փ ու մ

Գրասրկվում է ժառույցիկ անսեղմելի հեղուկի սաացիոնար, լամինար, իզոթերմ շարժումը հարթ խողովակում, որի պատերից մեկը ծակոտակեն է և շարժական:

Գտնված են արագության, հնչման և շփման ուժի փոփոխման օրենքները սկզբնական և հաստատված հաստատուններում:

Յույց է տրվում, որ ծակոտակենությունը փոքրացնում է դինամիկական շփման ուժը խողովակի պատերի վրա:

Բերված է թվային օրինակ և կառուցված են պատերի վրա շփման ու գրաֆիկները՝ կախված խողովակի պատի և հիմնական հոսքի արագություններից:

### ЛИТЕРАТУРА

1. Антышев Н. А., Жубрин С. В., Мотулевич В. П. Анализ течения в канале с движущейся стенкой.—ИФЖ, 1985, т. 48, № 4, с. 592—597.
2. Бабаджанян Г. А., Мнацаканян Р. Ж. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1987, т. 40, № 3, с. 49—53.
3. Слѣзкин Н. А. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными пористыми стенками.—ПММ, 1957, т. 21, вып. 4, с. 591—593.
4. Бектурганов Е., Джагагантин К. Е., Сакинов З. Б., Ярин А. Л. Струйное обтекание движущейся поверхности.—Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1981, № 3, вып. I, с. 33—41.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Москва: Изд-во «Высшая школа», 1967.

Ереванский государственный госуниверситет

Поступила в редакцию  
21.XII.1987