

УДК 539.3

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ НЕКЛАССИЧЕСКИХ
 КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ
 ТЕРМОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

АГАЛОВЯН Л. А., ГЕВОРКЯН Р. С.

Оптимизационные требования к конструктивным элементам типа слоистых пластин и оболочек вынуждают совершенствовать существующие методы их расчета. Для пластин и оболочек, работающих в термоупругой стадии, этого можно достигнуть, в частности, на основе решения соответствующей трехмерной задачи и его последующего анализа. В работе получено асимптотическое решение класса смешанных пространственных задач для двухслойных термоупругих оболочек. Считается, что слои обладают произвольной анизотропией (21 упругая константа) и могут являться, например, композитами с пространственным армированием. Полученные результаты проиллюстрированы на двух модельных задачах для двухслойных цилиндрических оболочек. Указанный подход можно обобщить на оболочки из произвольного числа слоев*.

1. Пусть имеем двухслойную анизотропную термоупругую оболочку с толщинами слоев h_1 , h_2 . Отнесем поверхность раздела к линиям кривизны α , β , ось γ ($-h_2 \leq \gamma \leq h_1$) направим перпендикулярно к этой поверхности.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние такой оболочки, когда на одной ее лицевой поверхности $\gamma = -h_2$ заданы перемещения

$$u_\alpha(-h_2) = u^-, \quad u_\beta(-h_2) = v^-, \quad u_\gamma(-h_2) = w^- \quad (1.1)$$

а на другой $\gamma = h_1$ задана одна из следующих групп условий, представляющих в практических приложениях наибольший интерес:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sigma_{\gamma\gamma}(h_1) = \varepsilon^{-1} \sigma_{\gamma\gamma}^+, \quad \sigma_{\beta\gamma}(h_1) = \varepsilon^{-1} \sigma_{\beta\gamma}^+, \quad \sigma_{\alpha\gamma}(h_1) = \varepsilon^{-1} \sigma_{\alpha\gamma}^+ \\ 2) \quad & u_\alpha(h_1) = u^+, \quad u_\beta(h_1) = v^+, \quad u_\gamma(h_1) = w^+ \\ 3) \quad & \sigma_{\gamma\gamma}(h_1) = \varepsilon^{-1} \sigma_{\gamma\gamma}^+, \quad u_\beta(h_1) = v^+, \quad u_\alpha(h_1) = u^+ \\ 4) \quad & u_\gamma(h_1) = w^+, \quad \sigma_{\beta\gamma}(h_1) = \varepsilon^{-1} \sigma_{\beta\gamma}^+, \quad \sigma_{\alpha\gamma}(h_1) = \varepsilon^{-1} \sigma_{\alpha\gamma}^+ \end{aligned} \quad (1.2)$$

Считается, что на оболочку действуют также объемные силы с компонентами $F_\alpha^{(v)}$, $F_\beta^{(v)}$, $F_\gamma^{(v)}$ и температурное поле, воздействие кото-

* Часть полученных результатов доложена на VI Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Ташкент, 1986 г.).

рого описывается по модели Дюамеля-Неймана с помощью функции приращения температуры $\theta^{(i)}(\alpha, \beta, \gamma) = T^{(i)}(\alpha, \beta, \gamma) - T_0^{(i)}(\alpha, \beta, \gamma)$. Здесь и далее $i=1$ для слоя $0 \leq \gamma \leq h_1$, и $i=2$ для слоя $-h_2 \leq \gamma \leq 0$. На боковой поверхности (торцах) оболочки могут быть заданы произвольные условия, они в сформулированных задачах не влияют на ход определения решения внутренней задачи, ими обусловлен пограничный слой. На поверхности раздела слоев $\gamma=0$ должны выполняться условия контакта

$$u_1^{(1)}(0) = u_1^{(2)}(0), \quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}(0) = \sigma_{\alpha\gamma}^{(2)}(0), \quad (\alpha, \beta, \gamma) \quad (1.3)$$

Поставленная краевая задача отличается от задач классической теории оболочек тем, что на лицевых поверхностях $\gamma=h_1, -h_2$ заданы иные условия. Поэтому такую краевую задачу мы назвали неклассической, хотя с позиций теории упругости она также является классической.

Подобного рода задачи возникают, в частности, при исследовании контакта податливого тела с более жестким в расчетах упругих оснований и фундаментов и др. [8, 9].

Чтобы решить сформулированную задачу, будем исходить из уравнений пространственной задачи термоупругости (уравнения равновесия, состояния, связи деформации-перемещения) и чтобы уменьшить выкладки, в качестве неизвестных выберем компоненты несимметричного тензора напряжений τ_{ij} и безразмерные перемещения $u = u_\alpha/R, v = u_\beta/R, w = u_\gamma/R$, где R — характерный размер оболочки (наименьший из радиусов кривизны и линейных размеров координатной поверхности). τ_{ij} выражаются через компоненты симметричного тензора σ_{ij} следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\alpha} &= (1 + \gamma/R_2)\sigma_{\alpha\alpha}, & \tau_{\beta\beta} &= (1 + \gamma/R_1)\sigma_{\beta\beta} \\ \tau_{\alpha\beta} &= (1 + \gamma/R_2)\sigma_{\alpha\beta}, & \tau_{\beta\alpha} &= (1 + \gamma/R_1)\sigma_{\beta\alpha} \\ \tau_{\alpha\gamma} &= (1 + \gamma/R_2)\sigma_{\alpha\gamma}, & \tau_{\gamma\alpha} &= (1 + \gamma/R_1)\sigma_{\gamma\alpha} \\ \tau_{\gamma\gamma} &= (1 + \gamma/R_1)(1 + \gamma/R_2)\sigma_{\gamma\gamma} \end{aligned} \quad (1.4)$$

В уравнениях пространственной задачи термоупругости анизотропного тела [1, 2] перейдем к безразмерным переменным

$$\alpha = R\xi, \quad \beta = R\eta, \quad \gamma = \varepsilon\zeta \quad (1.5)$$

где $\varepsilon = h_2/R$ — малый параметр (если $h_1 > h_2$, целесообразно ввести $\varepsilon = h_1/R$). В переменных ξ, η, ζ система уравнений является сингулярно возмущенной. Известным приемом [3] можно учесть также изменяемость по координатным линиям, если вместо (1.5) ввести соответствующие переменные. Решение сингулярно возмущенной системы складывается из решений внутренней задачи (проникающая часть решения) и пограничного слоя [4].

Решение внутренней задачи будем искать в виде асимптотического разложения [5]

$$Q_j^{(i)} = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{*j+s} Q_j^{(i,s)}, \quad i=1,2 \quad (1.6)$$

где $x_\alpha = 0$ для перемещений, $x_\alpha = -1$ для напряжений. Одновременно предполагается, что компоненты объемных сил и изменение температуры допускают представления

$$F_\alpha^{(i)} = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{-2+s} F_{\alpha s}^{(i)}, \quad (\alpha, \beta, \gamma), \quad \theta^{(i)} = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{-1+s} \theta_s^{(i)} \quad (1.7)$$

ибо лишь при асимптотике (1.7) в уравнениях для исходного приближения будут выступать компоненты объемных сил и температуры. Для этого объемные силы должны иметь достаточно большую интенсивность, в противном случае соответствующие слагаемые будут порядком меньше и будут входить в уравнения для последующих приближений.

Подставив представления (1.6), (1.7) в преобразованные уравнения термоупругости, по обычной процедуре [1, 3, 5] получим разрешающую систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов $Q_j^{(i,s)}$. Решив эту систему, удовлетворив граничным условиям (1.1) и условиям контакта (1.3), получим общий интеграл системы разрешающих уравнений внутренней задачи в виде

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\gamma}^{(i,s)} &= \tau_{\alpha\gamma 0}^{(i,s)}(\xi, \eta) + \tau_{\alpha\gamma}^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (\alpha, \beta, \gamma) \\ \tau_{\alpha\alpha}^{(i,s)} &= A_{13}^{(i)} \tau_{10}^{(s)} + A_{14}^{(i)} \tau_{\beta 0}^{(s)} + A_{15}^{(i)} \tau_{\alpha 0}^{(s)} + \tau_{\alpha\alpha}^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (\alpha, \beta; 1,2) \\ \tau_{\alpha\beta}^{(i,s)} &= A_{63}^{(i)} \tau_{10}^{(s)} + A_{64}^{(i)} \tau_{\beta 0}^{(s)} + A_{65}^{(i)} \tau_{\alpha 0}^{(s)} + \tau_{\alpha\beta}^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ u^{(i,s)} &= (A_{54}^{(i)} \zeta + A_{53}^{(2)}) \tau_{10}^{(s)} + (A_{54}^{(2)} \zeta + A_{53}^{(i)}) \tau_{\beta 0}^{(s)} + \\ &+ (A_{55}^{(i)} \zeta + A_{55}^{(2)}) \tau_{\alpha 0}^{(s)} + u^{-(i,s)}(\xi, \eta) - u^{(2,s)}(\zeta = -1) + u^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (1.8)$$

($u, v; \alpha, \beta; 5, 4$)

$$\begin{aligned} w^{(i,s)} &= (A_{33}^{(i)} \zeta + A_{33}^{(2)}) \tau_{10}^{(s)} + (A_{34}^{(i)} \zeta + A_{34}^{(2)}) \tau_{\beta 0}^{(s)} + \\ &+ (A_{35}^{(i)} \zeta + A_{35}^{(2)}) \tau_{\alpha 0}^{(s)} + w^{-(i,s)}(\xi, \eta) - w^{(2,s)}(\zeta = -1) + w^{(i,s)}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\gamma}^{(i,s)} &= - \int_0^{\zeta} \left[\frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \xi} (B \tau_{\alpha\alpha}^{(i,s-1)}) + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \eta} (A \tau_{\beta\alpha}^{(i,s-1)}) + \right. \\ &+ R(k_\alpha \tau_{\alpha\beta}^{(i,s-1)} - k_\beta \tau_{\beta\beta}^{(i,s-1)}) + R F_{\alpha s}^{(i)} + r_1 \left(\zeta \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^{(i,s-1)}}{\partial \zeta} + 2 \tau_{\alpha\gamma}^{(i,s-1)} \right) + \\ &\left. + {}^{\pm} R(r_1 + r_2) F_{\alpha(s-1)}^{(i)} + {}^{\pm} R r_1 r_2 F_{\alpha(s-2)}^{(i)} \right] \partial \zeta, \quad (\alpha, \beta; \xi, \eta; 1, 2; A, B) \\ \tau_{11}^{(i,s)} &= - \int_0^{\zeta} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{B} \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + R(k_\alpha \tau_{\beta\gamma}^{(i,s-1)} + k_\beta \tau_{\alpha\gamma}^{(i,s-1)}) - \right. \end{aligned}$$

$$-r_1 \tau_{\alpha\alpha}^{(i,s-1)} - r_2 \tau_{\beta\beta}^{(i,s-1)} + RF_{13}^{(i)} + \zeta R(r_1 + r_2) F_{17}^{(i)} - \zeta^2 Rr_1 r_2 F_{17}^{(i)} \Big] d\xi,$$

$$\tau_{\alpha\alpha}^{(i,s)} = B_{11}^{(i)} P_1^{(i,s)} + B_{12}^{(i)} P_2^{(i,s)} + B_{16}^{(i)} P_3^{(i,s)}, \quad (\alpha, \beta; 1, 2)$$

$$\tau_{\alpha\beta}^{(i,s)} = B_{16}^{(i)} P_1^{(i,s)} + B_{26}^{(i)} P_2^{(i,s)} + B_{36}^{(i)} P_3^{(i,s)}$$

$$u_s^{(i,s)} = \int_0^{\xi} \left\{ a_{15}^{(i)} \tau_{\alpha\alpha}^{(i,s)} + a_{25}^{(i)} \tau_{\beta\beta}^{(i,s)} + a_{35}^{(i)} \tau_{\gamma\gamma}^{(i,s)} + a_{45}^{(i)} \tau_{\delta\delta}^{(i,s)} + a_{55}^{(i)} \tau_{\epsilon\epsilon}^{(i,s)} + \right. \\ \left. + a_{56}^{(i)} \tau_{\alpha\beta}^{(i,s)} + a_{13}^{(i)} \theta_s^{(i)} - \frac{1}{A} \frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + r_1 u^{(i,s-1)} + \zeta \left[a_{15}^{(i)} r_1 \tau_{\alpha\alpha}^{(i,s-1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + a_{25}^{(i)} r_2 \tau_{\beta\beta}^{(i,s-1)} + a_{45}^{(i)} r_2 \tau_{\delta\delta}^{(i,s-1)} + a_{55}^{(i)} r_1 \tau_{\epsilon\epsilon}^{(i,s-1)} + a_{56}^{(i)} r_1 \tau_{\alpha\beta}^{(i,s-1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + (r_1 + r_2) \left(a_{13}^{(i)} \theta_{s-1}^{(i)} - \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{A} r_2 \frac{\partial w^{(i,s-2)}}{\partial \xi} + r_1 r_2 u^{(i,s-2)} \right] + \right. \\ \left. + \zeta^2 r_1 r_2 \left(a_{13}^{(i)} \theta_{s-2}^{(i)} - \frac{\partial u^{(i,s-2)}}{\partial \xi} \right) \right\} d\xi, \quad (u, v; A, B; \alpha, \beta; \xi, \eta; 1, 2; 5, 4)$$

$$w_s^{(i,s)} = \int_0^{\xi} \left[a_{13}^{(i)} \tau_{\alpha\alpha}^{(i,s)} + a_{23}^{(i)} \tau_{\beta\beta}^{(i,s)} + a_{33}^{(i)} \tau_{\gamma\gamma}^{(i,s)} + a_{34}^{(i)} \tau_{\delta\delta}^{(i,s)} + a_{35}^{(i)} \tau_{\epsilon\epsilon}^{(i,s)} + \right. \\ \left. + a_{36}^{(i)} \tau_{\alpha\beta}^{(i,s)} + a_{13}^{(i)} \theta_s^{(i)} + \zeta \left(a_{13}^{(i)} r_1 \tau_{\alpha\alpha}^{(i,s-1)} + a_{23}^{(i)} r_2 \tau_{\beta\beta}^{(i,s-1)} + a_{34}^{(i)} r_2 \tau_{\delta\delta}^{(i,s-1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + a_{35}^{(i)} r_1 \tau_{\epsilon\epsilon}^{(i,s-1)} + a_{36}^{(i)} r_1 \tau_{\alpha\beta}^{(i,s-1)} + \zeta (r_1 + r_2) \left(a_{13}^{(i)} \theta_{s-1}^{(i)} - \frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial \xi} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \zeta^2 r_1 r_2 \left(a_{13}^{(i)} \theta_{s-2}^{(i)} - \frac{\partial w^{(i,s-2)}}{\partial \xi} \right) \right] d\xi,$$

$$P_1^{(i,s)} = \frac{1}{A} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + Rk_2 v^{(i,s-1)} + r_1 w^{(i,s-1)} - a_{13}^{(i)} \tau_{\gamma\gamma}^{(i,s)} - a_{14}^{(i)} \tau_{\delta\delta}^{(i,s)} - \quad (1.9)$$

$$- a_{15}^{(i)} \tau_{\alpha\beta}^{(i,s)} - a_{11}^{(i)} \theta_s^{(i)} + \zeta r_2 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u^{(i,s-2)}}{\partial \xi} + Rk_2 v^{(i,s-2)} + r_1 w^{(i,s-2)} \right) - \\ - \zeta \left(a_{11}^{(i)} r_1 \tau_{\alpha\alpha}^{(i,s-1)} + a_{12}^{(i)} r_2 \tau_{\beta\beta}^{(i,s-1)} + a_{14}^{(i)} r_2 \tau_{\delta\delta}^{(i,s-1)} + a_{15}^{(i)} r_1 \tau_{\epsilon\epsilon}^{(i,s-1)} + \right. \\ \left. + a_{16}^{(i)} r_1 \tau_{\alpha\beta}^{(i,s-1)} - a_{11}^{(i)} \zeta (r_1 + r_2) \theta_{s-1}^{(i)} - a_{11}^{(i)} \zeta^2 r_1 r_2 \theta_{s-2}^{(i)} \right)$$

$$(\alpha, \beta; u, v; A, B; 1, 2; 4, 5)$$

$$P_3^{(i,s)} = \frac{1}{B} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \eta} - Rk_2 v^{(i,s-1)} + \frac{1}{A} \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \xi} - Rk_2 u^{(i,s-1)} - a_{36}^{(i)} \tau_{\gamma\gamma}^{(i,s)} -$$

$$- a_{46}^{(i)} \tau_{\delta\delta}^{(i,s)} - a_{56}^{(i)} \tau_{\epsilon\epsilon}^{(i,s)} - a_{12}^{(i)} \theta_s^{(i)} + \zeta r_1 \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u^{(i,s-2)}}{\partial \eta} - Rk_2 v^{(i,s-2)} \right) + \\ + \zeta r_2 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v^{(i,s-2)}}{\partial \xi} - Rk_2 u^{(i,s-2)} \right) - \zeta \left(a_{16}^{(i)} r_1 \tau_{\alpha\alpha}^{(i,s-1)} + a_{26}^{(i)} r_2 \tau_{\beta\beta}^{(i,s-1)} + \right.$$

$$+ a_{4j}^{(i)} r_2 \tau_{\beta j}^{(i,s-1)} + a_{5k}^{(i)} r_1 \tau_{\alpha k}^{(i,s-1)} + a_{6l}^{(i)} r_1 \tau_{\alpha l}^{(i,s-1)} - \\ - z_{12}^{(i)} (r_1 + r_2) \theta_{s-1}^{(i)} - a_{12}^{(i)} r_1 r_2 \theta_{s-2}^{(i)}$$

$$\Delta = a_{11} a_{22} a_{33} + 2a_{12} a_{13} a_{23} - a_{22} a_{13}^2 - a_{33} a_{12}^2 - a_{31} a_{23}^2$$

$$B_{kk} = (a_{11} a_{jj} - a_{j1}) / \Delta, \quad B_{kj} = (a_{k1} a_{jl} - a_{kj} a_{1l}) / \Delta$$

$$A_{km} = -(a_{1m} B_{k1} + a_{2m} B_{k2} + a_{3m} B_{k3}), \quad B_{kj} = B_{jk}$$

$$A_{nm} = a_{n1} A_{1m} + a_{n2} A_{2m} + a_{n3} A_{3m} + a_{nm}, \quad A_{nm} \neq A_{mn}$$

$$j \neq l \neq k \neq j, \quad j, k, l = 1, 2, 3; \quad m, n = 3, 4, 5$$

$$u^{-(0)} = u^- / R, \quad u^{-(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad (u, v, w), \quad r_1 = R / R_1, \quad r_2 = R / R_2$$

$$k_1 = \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad k_2 = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \quad \text{— геодезические кривизны, } R_1, R_2 \text{— главные}$$

радиусы кривизны поверхности контакта слоев. Всем величинам, входящим в выражения Δ , A_{jk} , B_{jk} , необходимо приписать индекс (i) .

В формулах (1.8) $\tau_{\alpha 0}^{(i)}(\xi, \eta)$, $\tau_{\beta 0}^{(i)}(\xi, \eta)$, $\tau_{\gamma 0}^{(i)}(\xi, \eta)$ — произвольные функции интегрирования, которые однозначно определяются из граничных условий (1.2). Если на поверхности $\gamma = h_1$ ($\zeta = \zeta_1 = h_1/h_2$) заданы значения напряжений (первая группа условий (1.2)) эти функции определяются по формулам

$$\tau_{\alpha 0}^{(s)} = \tau_{\alpha 1}^{+(s)} - \tau_{\alpha 1}^{(i,s)}(\zeta_1), \quad (\alpha, \beta), \quad \tau_{\gamma 0}^{(s)} = \tau_{\gamma 1}^{+(s)} - \tau_{\gamma 1}^{(i,s)}(\zeta_1) \quad (1.10)$$

где

$$\tau_{\alpha 1}^{+(0)} = \sigma_{\alpha 1}^+, \quad \tau_{\alpha 1}^{+(1)} = \tau_1 r_2 \sigma_{\alpha 1}^+, \quad \tau_{\alpha 1}^{+(s)} = 0, \quad s > 1, \quad (\alpha, \beta; 1, 2)$$

$$\tau_{\gamma 1}^{+(0)} = \sigma_{\gamma 1}^+, \quad \tau_{\gamma 1}^{+(1)} = \tau_1 (r_1 + r_2) \sigma_{\gamma 1}^+, \quad \tau_{\gamma 1}^{+(2)} = \tau_1^2 r_1 r_2 \sigma_{\gamma 1}^+, \quad \tau_{\gamma 1}^{+(s)} = 0, \quad s > 2 \quad (1.11)$$

Если же при $\gamma = h_1$ задана вторая группа условий (1.2), то

$$\tau_{\alpha 0}^{(s)} = D_{35} V_{\alpha}^{(s)} + D_{34} V_{\beta}^{(s)} + D_{33} V_{\gamma}^{(s)}, \quad (\alpha, \beta; 4, 5) \quad (1.12)$$

$$\tau_{\gamma 0}^{(s)} = D_{35} V_{\alpha}^{(s)} + D_{34} V_{\beta}^{(s)} + D_{33} V_{\gamma}^{(s)}$$

где

$$V_{\alpha}^{(s)} = h_2 [u^{(2,s)}(\zeta = -1) - u^{(1,s)}(\zeta = \zeta_1) + u^{+(s)} - u^{-(s)}], \quad (\alpha, \beta, \gamma; u, v, w)$$

$$u^{\pm(0)} = u^{\pm} / R, \quad u^{\pm(s)} = 0, \quad (s \neq 0), \quad (u, v, w) \quad (1.13)$$

$$D_{ii} = (c_{kj} c_{jk} - c_{jj} c_{kk}) / \Delta_*, \quad D_{kl} = (c_{kl} c_{jl} - c_{kj} c_{kl}) / \Delta_*$$

$$c_{lm} = h_1 A_{lm}^{(1)} + h_2 A_{lm}^{(2)}, \quad l \neq k \neq j \neq l; \quad k, l, j, m = 3, 4, 5$$

$$\Delta_* = c_{33} c_{45} c_{54} + c_{44} c_{35} c_{53} + c_{55} c_{34} c_{43} - c_{33} c_{44} c_{55} - c_{34} c_{45} c_{53} - c_{35} c_{54} c_{43}$$

Когда при $\gamma = h_1$ заданы условия (1.2) для смешанных задач, подчинив решение (1.8) этим условиям, аналогичным образом определим значения $\tau_{\alpha 0}^{(s)}$, $\tau_{\beta 0}^{(s)}$, $\tau_{\gamma 0}^{(s)}$ и для этих случаев.

Таким образом, неизвестные внутренней задачи полностью определяются из условий, заданных на лицевых поверхностях оболочки,

независимо от условий на ее боковой поверхности (торцах). Этим свойством указанный класс задач принципиально отличается от задач классической теории оболочек, поскольку в последнем случае решение внутренней задачи содержит произволы, которые затем определяются из условий на боковой поверхности [3]. Здесь же условиям на боковой поверхности соответствует пограничный слой. Вопросы построения пограничного слоя и его взаимодействия с внутренней задачей для оболочек рассматриваются по аналогии с пластинами [6, 7]. Отметим также, что асимптотическим методом, изложенным выше, можно решать смешанные задачи для многослойных оболочек.

В заключение этого раздела сделаем одно замечание общего характера: представлением (1.6), (1.8) определяются решения, имеющие асимптотический характер, то есть предполагается, что

$$Q = \sum_{s=1}^{N-1} \epsilon^{s+s} Q^{(s)} + O(\epsilon^{s+N}) \quad (1.14)$$

Если в общем случае оценка остаточного члена для каждого N затруднительна в силу многообразия вариантов задания отношений упругих и геометрических характеристик слоев [10], в каждой же конкретной задаче она не представляет большого труда, поскольку из общего формального решения (1.6), (1.8), (1.10), (1.12) легко выписываются все величины, подлежащие оценке. Когда слои резко отличаются по своим упругим и геометрическим характеристикам, можно указать случаи (хотя бы теоретические), когда асимптотика (1.6) будет нарушена, то есть некоторые отброшенные для данного « S » слагаемые будут иметь порядок оставленных. Возникающие возможные ситуации подробно изучены в [10]. Общая качественная картина и методика исследования вопроса, изложенные в [10], остаются в силе и в обсуждаемом случае.

2. Приведем решения двух задач для двухслойных ортотропных цилиндрических оболочек, иллюстрирующие возможности изложенного выше подхода.

Имеем двухслойную ортотропную круговую цилиндрическую оболочку, внутренняя поверхность которой жестко закреплена, а внешняя свободна от нагрузок (фиг. 1). Оболочка находится в температурном поле и пусть изменение температурного поля по толщине оболочки линейно: $\theta^{(i)} = a_i \gamma + b$, $i = 1, 2$.

Выбрав за α длину по образующей, за β —длину дуги направляющего цилиндра, будем иметь

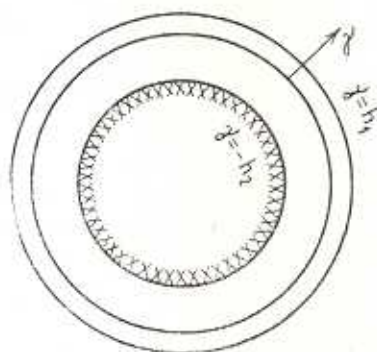
$$A=B=1, \quad r_1=0, \quad r_2=1, \quad k_2=k_3=0, \quad 1/R_1=0, \quad R_2=K$$

где R —радиус поверхности контакта слоев. Напряжения и перемещения такой оболочки вычислим по формулам (1.6), (1.8)—(1.11).

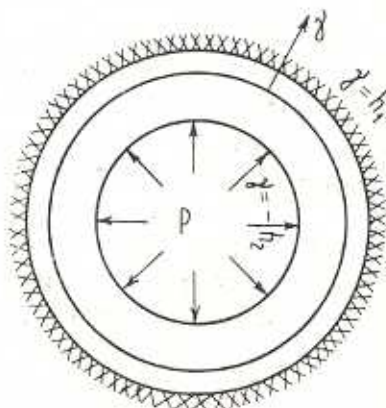
С точностью $O(\epsilon^2)$ они будут:

$$\sigma_{*1}^{(i)} = \sigma_{\beta 1}^{(i)} = 0, \quad \sigma_{*3}^{(i)} = -\frac{\alpha_{12}^{(i)}}{\alpha_{66}^{(i)}} (a_i \gamma + b)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{17}^{(0)} &= [G_{22}^{(0)} \gamma (a_1 \gamma + 2b) - G_{22}^{(0)} h_1 (a_1 h_1 + 2b)] \frac{1}{2(R+\gamma)} \\
\alpha_{23}^{(0)} &= G_{11}^{(0)} (a_1 \gamma + b) + A_{13}^{(0)} G_{22}^{(0)} \frac{\gamma}{2(R+\gamma)} (a_1 \gamma + 2b) - A_{13}^{(0)} G_{22}^{(0)} \frac{h_1}{R+\gamma} \times \\
&\times (a_1 h_1 + 2b) - \frac{a_{12}^{(0)}}{2\Delta^{(0)}(R+\gamma)} [G_{33}^{(0)} \gamma (a_1 \gamma + 2b) - G_{33}^{(0)} h_2 (a_2 h_2 - 2b)] \\
\alpha_{33}^{(0)} &= G_{22}^{(0)} (a_1 \gamma + b) + A_{23}^{(0)} G_{22}^{(0)} \frac{\gamma}{2R} (a_1 \gamma + 2b) - A_{23}^{(0)} G_{22}^{(0)} \frac{h_1}{2R} (a_1 h_1 + 2b) + \\
&+ \frac{a_{11}^{(0)}}{\Delta^{(0)}} \left[G_{33}^{(0)} \frac{\gamma}{2R} (a_1 \gamma + 2b) - G_{33}^{(0)} \frac{h_2}{2R} (a_2 h_2 - 2b) \right] \\
u_2^{(0)} &= \frac{1}{2} \alpha_{13}^{(0)} \gamma (a_1 \gamma + 2b) - \frac{1}{2} \alpha_{13}^{(0)} h_2 (a_2 h_2 - 2b) \\
u_3^{(0)} &= \frac{1}{2} \alpha_{23}^{(0)} \gamma (a_1 \gamma + 2b) - \frac{1}{2} \alpha_{23}^{(0)} h_2 (a_2 h_2 - 2b) + \\
&+ \frac{\gamma^2}{6R} \alpha_{23}^{(0)} (a_1 \gamma + 3b) - \frac{\gamma h_2}{2R} \alpha_{23}^{(0)} (a_2 h_2 - 2b) - \frac{h_2^2}{6R} \alpha_{23}^{(0)} (2a_2 h_2 - 3b) \\
u_7^{(0)} &= \frac{1}{2} G_{33}^{(0)} \gamma (a_1 \gamma + 2b) - \frac{1}{2} G_{33}^{(0)} h_2 (a_2 h_2 - 2b) - \\
&- \frac{h_1}{2R} (A_{33}^{(0)} \gamma + A_{33}^{(0)} h_2) G_{22}^{(0)} (a_1 h_1 + 2b) + \frac{\gamma h_2}{2R} A_{23}^{(0)} G_{33}^{(0)} (a_2 h_2 - 2b) + \\
&+ \frac{\gamma^2}{6R} (A_{33}^{(0)} G_{22}^{(0)} - A_{23}^{(0)} G_{33}^{(0)}) (a_1 \gamma + 3b) + \frac{h_2^2}{6R} A_{23}^{(0)} G_{22}^{(0)} (a_2 h_2 - 3b) + \\
&+ \frac{h_1^2}{6R} A_{23}^{(0)} G_{33}^{(0)} (2a_2 h_2 - 3b) \\
G_{11}^{(0)} &= (a_{12}^{(0)} \alpha_{22}^{(0)} - a_{22}^{(0)} \alpha_{11}^{(0)}) / (a_{11}^{(0)} a_{22}^{(0)} - (a_{12}^{(0)})^2) \\
G_{33}^{(0)} &= A_{13}^{(0)} \alpha_{11}^{(0)} + A_{23}^{(0)} \alpha_{22}^{(0)} + \alpha_{33}^{(0)}
\end{aligned} \tag{2.1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Внешняя поверхность двухслойной ортотропной цилиндрической оболочки жестко закреплена, а внутри действует постоянное давление p . Объемные силы и переменные температурные поля отсутствуют (фиг. 2). Исходя из тех же формул, для искомых напряжений и перемещений получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)} &= \sigma_{\beta\gamma}^{(i)} = \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} = u_{\alpha}^{(i)} = u_{\beta}^{(i)} = 0 \\ \sigma_{\gamma\gamma}^{(i)} &= \frac{R-h_2}{R+\gamma} p + (A_{23}^{(i)} \gamma + A_{33}^{(i)} h_2) \frac{p}{R+\gamma} \\ \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} &= A_{13}^{(i)} (R-h_2 + h_2 A_{33}^{(2)} + \gamma A_{23}^{(i)}) \frac{p}{R} - \frac{a_{12}^{(i)}}{\Delta^{(i)}} (A_{33}^{(i)} \gamma - h_2 A_{33}^{(1)}) \frac{p}{R} \\ \sigma_{\beta\beta}^{(i)} &= A_{23}^{(i)} (R-h_2 + \gamma + h_2 A_{23}^{(2)} + \gamma A_{23}^{(i)}) \frac{p}{R+\gamma} + \frac{a_{11}^{(i)}}{\Delta^{(i)}} (A_{33}^{(i)} \gamma - h_2 A_{33}^{(1)}) \frac{p}{R+\gamma} \\ u_{\gamma}^{(i)} &= (A_{33}^{(i)} \gamma - A_{33}^{(1)} h_2) (R-h_2 + h_2 A_{33}^{(2)}) \frac{p}{R} + \\ &+ \frac{1}{2} (A_{33}^{(1)} h_1^2 - \gamma^2 A_{33}^{(i)}) \frac{p}{R} + A_{33}^{(i)} (A_{23}^{(i)} \gamma - h_2 A_{23}^{(1)}) \frac{h_2 p}{R} \\ \Delta^{(i)} &= [a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} - (a_{12}^{(i)})^2] a_{\alpha\alpha}^{(i)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Используя специфичность упругих и температурных свойств отдельных слоев, на основе полученного общего решения можно ответить на различные оптимизационные вопросы.

ABOUT THE ASYMPTOTIC SOLUTION OF NON-CLASSICAL BOUNDARY PROBLEMS FOR BI-LAYER ANIZOTROPIC THERMOELASTIC SHELLS

L. A. AGALOVIAN, R. S. GEVORGIAN

ԵՐԿՇԵՐՏ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՋԵՐՄԱԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՔԱՂԱՆՔՆԵՐԻ ՈՋ ԳԱՍԱԿԱՆ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԳԻՐՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԼՈՒՄՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Լ. Ա. ԱՂԱՌՎՅԱՆ, Ռ. Ս. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Ա Վ Փ Ն Փ Ն Ր Մ

Երկշերտ շերմաառաձգական թաղանթների խառը տարածական խնդիրների դասի համար ստացված է ասիմպտոտիկ լուծում: Շերտերը համարվում են կամայական անիզոտրոպ (ընդթաղանթում են 21 առաձգական հաստատուններով): Ապացուցված է թաղանթների դասական տեսության ոչ կիրառելիությունը նման խնդիրների լուծման համար: Ստացված արդյունքները լուսաբանված են երկշերտ զլանային թաղանթների երկու մոդելային խնդիրների լուծումներով:

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л. А. О некоторых соотношениях классической линейной теории анизотропных оболочек и возможностях их уточнения.—Изв. АН СССР, МТТ, 1972, №1, с. 109—120.
2. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости.—М.: Мир, 1970. 256 с.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек.—М.: Наука, 1976. 512 с.
4. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.—М.: Наука, 1973. 272 с.
5. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Неклассические краевые задачи пластины с общей анизотропией.—В кн.: Механика конструкций из композиционных материалов, Новосибирск, Наука, 1984, с. 105—110.
6. Агаловян Л. А. О пограничном слое пластинок.—Докл. АН Арм. ССР, 1972, т. 55, №3, с. 149—155.
7. Геворкян Р. С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластинок.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1984, т. 37, № 6, с. 3—15.
8. Александров В. М., Бабешко В. А., Белоконь А. В., Воронич И. Н., Устинов Ю. А. Контактная задача для кольцевого слоя малой толщины.—Инж. ж. МТТ, 1966, №1, с. 135—139.
9. Агаловян Л. А. К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера. В сб: XIII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек, Ч. 1. А—В, Таллин, 1983, с. 13—18.
10. Агаловян Л. А., Хачатрян А. М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния анизотропной слоистой балки.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1986, т. 39, №2, с. 3—14.

Институт механики АН Армянской ССР Поступила в редакцию
27.IV.1987